Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги кривої

Як було з'ясовано визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ це число, яке дорівнює площі криволінійної трапеція . Ця трапеція зверху обмежена кривою $y = f(x)$, знизу віссю абсцис, праворуч та ліворуч прямими $x = a$, $x = b$ (дивись рисунок 1).

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$.

Розв'язання. Для знаходження площі цієї фігури застосуємо формулу $S = \int_a^b f(x)dx$. Як відомо з умови задачі $0 \le x \le \ln 2$, $f(x) > 0$. Тож, обчислення площі заданої фігури полягає у звичайному обчисленні визначеного інтегралу, а саме:

$$S = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{e^x - 1} = t, e^x - 1 = t^2 \\ e^x = t^2 + 1, \ln e^x = \ln\left(t^2 + 1\right) \\ x = \ln\left(t^2 + 1\right), dx = \dfrac{2tdt}{t^2 + 1} \\ t_a = 0, t_b = 1 \end{array} \right| = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2 + 1} dt =$$

$$= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = 2\left(t - arctgt\right)\Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2} \text{ (кв.од.).}$$

Продовжимо розглядати питання обчислення площі плоскої фігури. Нехай фігура (рисунок 1) площу якої потрібно знайти обмежена такими лініями:

$$y = f(x) \ \left(f(x) < 0\right), \ x = a, \ x = b, \ y = 0.$$

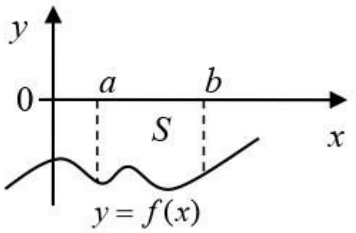


Рисунок 1

Як бачимо з рисунку 5.1, ця фігура розташована під віссю абсцис, тому площу такої фігури слід знаходити за формулою (5.1):

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

зображена на рисунку 2. Згідно з формулою (5.1) обчислимо її площу:

$$S=-\int_0^2 (x-2)dx=-\frac{(x-2)^2}{2}\Bigg|_0^2=$$

$$=-\frac{(2-2)^2}{2}+\frac{(0-2)^2}{2}=\frac{1}{2}\text{ (кв.од.).}$$

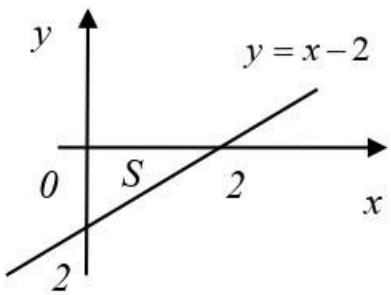


Рисунок 2

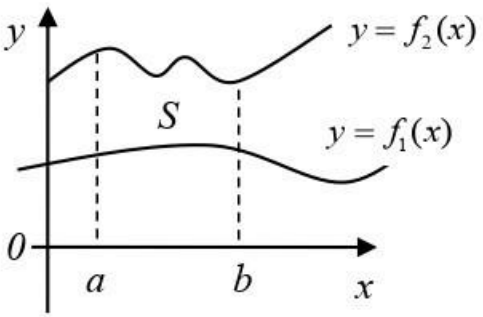


Рисунок 3

Нехай задана фігура, яка обмежена лініями $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ $(f_1(x)\le f_2(x))$ (рисунок 3), тоді площу фігури визначають за формулою (2):

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=4-x^2$, $y=3x$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рисунок 4) та знайдемо границі інтегрування. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=3x; \end{cases}$$

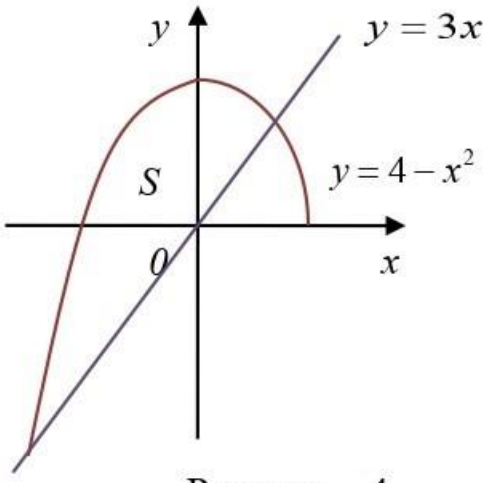


Рисунок 4

$$\begin{cases} x^2+3x-4=0, \\ y=3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-4, x_2=1, \\ y=3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-4, x_2=1, \\ y_1=-12, y_2=3. \end{cases}$$

