## ОДЗ функцій декількох змінних

**Приклад 1.** Знайти область визначення функції $z = \ln\left(4 + 4x - y^2\right)$.

**Розв'язання**. Логарифм визначений тільки при додатних значеннях його аргументу, тому $4 + 4x - y^2 > 0$ або $4 + 4x > y^2$. Ніяких інших обмежень на аргументи *x* і *y* не накладається.

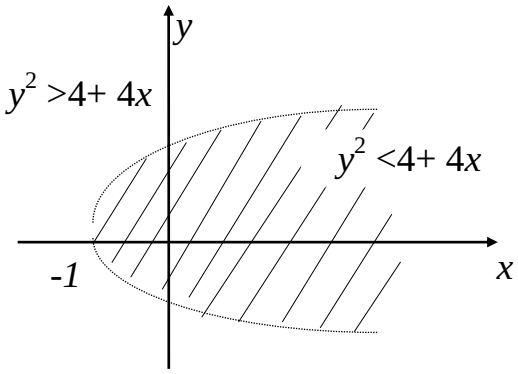


Рис. 9.1

Щоб зобразити геометрично область *D*, знайдемо спочатку її границю $4 + 4x = y^2$ або $y^2 = 4(x+1)$. Отримане рівняння описує параболу (рис. 9.1). Парабола ділить всю площину на дві частини – внутрішню та зовнішню відносно параболи. Для точок однієї з її частин виконується нерівність $y^2 < 4 + 4x$, а для точок з іншої частини $y^2 > 4 + 4x$ (на самій параболі $y^2$=4+4*x*). Щоб встановити, яка з цих двох частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умову $y^2 < 4 + 4x$, досить перевірити цю умову для будь-якої однієї точки, що не лежить на параболі. Наприклад, початок координат *O*(0, 0) лежить усередині параболи й задовольняє потрібну умову $0 < 4 + 4 \cdot 0$. Отже, розглянута область *D* складається із точок, розташованих усередині параболи. Оскільки сама парабола в область *D* не входить, границю області – параболу – на рисунку позначимо пунктиром (рис.9.1).

**Приклад 2.** Знайти область визначення функції трьох змінних

$$u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

**Розв'язання**. Шукана просторова область *V* визначається умовою

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \geq 0 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Її границя $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ є поверхнею еліпсоїда з півосями *a, b, c*.

## Частинні похідні та повний диференціал

**Приклад 1.** *u*= arcsin *y/x*. Знайти $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$.

**Розв'язання**. При обчисленні $\frac{\partial u}{\partial x}$ необхідно пам'ятати, що змінну *y* варто розглядати як сталу величину, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2/x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Аналогічно при знаходженні $\frac{\partial u}{\partial y}$ аргумент $x$ варто розглядати як константу, тоді $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2/x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

**Приклад 2.** Знайти повний диференціал функції $u=\ln(z+\sqrt{x^2+y^2})$.

**Розв'язання**. Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{(z+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{(z+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{z+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

За формулою (9.1) маємо

$$du=\frac{x}{(z+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{(z+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}}dy+$$

$$+\frac{1}{z+\sqrt{x^2+y^2}}dz=\frac{xdx+ydy+\sqrt{x^2+y^2}dz}{(z+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}}.$$

**Приклад 3.** Обчислити приблизно $(0{,}98)^{3{,}03}$.

**Розв'язання**. Шукане число можна розглядати як значення функції $z=x^y$ при $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, де $x_0=1$, $y_0=3$, $\Delta x=-0{,}02$, $\Delta y=0{,}03$.

$$z(1,3)=1^3=1;\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,3)}=yx^{y-1}\Big|_{(1,3)}=3;\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,3)}=x^y\ln x\Big|_{(1,3)}=0.$$

За формулою (9.3) маємо $(0.98)^{3.03}\approx 1+3\cdot(-0.02)=0{,}94$.