Екстремум функції багатьох змінних.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Розв'язання. Згідно з необхідною умовою існування екстремуму знайдемо стаціонарні точки

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2xy = 4; \end{cases}$$

$(x+y)^2 = 9,\ |x+y| = 3,\ x+y = \pm 3$. Одержуємо чотири стаціонарні точки: $M_1(1;2)$, $M_2(2;1)$, $M_3(-1;-2)$, $M_4(-2;-1)$. У кожній точці перевіримо виконання достатньої умови, тобто перевіримо знак другого диференціала.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x;$$

$$d^2 z = 6xdx^2 + 2 \cdot 6ydydx + 6xdy^2.$$

1) У точці M_1:

$$a_{11} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 6,\ a_{12} = \left.\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\right|_{M_1} = 12,\ a_{22} = \left.\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right|_{M_1} = 6,$$

$\Delta_1 = a_{11} = 6 > 0;\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36 - 144 < 0$. Екстремуму немає.

2) У точці M_2: $a_{11} = 12,\ a_{12} = 6,\ a_{22} = 12,$

$\Delta_1 = a_{11} = 12 > 0; \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 144 - 36 > 0 \Rightarrow$ у точці M_2 мінімум і $z_{\min}(M_2) = z_{\min}(2;1) = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$;

3) У точці M_3: $a_{11} = -6,\ a_{12} = -12,\ a_{22} = -6,$

$\Delta_1 = a_{11} = -6 < 0;\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36 - 144 < 0$. Екстремуму немає.

4) У точці M_4: $a_{11} = -12,\ a_{12} = -6,\ a_{22} = -12,$

$\Delta_1 = a_{11} = -12 < 0;\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 144 - 36 > 0 \Rightarrow$ у точці M_4 максимум і $z_{\max}(M_4) = z_{\max}(-2;-1) = -8 - 6 + 30 + 12 = 28.$

Розв'язання задач зручно оформляти у вигляді таблиці:

Точки	$M_1(1;2)$	$M_2(2;1)$	$M_3(-1;-2)$	$M_4(-2;-1)$
a_{11}	6	12	-6	-12
a_{12}	12	6	-12	-6
a_{22}	6	12	-6	-12
$\Delta_1 = a_{11}$	>0	>0	<0	<0
Δ	<0	>0	<0	>0

Екстр.	немає	min	немає	max
Z		-28		28

Приклад 2. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

Розв'язання. З системи $u'_x = 2x + 2 = 0$; $u'_y = 2y + 4 = 0$; $u'_z = 2z - 6 = 0$ знаходимо єдину стаціонарну точку: $x = -1,\ \ y = 2,\ \ z = 3$. Знайдемо похідні другого порядку:

$u''_{xx} = 2,\ u''_{yy} = 2,\ \ u''_{zz} = 2,\ u''_{xy} = 0,\ u''_{xz} = 0,\ \ u''_{yz} = 0.$ Звідси

$$u_{xx}'' = 2 > 0,\ \begin{vmatrix} u_{xx}'' & u_{xy}'' \\ u_{yx}'' & u_{yy}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ \begin{vmatrix} u_{xx}'' & u_{xy}'' & u_{xz}'' \\ u_{yx}'' & u_{yy}'' & u_{yz}'' \\ u_{zx}'' & u_{zy}'' & u_{zz}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Отже, другий диференціал, відповідно до критерію Сильвестра, є додатною квадратичною формою. Тому в точці $M_0(-1,\ -2,\ 3)$ функція має мінімум $(u_{\min} = -14)$.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію: $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Розв'язання

1) Функція визначена для всіх $x \in R$ і $y \in R$.

2) $z_x' = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\qquad z_y' = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Легко переконатися, що ця функція не має стаціонарних точок. Але в точці $M_0(0,0)$ частинні похідні першого порядку не існують, тому що відношення

$$\frac{z(\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \qquad \frac{z(0, \Delta y) - z(0,0)}{\Delta y} = \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

не мають границі. Тому точка $M_0(0,0)$ є точкою можливого екстремуму. З того, що приріст $z(x,y) - z(0,0) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ від'ємний всюди, у тому числі й в околі точки M_0, робимо висновок, що в цій точці функція має максимум, причому $z_{\max} = 1$.

Приклад 4. Дослідити на локальний екстремум функцію:

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Розв'язання

1) Функція визначена при $-\infty < x < \infty,\quad -\infty < y < \infty$.

2) Знайдемо частинні похідні:

$$z'_x = 4x^3 - 2x - 2y, \quad z'_y = 4y^3 - 2x - 2y.$$

Стаціонарні точки знайдемо з системи:

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

Вона має три розв'язки: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = -1$, $y_2 = -1$, $x_3 = 1$, $y_3 = 1$.