Знаходимо площу фігури

$$S=\int_{-4}^{1}\left[4-x^2-3x\right]dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-4}^{1}=4-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-$$

$$-\left(-16+\frac{64}{3}-16\right)=\frac{77}{6}\ \text{(кв.од.)}.$$

Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $y=f(x)$, що зверху обмежує криволінійну трапецію, є кусочно-монотонною (рисунок 5), при цьому $c\in[a;b]$, то площу шуканої фігури слід знаходити, як

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f_1(x)dx+\int_c^b f_2(x)dx.$$

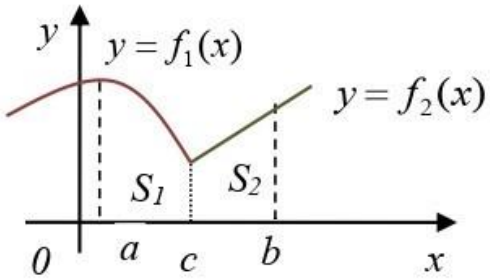


Рисунок 5

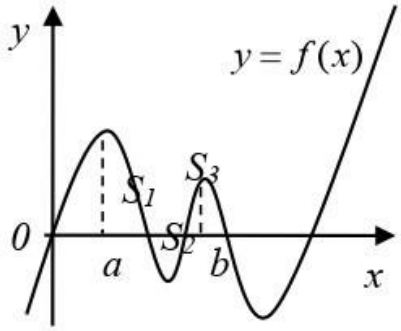


Рисунок 6

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $y=f(x)$ загального виду (рисунок 6). Припустимо, що відрізок $[a;b]$ можна розбити на кінцеве число інтервалів, таких що на кожному з них функція $y=f(x)$ буде знакосталою й не дорівнюватиме нулю, тоді площу фігури знаходимо так

$$S=S_1+S_2+S_3=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx.$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 4/x$, $y = x$, $x = 4$, $x = 0$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рисунок .7).

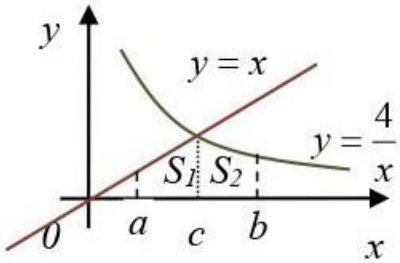


Рисунок 7

Як бачимо $y = f(x)$, яка обмежує задану фігуру, є кусочно-монотонною, верхня лінія складається з двох ліній: прямої $y = x$ та гіперболи $y = 4/x$. Тож, для знаходження площі заданої фігури скористаємось формулою . Спочатку знайдемо координати точки перетину графіків функцій, для цього прирівняємо їх:

$$y = 4/x,\ y = x,\ x = 4/x,\ x - 4/x = 0,\ x^2 - 4 = 0,\ x = \pm 2.$$

Таким чином, маємо три значення $a = 0$, $b = 4$, $c = 2$, але значення $x = -2$ не задовольняє умові задачі (як це видно з рисунку .7). Отже, площа заданої фігури обчислюється так:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 \frac{4}{x}\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + 4\ln x\Big|_2^4 = 2 + 4\ln 2 \text{ (кв.од.)}.$$

Нехай $y = f(x)$ неперервна функція разом зі своїми похідними $f'(x)$. Такі лінії будемо називати *гладкими* (рисунок .10).

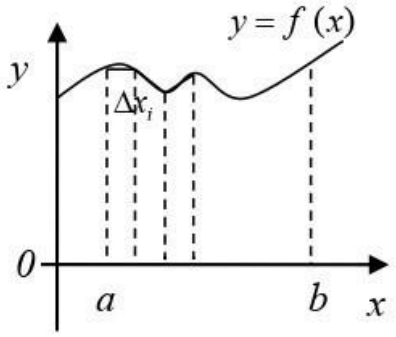


Рисунок 10

Довжиною дуги кривої називатимемо границю, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної під час необмеженого зростання числа її ланцюжків, за умови прямування довжини найбільшого з них до нуля.

