Застосування теорії рядів

Таблиця розвинень у ряд Маклорена основних елементарних функцій

Ряд експоненти

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ряди синусів та косинусів

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty$$

Логарифмічний ряд та ряд його похідної

$$\ln(1+\mathrm{x}) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Ряд арктангенсу

$$\mathrm{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Біноміальний ряд

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Ряд прискореної збіжності для рекурентного обчислення логарифмів натуральних чисел

$$\ln(m+1) = \ln m + 2\left[\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \frac{1}{5(2m+1)^5} + \ldots\right].$$

Приклад 1а Обчислити число π з точністю 0,01.

Скористаємося розвиненням арктангенса при $x=1$:

$$\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

З цієї рівності отримуємо:

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{2n+1}\ .$$

Очевидно , що цей ряд знакозмінний і збіжний за ознакою Лейбніца (перевірте самостійно), а тоді його залишок не перевищує за модулем модуля першого відкинутого члена. Знайдемо таке n, для якого:

$$\left|\frac{4(-1)^n}{2n+1}\right|<0{,}01,$$

тобто $2n+1>400$, або $n\geq 200$. Таким чином:

$$\pi\approx 4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\ldots-\frac{4}{399}\approx 3{,}14.$$

Приклад 1б. Обчислити число e з точністю 0,001.

Скористаємось розвиненням експоненти , у якому покладемо $x=1$:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\ldots$$

встановлюємо оцінку для залишкового члену:

$$|R_n|\leq\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}\ .$$

Виберемо n з нерівності

$$\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001,\ \text{тобто}\ (n+1)!>3000,\ \text{або}\ n\geq 6.$$

Отже, для досягнення потрібної точності треба взяти:

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\approx 2{,}7181.$$

Наближені обчислення значень функцій у точці

Приклад 1 Обчислити $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ з точністю до 0,001.

Розв'язок. Використаємо ряд

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ \frac{1}{\sqrt[4]{e}}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

Отже, в цьому ряду необхідно взяти $x=-\frac{1}{4}$. Одержимо знакопере міжний ряд:

$$e^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1}{384} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \ldots$$

Якщо для обчислення взяти n перших членів, то, враховуючи, що ряд знакопереміжний, похибка від відкидання решти членів буде менше абсолютної величини першого відкинутого члена, тобто $R_n < \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. За умовою повинно бути одержане число з точністю до 0,001, тобто загальна похибка від відкидання членів і від округлення повинна бути менше 0,0005. якщо зберегти перші чотири члена, то похибка від відкидання всіх останніх членів на основі ознаки Лейбніца $R_4 < \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^4 < 0{,}00016$, через це:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{4}\right)^3 \approx 0{,}799.$$

Обчислити з округленням треба тільки останній додаток. Якщо зберегти чотири десятичні знаки, то похибка округляється не більше 0,00005. Найвища межа загальної похибки дорівнює 0,00021. Отже,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0{,}799.$$

Приклад 2 Знайти наближене значення $\cos 10^\circ$ з точністю до 0,0001.

Розв'язок. Переведемо градусну міру в радіанну $10^\circ = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}1745$.

Скористуємося розкладом $\cos x$ в степеневий ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$$

Одержуємо

$$\cos 10^\circ = \cos\frac{\pi}{18} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} - \ldots$$

цей ряд є рядом Лейбніца, через це, прийнявши за наближене значення $\cos 10^\circ$ суму перших двох членів розкладу, виконаємо похибку R_3 за абсолютною величиною меншу третього члена

$$|R_3| < \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} < \frac{(0,2)^4}{24} < 0,0001.$$

Таким чином,

$$\cos 10^\circ \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} \approx 1 - \frac{(0,1745)^2}{24} \approx 0,9948.$$

З точністю до 0,0001, з недостачею, так як третій член розкладу додатний. Обчислюючи суму перших двох членів з точністю до 10^{-4} з залишком (для того, щоб обчислити другий член з тією ж точністю з недостачею), одержимо абсолютну похибку, тобто повну похибку, меншу 0,0001, відповідно з завданням (таке як обидві похибки були менше 10^{-4} і мають різні знаки). Отже, $\cos 10^\circ \approx 0,9948$.

