ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай точка $P_0(x_0, y_0)$ називається точкою максимуму (мінімуму) функції $z = f(x, y)$, якщо існує окіл точки $P_0(x_0, y_0)$ такий, що для будь-якої точки (x, y) із цього околу виконується нерівність $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$).

Оскільки екстремум функції $z = f(x, y)$ визначається лише в малому околі точки $P_0(x_0, y_0)$, то його називають **локальним**.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ необхідні і достатні умови мають наступний вигляд.

Теорема (необхідні умови): якщо функція $z = f(x, y)$ має екстремум у точці $P_0(x_0, y_0)$, то в цій точці частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, або не існують.

Тобто, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (або не існує), $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (або не існує).

Точки, в яких частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, або не існують, називаються стаціонарними точками функції $z = f(x, y)$.

Теорема (достатні умови): нехай в деякому околі точки $P_0(x_0, y_0)$ функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до третього порядку включно і нехай, крім того, точка $P_0(x_0, y_0)$ є стаціонарною точкою функції $f(x, y)$ і $A = \frac{\partial^2 z(P_0)}{\partial x^2}$; $B = \frac{\partial^2 z(P_0)}{\partial x \partial y}$; $C = \frac{\partial^2 z(P_0)}{\partial y^2}$. Тоді в точці $P_0(x_0, y_0)$:

1) $f(x, y)$ має максимум, якщо $AC - B^2 > 0$ ($A < 0$ або $C < 0$);

2) $f(x, y)$ має мінімум, якщо $AC - B^2 > 0$ ($A > 0$ або $C > 0$);

3) екстремум відсутній, якщо $AC - B^2 < 0$;

4) екстремум може бути, а може і не бути, якщо $AC - B^2 = 0$ (в цьому випадку потрібні подальші дослідження).

Приклад . Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Розв'язання. Область визначення функції – всі дійсні значення змінних x та y, тобто $\begin{Bmatrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{Bmatrix}$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку і складемо систему рівнянь:

$$y=\frac{2}{x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=6xy-12,\quad \begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ xy-2=0 \end{cases},\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}.$$

Розв'яжемо систему і знайдемо стаціонарні точки:

$$x^2+\frac{4}{x^2}-5=0,\quad x^4-5x^2+4=0,\quad x_1^2=4,\quad x_2^2=1.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x.$$

$$M_1(2,1),\quad M_2(-2,-1),\quad M_3(1,2),\quad M_4(-1,-2).$$

Знайдемо $AC-B^2=36x^2-36y^2$.

Тепер для кожної стаціонарної точки будемо знаходити знак $AC-B^2$:

– для точки $M_1(2,1)$: $AC-B^2=36\cdot 2^2-36\cdot 1>0$. В цій точці екстремум є. Розглянемо знак A (або C). $A=6x=6\cdot 2=12>0$, тому в точці M_1 маємо мінімум, який дорівнює $z_{\min}(2,1)=-28$;

– для точки $M_2(-2,-1)$: $AC-B^2>0$ $(A<0)$. Отже, в т. M_2 маємо максимум, який дорівнює $z_{\max}(2,1)=+28$;

– для точки $M_3(1,2)$: $AC-B^2<0$ екстремуму немає;

– для точки $M_4(-1,-2)$: $AC-B^2<0$ екстремуму немає.

Приклад . Знайти екстремуми функції

$$z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right).$$

Якщо диференційована функція $z=f(x,y)$ досягає екстремуму у точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$, то її частинні похідні першого порядку у цій точці дорівнюють нулю (необхідна умова екстремуму):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M=0;\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M=0.$$

Точки, у яких частинні похідні дорівнюють нулю одночасно, називають *стаціонарними точками.* Нехай M_0– стаціонарна точка функції $z=f(x,y)$. Складемо визначник другого порядку з частинних похідних другого порядку функції $z=f(x,y)$, що обчислені у стаціонарній точці M_0.

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{M_0}.$$

Якщо Δ<0, то екстремуму у цій точці немає; Δ=0, то нічого сказати не можна, потрібне додаткове дослідження; Δ>0, то екстремум є, при чому: якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ або $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$, то це мінімум; якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$ або $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$, то це максимум (достатня умова екстремуму).

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}.$$

За необхідною умовою екстремуму стаціонарні точки знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases}-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}=0;\\ -\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}=0.\end{cases} \text{або} \begin{cases}8x+y=188;\\ x+6y=141.\end{cases}$$

звідки x=21; y=20, тобто стаціонарна точка $M_0(21;20)$.