Якщо ми будемо розраховувати довжину кожного з цих ланцюжків й додавати їх, ми прийдемо до визначеного інтегралу. Тож, визначений інтеграл застосовують для обчислення довжини дуги кривої.

Тоді, якщо задана функція $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, то довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,;$$

Обчислення об'єму тіла обертання

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна знакопостійна функція $y = f(x)$. Знайдемо об'єм тіла, отриманого обертанням фігури навколо осі абсцис (рисунок 11).

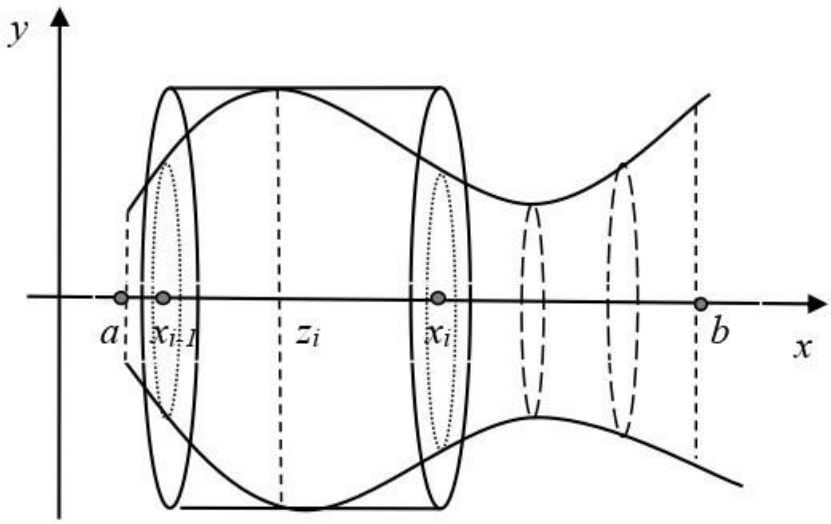


Рисунок 11

Для знаходження об'єму скористаємось методом проектування криволінійної трапеції на вісь абсцис. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на елементарні відрізки довільними точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, та на кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ довільним чином виберемо z_i $i = 1,2,\ldots n$. Тоді деяке наближення для шуканого об'єму дасть сума

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(z_i)\Delta x_i$$

– це об'єм циліндра з висотою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ та радіусом основи $f(z_i)$.

Очевидно, що наближення до шуканого об'єму V_x буде тим ближчим, чим менша довжина відрізка розбиття Δx_i, тому шуканий об'єм V_x знайдемо як границю

$$V_x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(z_i)\Delta x_i,$$

де $\max \Delta x_i$ – максимальна довжина відрізка розбиття. А це і є визначений інтеграл, тобто

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

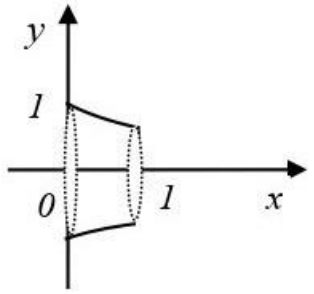


Рисунок 12

Приклад 8. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, обмеженої лініями

$y = e^{-2x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Розв'язання. Побудуємо тіло, яке буде отримано під час обертання фігури, обмеженої зазначеними лініями (рисунок 12). Обчислимо його об'єм

$$V_x = \pi \int_0^1 (e^{-2x})^2 dx = \frac{-\pi}{4} e^{-4x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \frac{e^4 - 1}{e^4} \ (куб.од.)$$

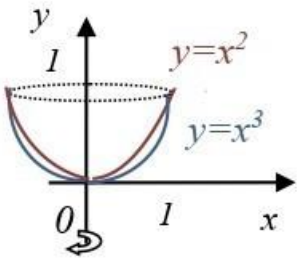


Рисунок .13

Приклад 9. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = x^3$.

