Визначений інтеграл

Заняття 1. Визначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$. Нехай функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на цьому відрізку, тобто

$$F'(x) = f(x).$$

Означення 0.1. Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

називається відповідний приріст її первісної

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{0.1}$$

(читається: «інтеграл від а до бе еф від ікс де ікс»).

Формула (0.1) називається формулою Ньютона–Лейбніца. Число a називається нижньою межею інтегрування, b — верхньою межею; $f(x)\,dx$ називається підінтегральним виразом, $f(x)$ — підінтегральною функцією; відрізок $[a, b]$ — проміжок інтегрування.

Звідси випливає, щоб обчислити визначний інтеграл потрібно знайти первісну підінтегральної функції, обчислити значення цієї первісної на верхньої та нижньої межах і взяти їх різницю.

Різницю з правої частини формули Ньютона–Лейбніца (0.1) записують у вигляді підстановки:

$$F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Тоді маємо

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад 0.1. Обчислити візначений інтеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Розв'язання. Первісною функцією для $\dfrac{1}{1+x^2}$ є функція $\operatorname{arctg} x$. Тому за формулою Ньютона–Лейбніца маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Зауваження 0.1. Визначений інтеграл уявляє собой число, а невизначений інтеграл — функцію.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Значення визначеного інтеграла не залежить від того, якім символом позначена змінна інтегрування, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt.$$

2. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі, то знак інтеграла змінится на протилежний:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

3. Визначений інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int\limits_a^b Cf(x)\,dx = C\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad (C = \text{const}).$$

5. Визначений інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів від цих функций:

$$\int\limits_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

6. Адитивність:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

причому точка c може міститься як усередині відрізка $[a, b]$, так і зовні цього відрізка.

7. Якщо $a < b$ і $f(x) \geqslant 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

8. Якщо $a < b$ і $f(x) \geqslant g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

9. Теорема про середнє значення визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл від неперевної функції дорівнює добутку довжини проміжка інтегрування на значення підінтегральної функції у деякой внутрішній точці проміжка інтегрування:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c), \quad c \in [a, b]\,.$$

Завдання. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_{-1}^{2} x^3\,dx, \qquad \int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx, \qquad \int_1^2 \left(3x^2 - 2x + 1\right)\,dx,$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^4}\right)\,dx, \qquad \int_0^1 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)\,dx,$$

$$\int_1^8 \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx, \qquad \int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx,$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^2}, \qquad \int_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}, \qquad \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\, dx, \qquad \int_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}, \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x\, dx,$$

$$\int_{1/\pi}^{2/\pi} \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}, \qquad \int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x},$$

$$\int_{-1}^{2} e^x\, dx, \qquad \int_{0}^{3} 2^x\, dx, \qquad \int_{0}^{3} e^{\frac{x}{4}}\, dx,$$

$$\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx, \qquad \int_{0}^{\ln 3} \frac{e^x\, dx}{1+e^x}, \qquad \int_{0}^{1} \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}},$$

$$\int_{2}^{5} \frac{dx}{x}, \qquad \int_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}, \qquad \int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}},$$

$$\int_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\, dx, \qquad \int_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx,$$

$$\int_{0}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}, \qquad \int_{0}^{1} \frac{8x\, dx}{1+x^4}, \qquad \int_{0}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$\int_{2}^{4} \frac{x^2+3}{x-2}\, dx, \qquad \int_{0}^{2} \frac{2x-1}{2x+1}\, dx,$$

$$\int\limits_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx, \qquad \int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\,dx, \qquad \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\,dx,$$

Заняття 2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі має вигляд:

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,du(x).$$

Приклад 0.2.

$$\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x, & du = (x)'dx = dx \\ dv = \cos x\,dx, \;\; v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\sin x\big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\cdot\sin 0 + \cos x\big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 1 - 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Завдання. Обчислити визначені інтеграли:

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx, \qquad \int\limits_0^{\pi/2} x\sin x\,dx, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx,$$

$$\int\limits_1^e x\ln x\,dx, \qquad \int\limits_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx, \qquad \int\limits_1^{e-1} \ln(x+1)\,dx,$$

Заняття 3. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$. Нехай x є певна диферецiйовна монотонна функція $x = u(t)$, яка визначена на відрізку $[\alpha,\beta]$, причому $x(\alpha) = a$ і $x(\beta) = b$, тоді має місце формула заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,dt.$$

Приклад 0.3. Обчислити визначений інтеграл:

$$\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}.$$

Підінтегральная функція містить радикал. Позначимо цей радикал як нова функція:

$$t=\sqrt{3x-2}.$$

Звідси знайдемо віхідну змінну інтегрування x, її диференціал і нові межі інтегрування

$$\begin{aligned}
&t^2=3x-2,\\
&x=\frac{1}{3}\left(t^2+2\right),\\
&dx=\frac{1}{3}(t^2+2)'\,dt=\frac{2}{3}t\,dt,\\
&t(6)=\sqrt{3\cdot 6-2}=\sqrt{16}=4,\\
&t(1)=\sqrt{3\cdot 1-2}=1.
\end{aligned}$$