Точки $M_1(0, 0)$, $M_2(-1,-1)$, $M_3(1,1)$ – стаціонарні точки.

3) Для перевірки достатніх умов локального екстремуму обчислимо похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = a_{11} = 12x^2 - 2, \quad a_{12} = z''_{xy} = -2, \quad a_{22} = z''_{yy} = 12y^2 - 2.$$

Утворимо вираз:

$$\Delta(x,y) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \left(12x^2 - 2\right)\left(12x^2 - 2\right) - 4.$$

Оскільки $\Delta(0,0) = 0$, то для з'ясування питання про існування екстремуму необхідні додаткові дослідження. Розглянемо приріст функції z у точці $M_1(0, 0)$:

$$\Delta z(0,0) = z(h,k) - z(0,0).$$

Розглянемо два із усіх можливих випадків змін k і h.

Якщо $k=h$, де $0<h<\sqrt{2}$, то $\Delta z(0,0) = 2h^2\left(h^2 - 2\right) < 0$.

Якщо $k=-h$, де $h > 0$, то $\Delta z(0,0) = 2h^4 > 0$.

Отже, приріст $\Delta z(0,0)$ набуває значень різних знаків у цих випадках, тому екстремуму в точці $M_1(0,0)$ немає.

У точках M_2 $(-1, -1)$, M_3 $(1, 1)$ $\Delta = 96 > 0$, а оскільки $a_{11} = 10 > 0$, то в цих точках функція досягає мінімуму, причому $z_{\min} = -2$.

Умовний екстремум.

Приклад 1. Дослідити на умовний екстремум функцію $u=xyz$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа

$$F(x,y,z;\ \lambda) = xyz + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 3\right)$$

і випишемо систему

$$\begin{cases} F'_x = yz + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = xz + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = xy + 2\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Із цієї системи знаходимо вісім стаціонарних точок:
$M_1(1,\ 1,\ 1)$, $M_2(1,\ -1,\ -1)$, $M_3(-1,\ 1,\ -1)$, $M_4(-1,\ -1,\ 1)$ для $\lambda = -1/2$ і

$M_5(-1,\ -1,\ -1)$, $M_6(-1,\ 1,\ 1)$, $M_7(1,\ -1,\ 1)$, $M_8(1,\ 1,\ -1)$ для $\lambda = 1/2$.

Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа:

$$d^2F = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz. \qquad (9.11)$$

Для $\lambda_1 = -1/2$ і точки M_1 маємо

$$d^2F\left(M_1, \lambda_1\right) = -\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + 2dxdy + 2dxdz + 2dydz.$$

Замінюючи в останній сумі dz його значенням, знайденим з рівняння зв'язку в точці M_1: $dz = -\left(dy + dx\right)$, маємо

$$d^2\Phi\left(M_1\right) = -\left(dx - dy\right)^2 - \left(dx + dy\right)^2 - 2\left(dx + dy\right)^2 < 0,$$

звідки отримуємо, що в точці M_1 функція $u=xyz$ має умовний максимум.

Для $\lambda_1 = -1/2$ і точки M_2 з (9.11) маємо

$$d^2F\left(M_2, \lambda_1\right) = -\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) - 2dxdy - 2dxdz + 2dydz.$$

Рівняння зв'язку: $dx = dy + dz$ і, отже,

$$d^2\Phi\left(M_2\right) = -\left(dy + dz\right)^2 - dy^2 - dz^2 - 2\left(dy + dz\right)dy - 2\left(dy + dz\right)dz + 2dydz =$$

$$= -\left(dy + dz\right)^2 - 2\left(dy + dz\right)\left(dy + dz\right) - \left(dy - dz\right)^2 =$$

$$= -3\left(dy + dz\right)^2 - \left(dy - dz\right)^2 < 0.$$

Тому в точці M_2 функція досягає умовного максимуму.

Аналогічно знаходимо, що функція $u= xyz$ має умовний максимум у точках M_3 і M_4: $u_{\max} = 1$.

Для $\lambda_2 = 1/2$ і точки M_5 з (9.11) маємо

$$d^2F\left(M_5, \lambda_2\right) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz\,.$$

Рівняння зв'язку: $dx + dy + dz = 0$, звідки $dz = -\left(dy + dx\right)$ і

$$d^2\Phi\left(dx,\ \ dy\right) = dx^2 + dy^2 + \left(dx + dy\right)^2 - 2dxdy + 2dx\left(dx + dy\right) + 2dy\left(dx + dy\right) =$$

$$= 3\left(dx + dy\right)^2 + \left(dx - dy\right)^2 > 0.$$

Отже, у точці M_5 функція досягає умовного мінімуму: $u_{\min} = -1$.