Знайдемо значення других похідних у точці M:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2}{3};\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{1}{2};\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{12}.$$

Складемо визначник $\Delta\big|_M=\begin{vmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}-\frac{1}{144}>0.$

Згідно з достатньою умовою екстремуму екстремум у точці $M_0(20;21)$ є, при чому це максимум, оскільки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0;\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0;\quad z_{max}=282.$$

Приклад . Дослідити на екстремум функцію:

$$f(x,y)=x^3+y^3-6x-9y+7,$$

$$f'_x(x,y)=3x^2-6,\qquad f'_y(x,y)=3y^2-9.$$

Умови (1.26) дадуть систему

$$\begin{cases}3x^2-6=0\\ 3y^2-9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=2\\ y^2=3\end{cases}\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2},\quad y=\pm\sqrt{3}.$$

Отже функція має чотири точки підозрілі на екстремум

$$A_1(\sqrt{2};\sqrt{3}),\quad A_2(-\sqrt{2};-\sqrt{3}),\quad A_3(-\sqrt{2};\sqrt{3}),\quad A_4(\sqrt{2};-\sqrt{3}).$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$f''_{xx}(x,y)=6x,\quad f''_{xy}(x,y)=0,\quad f''_{yy}(x,y)=6y.$$

Обчислимо Δ в кожній з точок A_i, $i=1,2,3,4$.

$$\Delta(\sqrt{2};\sqrt{3})=36\sqrt{2}\sqrt{3}>0,\qquad \Delta(-\sqrt{2};-\sqrt{3})=36\sqrt{6}>0$$

$$\Delta(-\sqrt{2};\sqrt{3})=-36\sqrt{6}<0,\qquad \Delta(\sqrt{2};-\sqrt{3})=36\sqrt{6}<0.$$

Таким чином, A_1 та A_2 – точки екстремуму функції. Оскільки

$$f''_{xx}(\sqrt{2};\sqrt{3}) = 6\sqrt{2} > 0, \text{ а } f''_{xx}(-\sqrt{2},-\sqrt{3}) = -6\sqrt{2} < 0,$$

то A_1 – точка мінімуму, а A_2 – точка максимуму функції. Обчислимо значення функції в точках екстремуму

$$f_{\min}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = -9{,}049; \qquad f_{\max}(-\sqrt{2},-\sqrt{3}) = 23{,}049.$$

<u>Приклад</u> Знайти екстремум функції $z = 3x^2y - x^3 - y^4$

$Z'_x = 6xy - 3x^2$; $Z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Точки, в яких похідні не існують відсутні. Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \ (1) \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \ (2) \end{cases} \Rightarrow (1) + (2) \Rightarrow 6xy - 4y^3 = 0$$

$$2y(3x - 2y^2) = 0$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$x = \frac{2}{3}y^2$, підставимо в (2) $\Rightarrow$ $6 * \frac{2}{3}y^3 - 3\frac{4}{9}y^4 = 0$

$$4y^3 - \frac{4}{3}y^4 = 0$$

$$4y^3\left(1 - \frac{y}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, \ y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3} * 9 = 6$$

Таким чином $M_1(6; 3)$, $M_2(0; 0)$.

1) у т. $M_1(6;\ 3)$ маємо: $A = Z''_{xx}(6;\ 3) = (6y - 6x)_{M_1} = 18 - 36 = -18$

$B = Z''_{xy} = (6x)_{M_1} = 6 * 6 = 36$; $C = Z''_{yy}(6;\ 3) = (-12y^2)_{M_1} = -12 * 3^2 = -108$. Тоді

$$\Delta = AC - B^2 = -18(-108) - 36^2 = 648 > 0 \quad \Rightarrow$$

Екстремум існує, $A < 0 \ \Rightarrow \ max$.

$$Z_{max}\ (6; 3) = 27$$

У т. M_2 (0; 0) : $A = 0;\ B=0;\ C=0 \Rightarrow \Delta = 0$

Проведемо додаткові дослідження.

Z (0; 0) = 0

Можемо помітити, що при x = 0, y ≠ 0, $z = -y^4 < 0$ і $y > 0$. При $x < 0,\ y = 0,$ $z = -x^3 > 0$ Отже в околі точки $M_2(0;\ 0)$ функція приймає як від'ємні, так і додатні значення і екстремуму не має.

Відповідь: $Z_{max}(6;\ 3) = 27.$

Питання на самоперевірку

1. 1. Сформулювати необхідні умови існування екстремуму функції $z=f(x,y)$.
2. Сформулювати достатні умови існування екстремуму функції $z=f(x,y)$.
3. Що називають стаціонарними точками функції $z=f(x,y)$?
4. Коли функція $z=f(x,y)$ має екстремум?

ЗАВДАННЯ

Дослідити на екстремум функцію двох змінних.

$z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$.

$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

$z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$.

$z = x^2 + (y^2 - 1)$.

$z = (x-1)^2 + 4y^2$.

$z = x^3 + y^2 - 3xy$.

$z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 8$.