Тоді маємо

$$\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}=\left\|\begin{array}{l}
t=\sqrt{3x-2},\\
t^2=3x-2,\\
x=\frac{1}{3}\left(t^2+2\right),\\
dx=\frac{1}{3}(t^2+2)'\,dt=\frac{2}{3}t\,dt,\\
t(6)=\sqrt{3\cdot 6-2}=\sqrt{16}=4,\\
t(1)=\sqrt{3\cdot 1-2}=1.
\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_1^4 \frac{t\,dt}{1+t}=\frac{2}{3}\int\limits_1^4 \frac{t+1-1}{1+t}\,dt=\frac{2}{3}\left(\int\limits_1^4 dt-\int\limits_1^4 \frac{dt}{1+t}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(t\big|_1^4-\int\limits_1^4 \frac{d(1+t))}{1+t}\,dt\right)=\frac{2}{3}\left(4-1-\ln(t+1)\big|_1^4\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(3-\ln(4+1)+\ln(1+1)\right)=\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right).$$

Зауваження 0.2. При знаходженні невизначеного інтеграла методом підстановки у первісній функції доводилось від нової змінної t повертатися до вихідної змінної x. При обчисленні визначеного інтеграла робити таку заміну немає

потреби, тому що визначений інтеграл це число і воно вже буде знайдено при обчисленні перетвореного інтеграла.

Завдання. Обчислити визначені інтеграли за допомогою вказаних підстановок:

$$\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}, \quad t^2 = x, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx, \quad t^2 = x,$$

$$\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}, \quad t^2 = 1+x, \qquad \int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx, \quad t^2 = x,$$

$$\int\limits_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad t = \frac{1}{x}, \qquad \int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \quad t^2 = e^x + 1.$$

Завдання. Обчислити визначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}, \qquad \int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}, \qquad \int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}},$$

$$\int\limits_0^{1/2} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx, \qquad \int\limits_{1/4}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}, \qquad \int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

Заняття 4. Геометричні застосування визначеного інтеграла

Означення 0.2. Криволінійною трапецією називається плоская фигура, що обмежена відрізком $[a, b]$ (основа трапеції), прямими $x = a$, $x = b$ та кривою $y = f(x)$.

Геометричний зміст визначеного інтеграла: якщо функція $f(x)$ невід'ємна ($f(x) \geqslant 0$) на відрізку $[a, b]$, тоді визначений інтеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

дорівнює площі криволінійної трапеції, що обмежена лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

У загальному випадку визначений інтеграл дорівнює алгебраїчній сумі площ фигур, що обмежені лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, причому

площі, що росташовані вище осі Ox, входять у цю суму зі знаком плюс «+», а площі росташовані нижче осі Ox, — зі знаком «-».

Нехай фігура обмежена кривими $f(x)$ і $g(x)$ та прямимі $x = a$, $x = b$, причому $f(x) \geqslant g(x)$ на відрізку $[a, b]$, тобто крива $f(x)$ вище кривої $g(x)$. Тоді площа цієї фігури дорівнює різниці двох криволінійних трапецій:

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx.$$

Приклад 0.4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої кривими $y = 2 - x^2$ і $y = x^2$.

Знайдемо точки перетину кривих

$$\begin{cases} y + x^2 = 2, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$$

Звернемо увагу на те, що точки перетину містяться на обох кривих. Тому координати ціх точок задовольняють рівнянням обоїх кривих. Таким чином, потрібно скласти систему із рівняннь ціх кривих і розв'язати їх.

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{gathered} y = x^2, \\ y + x^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 = 2, \\ x^2 = 1, \\ x = \pm 1. \end{gathered}$$

Таким чином маємо межі інтегрування:

$$a = x_1 = -1, \quad b = x_2 = 1.$$

Звичайно будують фігуру, для цього можно побудувати таблицю координат точок кривих $y = 2 - x^2$ і $y = x^2$, якщо узяти декілька точок в межах інтегрування.

Зауважемо, що крива $y = 2 - x^2$ вище кривої $y = x^2$ на проміжку інтегрування.

За формулою

$$S = \int\limits_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx$$

одержимо шукану площу:

$$S = \int\limits_{-1}^{1} \left(2 - x^2 - x^2\right)\, dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(2 - 2x^2\right)\, dx = 2\left(\int\limits_{-1}^{1} dx - \int\limits_{-1}^{1} x^2\, dx\right) =$$

$$= 2\left(x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = 2\left(1 - (-1) - \frac{1}{3} + \frac{-1}{3}\right) = 2\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

Завдання. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1. $y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 3.$
2. $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 8.$
3. $y = 6 - x - x^2, \quad y = x + 2.$
4. $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = 2\sqrt{x}.$
5. $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = -\frac{\pi}{4}.$
6. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$
7. $y = \frac{2}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 3.$
8. $y = \frac{3}{x}, \quad x + y = 4.$