Практика 07.05.2020.
Зведення КФ до канонічного вигляду через ортогональне перетворення.

(Дополнительно см. примеры 10, 15,16
http://mathprofi.ru/metod_ortogonalnogo_preobrazovaniya_kf.html)

Пример 1.

Привести квадратичную форму $f=13x_1^2+18x_1x_2+37x_2^2$ к каноническому виду методом ортогонального преобразования.

Решение*:* запишем матрицу формы $A=\begin{pmatrix}13 & 9\\ 9 & 37\end{pmatrix}$ и найдём её собственные числа:

$$\begin{vmatrix}13-\lambda & 9\\ 9 & 37-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(13-\lambda)(37-\lambda)-81=0$$

$$\lambda^2-50\lambda+481-81=0$$

$$\lambda^2-50\lambda+400=0$$

Решим квадратное уравнение*:*

$$D=2500-1600=900 \quad \sqrt{D}=30$$

$$\lambda_1=\frac{50-30}{2}=10,\ \lambda_2=\frac{50+30}{2}=40$$ – <u>собственные числа</u>,

таким образом*:*

$$\underline{f=10y_1^2+40y_2^2}$$ *– квадратичная форма в каноническом виде.*

Найдём <u>собственные векторы</u>, их длины и при необходимости выполним нормирование:

1) Если $\lambda=\lambda_1=10$ *, то:*

$$\begin{cases}3\alpha+9\beta=0\\ 9\alpha+27\beta=0\end{cases} \Rightarrow \alpha=-3\beta$$ *, пусть* $\beta=-1 \Rightarrow \alpha=3$

Таким образом: $\bar{u}_1=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$

$$|\bar{u}_1|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}\neq 1.$$

Разделим каждую координату на длину: $\bar{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}}\\ -\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$

2) Если $\lambda=\lambda_2=40$ *, то:*

$$\begin{cases}-27\alpha+9\beta=0\\ 9\alpha-3\beta=0\end{cases} \Rightarrow \beta=3\alpha$$ *, пусть* $\alpha=1 \Rightarrow \beta=3$

Таким образом: $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$|\bar{u}_2| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица линейного преобразования:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

<u>Проверка.</u>

1 сп. *Выполним проверку прямой подстановкой*

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} y_2$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}} y_2 \qquad \text{в} \qquad f = 13x_1^2 + 18x_1x_2 + 37x_2^2:$$

$$13\left(\frac{3}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} y_2\right)^2 + 18\left(\frac{3}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} y_2\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}} y_2\right) + 37 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{10}} y_1\right)^2 =$$

$$= 13\left(\frac{9}{10} y_1^2 + \frac{6}{10} y_1 y_2 + \frac{1}{10} y_2^2\right) + 18\left(-\frac{3}{10} y_1^2 + \frac{8}{10} y_1 y_2 + \frac{3}{10} y_2^2\right) + 37 \cdot \left(\frac{9}{10} y_2^2 - \frac{6}{10} y_1 y_2 + \frac{1}{10} y_1^2\right) =$$

$$= \frac{117}{10} y_1^2 + \frac{78}{10} y_1 y_2 + \frac{13}{10} y_2^2 - \frac{54}{10} y_1^2 + \frac{144}{10} y_1 y_2 + \frac{54}{10} y_2^2 + \frac{333}{10} y_2^2 - \frac{222}{10} y_1 y_2 + \frac{37}{10} y_1^2 =$$

$$= \frac{117 - 54 + 37}{10} y_1^2 + \frac{78 + 144 - 222}{10} y_1 y_2 + \frac{13 + 54 + 333}{10} y_2^2 =$$

$$= \frac{100}{10} y_1^2 + \frac{0}{10} y_1 y_2 + \frac{400}{10} y_2^2 = 10y_1^2 + 40y_2^2$$

, что и требовалось проверить.

2 сп. *Выполним умножение матриц*

$$\boxed{A_e = P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}}$$

Ответ: $f = 10y_1^2 + 40y_2^2$, $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

<u>Пример 2.</u> Квадратичную форму $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ привести к каноническому виду.

<u>Решение.</u> Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & - & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определяем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -3$.

Таким образом, канонический вид квадратичной формы следующий:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

Найдем ортогональное преобразование, осуществляющее приведение $f(\bar{x})$ к каноническому виду.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям:

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ соответствуют одному и тому же собственному значению $\lambda = 1$. Легко заметить, что между собой они не ортогональны. Необходимо провести процедуру ортогонализации и нормировки (обезнаменивания) собственных векторов.

Преобразуя данную систему векторов в ортонормированную систему, получим

$$t_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, t_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Данная система векторов определяет ортогональную матрицу $T = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \bar{t}_4)$ преобразования переменных x_i в переменные y_i.

Поэтому

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2),$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - x_2 + 2x_3),$$

$$y_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

$$y_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$$