Приклад 3 . Обчислити $\sqrt[4]{17}$ з точністю до 0,001.

Розв'язок. Перетворимо заданий корінь

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = \sqrt[4]{16\left(1+\frac{1}{16}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Для обчислення $\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ використаємо біноміальний ряд

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

підставляючи $x = \frac{1}{16}$, $m = \frac{1}{4}$:

$$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left(1 + \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3} - \ldots\right).$$

Щоб визначити, скільки необхідно взяти перших членів цього знакопереміжного ряду для обчислення $\sqrt[4]{17}$ з точністю до 0,0001, обчислимо декілька послідовних перших членів ряду: $a_1 = 1$; $a_2 \approx 0,01562$; $a_3 \approx -0,00037$; $a_4 \approx 0,00001$. Згідно властивості знакопереміжного збіжного ряду, якщо обмежитися сумою трьох перших членів ряду, то похибка шуканого наближеного значення кореня буде меншою $2a_4 \approx 20,00001 < 0,0001$. Отже,

$$\sqrt[4]{17} \approx 2(1 + 0,1562 - 0,00037) \approx 2,0305.$$

Наближені обчислення визначених інтегралів

Приклад 4 . Обчислити інтеграл $\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx$ з точністю до 0,00001.

Розв'язок. Невизначений інтеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ не виражається через елементарні функції, через це при обчисленні даного визначеного інтегралу формулу Ньютона-Лейбніца застосовувати не можна. Обчислимо інтеграл наближено. Розділивши почленно ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

на x, одержимо:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Інтегруємо цей ряд почленно:

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{1/4} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{5 \cdot 5!}\left(\frac{1}{4}\right)^5 - \ldots$$

Так як $$\frac{1}{5 \cdot 5!}\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{614400} < 0{,}00001,$$

то за ознакою Лейбніця, щоб виконати задану точність, досить взяти суму перших двох членів:

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}25 - 0{,}00087 = 0{,}24913.$$

Приклад 5 Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, з точністю до 0,001.

Це також інтеграл, що неможливо взяти у рамках елементарних функцій. Розкладаємо підінтегральну функцію у ряд Маклорена, застосував ряд експоненти, де замість змінної x підставимо змінну ($-\frac{x^2}{2}$). Маємо:

$$e^{\frac{-x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Проінтегруємо останню рівність в межах від 0 до 1, маємо

$$\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{2 \cdot 1} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{2^3 \cdot 3!} dx + \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\Bigg|_0^1 + \frac{x^5}{2^2\cdot 2!\cdot 5}\Bigg|_0^1 - \frac{x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!}\Bigg|_0^1 + \ldots = 1 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 2!\cdot 5} - \frac{1}{7\cdot 2^3\cdot 3!} + \ldots$$

Знайдемо член ряду, за модулем менший 0,001:

$$1 > 0{,}001; \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} > 0{,}001; \quad \frac{1}{2^2\cdot 2!\cdot 5} = \frac{1}{40} > 0{,}001; \quad \frac{1}{7\cdot 2^3\cdot 3!} = \frac{1}{42\cdot 8} > 0{,}001;$$

$$\frac{1}{9\cdot 2^4\cdot 4!} = \frac{1}{9\cdot 16\cdot 24} = \frac{1}{3456} < 0{,}001.$$

Тобто, всі члени ряду, починаючи з $\frac{1}{9\cdot 2^4\cdot 4!}$, можна відкинути. Тоді

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx 1 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 2!\cdot 5} - \frac{1}{7\cdot 2^3\cdot 3!} \approx 8{,}855.$$

Приклади для самостійного розв'язку

Обчислити визначені інтеграли з точністю до 0,001.

а) $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$; б) $\int_0^{1/10} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$;

в) $\int_0^1 \sin^2 x dx$; г) $\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx$.

Відповіді *а)* 40,87; *б)* 0,098; *в)* 0,310; *г)0,245.*