Легко переконатися, що в точках M_6, M_7, M_8 функція $u=xyz$ також має мінімум, причому $u_{\min} = -1$.

Зауваження. Оскільки функція $u=xyz$ є неперервною на обмеженій замкнутій множині (на сфері) і в стаціонарних точках набуває тільки двох різних значень, то одне з них буде мінімальним, а інше максимальним, тобто перевірка на достатню ознаку екстремуму в цих випадках не обов'язкова.

Відповідно до цього зауваження можна було б відразу визначити, що точки M_1, M_2, , M_3 , M_4 є точками максимуму, а M_5, M_6 , M_7 , M_8 – точками мінімуму.

Приклад 2. Знайти екстремум функції $u= xy + yz$, якщо

$x^2+ y^2=2$, $z+y= 2$ ($x>0$, $y>0$, $z>0$).

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа:

$$F\left(x,\ y,\ z;\ \lambda,\ \mu\right) = xy + yz + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right) + \mu\left(y + z - 2\right)$$

і запишемо систему: $\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0 \quad , \\ F'_y = x + z + 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z = y + \mu = 0 \quad , \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 2 = 0 \ , \\ F'_\mu = y + z - 2 = 0 \quad . \end{cases}$

Знайдемо числа λ, μ і координати стаціонарної точки: $x_0=y_0=z_0=1$, $\lambda = -1/2$, $\mu = -1$.

Запишемо другий диференціал

$$d^2F\left(M_0,\ \lambda,\ \mu\right)=2\lambda\left(dx^2+dy^2\right)+2dxdy+2dydz.$$

При $\lambda=-1/2$ маємо: $d^2F=-\left(dx^2+dy^2\right)+2dxdy+2dydz$.

З рівнянь зв'язку: $\begin{cases}2xdx+2ydy=0\\ dy+dz=0\end{cases}$ у точці M_0 (1,1,1)

$$\begin{cases}2dx+2dy=0\\ dy+dz=0\end{cases}$$

визначаємо, що $dz=-dy,\quad dx=-dy$. Тому

$$d^2\Phi=-dy^2-dy^2-2dy^2-2dy^2=-6dy^2<0.$$

Отже, у точці M_0 (1,1,1) функція u має умовний максимум, причому $u_{\max}=2$.

Примітка 1. Припустимо, треба знайти найбільше і найменше значення функції $u=f\left(M\right)$ в обмеженій замкнутій області *D*. Для цього потрібно знайти всі внутрішні точки можливого екстремуму і значення функції в них. Потім знайти точки можливого умовного екстремуму на границі області *D* і значення функції в них. Порівняти всі знайдені значення. Найбільше (найменше) з усіх значень і буде найбільшим (найменшим) значенням функції в області *D*.

Примітка 2. Деякі задачі геометричного характеру, у яких треба знайти оптимальні значення якихось величин, можна розв’язувати як задачі на умовний екстремум.

Приклад 3. На площині $3x-2z=0$ знайти точку, сума квадратів відстаней якої від двох заданих точок *A*(1, 1, 1) і *B*(2, 3, 4) була б найменшою.

Розв’язання. Нехай *M*(*x*, *y*, *z*) – точка, яку треба знайти. Побудуємо функцію

$$u=\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-1\right)^2+\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2+\left(z-4\right)^2,$$

що визначає суму квадратів відстаней точки *M* від точок *A* і *B*. Після очевидних перетворень одержимо

$$u=2x^2+2y^2+2z^2-6x-8y-10z+32.$$

Далі розв’язуємо задачу на умовний екстремум функції:

$$u = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 8y - 10z + 32, \text{ якщо } 3x - 2z = 0.$$

Складемо функцію Лагранжа

$$F(x,\ y,\ z;\ \lambda) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 8y - 10z + 32 + \lambda(3x - 2z)$$

і запишемо систему

$$\begin{cases} F'_x = 4x - 6 + 3\lambda = 0, \\ F'_y = 4y - 8 = 0 \quad , \\ F'_z = 4z - 10 - 2\lambda = 0, \\ F'_\lambda = 3x - 2z = 0 \quad . \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему, знаходимо $\lambda = -2/13$ і стаціонарну точку $M_0\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$. Оскільки ця точка єдина, вона і є шуканою, що випливає із самого змісту задачі, а отже, достатні умови перевіряти не треба.