Розв'язання. Об'єм тіла (рисунок .13), яке отримано обертанням фігури знаходимо як різницю між зовнішнім об'ємом $V_{зовн}$, який утворює лінія $y = x^3$ та об'ємом внутрішнім $V_{вн}$, який утворює лінія $y = x^2$.

$$V_y = \pi \int_0^1 \left[\left(y^{1/3}\right)^2 - \left(y^{1/2}\right)^2 \right] dy = \pi \left(\frac{3x^{5/3}}{5} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10} \text{ (куб.од).}$$

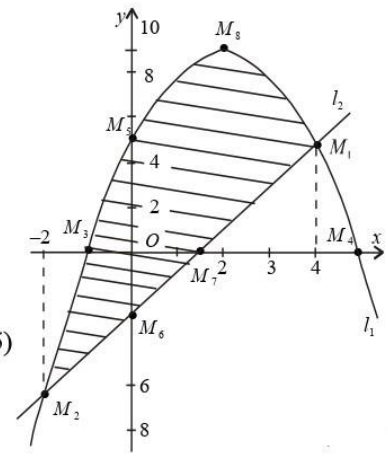
Приклад 10. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = 2x - 5$ та $y = -x^2 + 4x + 5$

Розв'язання.

Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y = -x^2 + 4x + 5$ (l_1) та прямою $y = 2x - 3$ (l_2) на координатній площині; Знаходимо точки перетину заданих ліній між собою як розв'язок системи:

$$\begin{cases} y = -x \ \ + 4x + 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x - 3 = -x^2 + 4x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases} \end{array}\right.$$



Отже, задані лінії перетинаються в точках $M_1(4;\ 5)$ $M_1(-2; -7)$.

Знаходимо точки перетину заданих ліній з осями координат, а також координати вершини параболи

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ 0).$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;\ 9)$ — вершина параболи $y - 9 = -(x-2)^2$.

Обчислимо площу S фігури $M_1M_8M_2$.

$$S = \int_{-2}^{4} \left(-x^2 + 4x + 5 - (2x - 3)\right) dx = \int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x \right)\Bigg|_{-2}^{4} =$$

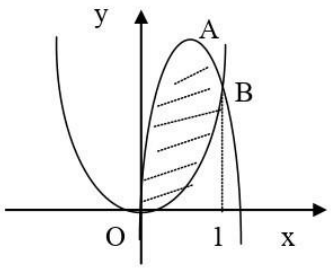
$$= -\frac{64}{3} + 16 + 32 - \left(\frac{8}{3} + 4 - 16 \right) = 36.$$

Відповідь: 36 *од*^{2}

Знайти площу фігури, яка обмежена графіками функцій:

а) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

Розв'язування



Побудувавши графіки функцій $y = x^2$, $y = 2x - x^2$, одержимо криволінійну фігуру OAB. Абсциси точок їх перетину дорівнюють:

$$x^2 = 2x - x^2,\ 2x^2 - 2x = 0,$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Її площа $S_{OAB} = \int_0^1 \left(2x - x^2 - x^2\right)dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\,од^2$

Відповідь: $\frac{1}{3}\,од^2$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Практична частина

1 За допомогою визначених інтегралів обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

1. а) $y = 1 - x^2;\ \ y = x^2 - 7.$ б) $y = x^2;\ \ y = x + 6$
2. а) $y = x^2 + 4x;\ \ y = x + 4.$ б) $y = x^3;\ \ x = 0;\ \ y = 8$
3. а) $y = -x^2 + 9;\ \ y = 2x + 1.$ б) $x = 0;\ \ y = 0;\ \ x + y = 1.$
4. а) $y = x^2;\ \ y = 2 - x^2.$ б) $y = x^3;\ \ y = 0;\ \ x = 2$
5. а) $y = x^2;\ \ y = 2 - x.$ б) $y = -x^2;\ \ y = 5x^2 - 6.$
6. а) $y = -x^2;\ \ x + y + 2 = 0.$ б) $y = 1 - x^2;\ \ y = x^2 - 7.$
7. а) $y = x^2 - 1;\ \ 2x + y - 2 = 0.$ б) $y = x^2;\ \ y = 2 - x^2.$
8. а) $y = x^2;\ \ y = 8 - x^2.$ б) $x = 0;\ \ y = 0;\ \ x + y = 1.$
9. а) $y = -x^2;\ \ y = 5x^2 - 6.$ б) $y = x^3;\ \ x = 0;\ \ y = 8$
10. а) $y = x^2;\ \ y = x + 2.$ б) $y = x^2;\ \ y = x + 6$