НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення. Функція $z = f(x, y)$, неперервна в обмеженій замкненій області D, обов'язково має в цій області найбільше і найменше значення.

Цих значень функція досягає або в стаціонарних точках (які знаходяться в середині D), або в точках, які належать межі області D.

Тому, щоб знайти найбільше і найменше значення функції в області D, потрібно:

1) знайти стаціонарні точки, які розташовані всередині області і обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше і найменше значення функції на лініях, які утворюють межу області (на цих лініях функція двох змінних перетворюється у функцію однієї змінної);

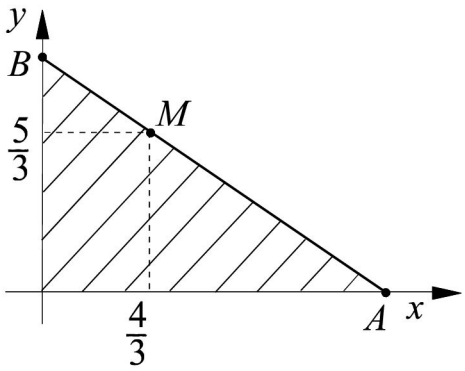
3) із усіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше.

Зауваження. Найбільше (найменше) значення можуть бути не єдиними.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy - x - 2y$ у замкненій області, яка обмежена лініями: $x + 2y - 6 \le 0,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0.$

Розв'язання.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 2y - x - 2 = 0 \end{cases}; \qquad x = \frac{4}{3}; \qquad y = \frac{5}{3}.$$



Знайдемо стаціонарні точки (див. рис.). Таким чином, єдина стаціонарна точка $M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ належить області D і значення функції в цій точці $z(M_1) = z\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = -\frac{7}{3}$. Проведемо дослідження функції на межах області. Розглянемо межу AB. Її рівняння $x + 2y - 6 = 0$ зв'язує між собою змінні x і y. Визначимо з цього рівняння одну змінну через другу, наприклад $x = 6 - 2y$, і підставимо у вираз функції z:

$$z = (6 - 2y)^2 + y^2 - (6 - 2y)y - (6 - 2y) - 2y = 7y^2 - 30y + 30.$$

Таким чином, ми одержали функцію однієї змінної $z(y) = 7y^2 - 30y + 30$, де y змінюється на відрізку [0,3]. Далі шукаємо найбільше і найменше значення функції $z(y)$ на [0,3], які і будуть найбільшим і найменшим значенням функції $z = f(x, y)$ на межі AB. Знаходимо стаціонарні точки функції $z(y)$:

$$z(y) = 14y - 30, \qquad 14y - 30 = 0, \qquad y = \frac{15}{7}.$$

Ця точка розташована всередині відрізку [0,3], тому знайдемо значення функції $z(y)$ в цій точці і на кінцях цього відрізка, якщо:

а) $y = 0,$ то $x = 6,$ $\qquad z(M_2) = z(6,0) = 30$;

б) $y = 3,$ то $x = 0,$ $\qquad z(M_3) = z(0,3) = -4$;

в) $y = \frac{15}{7},$ то $x = \frac{12}{7},$ $\qquad z(M_4) = z\left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right) = -\frac{15}{7}$.

Всі ці обчислення проводились за умови $x = 6 - 2y$,тому на цій межі маємо:

$$z\left(\frac{15}{7}\right) = 7 \cdot \left(\frac{15}{7}\right)^2 - 30 \cdot \frac{15}{7} + 30 = -\frac{15}{7}; \qquad z(0) = 30; \qquad z(3) = -4 .$$

Розглянемо межу OA; її рівняння $y = 0$. В цьому випадку функція $z = f(x, y)$ буде мати вигляд $z = x^2 - x,\ 0 \le x \le 6$ (ми знов одержали функцію однієї змінної).

Знайдемо найбільше і найменше значення цієї функції на відрізку [0,6], $z'(x) = 2x - 1;\ 2x - 1 = 0;\ x = \frac{1}{2}.$

Ця стаціонарна точка належить відрізку [0,6], тому знаходимо:

$$z\left(\frac{1}{2}\right), \quad z(0) \quad \text{і} \quad z(6),$$

$$z\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}; \quad z(0) = 0, \quad z(6) = 30 .$$

Всі ці обчислення проводились за умови $y = 0$, тому як і в попередньому випадку, якщо:

– $x = 0$, то $z(M_5) = z(0,0) = 0$;

– $x = \frac{1}{2}$, то $z(M_6) = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$.

Значення $z(6,0) = 30$ не враховуємо, тому що на межі AB точка з такими координатами вже була (точка M_2).

Нарешті розглянемо межу OB: $x = 0,\quad z(y) = y^2 - 2y,\quad 0 \le y \le 3,\quad z'(y) = 2y - 2,$ $2y - 2 = 0,\ y = 1$ (стаціонарна точка належить відрізку [0,3]).

Перш ніж находити значення функції на кінцях відрізка і в стаціонарній точці, відзначимо, що значення $z(0)$ і $z(3)$ можна не враховувати, тому що $z(0)$ за умови $x = 0$, це $z(0,0) = z(M_5)$, а $z(3)$ за умови $x = 0$ це $z(0,3) = z(M_3)$.Тому знайдемо тільки $z(1) = -1$ або $z(M_7) = z(0,1) = -1$.

Із знайдених значень функції вибираємо найбільше і найменше значення:

$$z(M_1) = z\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = -\frac{7}{3}; \qquad z(M_2) = z(A) = z(6,0) = 30;$$

$$z(M_3) = z(B) = z(0,3) = -4; \qquad z(M_4) = z\left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right) = -\frac{15}{7};$$

$$z(M_5) = z(0,0) = 0; \qquad z(M_6) = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}; \qquad z(M_7) = z(0,1) = -1.$$

Найбільше значення буде в точці M_2 (тобто в точці A): $z(6,0) = 30$.

Найменше – в точці M_1: $z\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = -\frac{7}{3}.$

Приклад Знайти найбільше і найменше значення функції

$Z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкнутій області, що обмежена лініями $y = \frac{1}{x}$; $x = 1; x = 2$; $y = -1.5$.

$Z'_x = 2xy + y^2 + y$;

$Z'_y = x^2 + 2xy + x$;

Знайдемо критичні точки:

$$\begin{cases} y(2x + y + 1) = 0 \\ x(x + 2y + 1) = 0 \end{cases}$$

Розв'язком системи є точки m(0; 0) ;

$(-1; 0), (0; -1); \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) -$ всі вони не належать $\overline{D}$.

2. Дослідимо функцію на границях області, яка складається із ділянок *AB, BC, CD,* і *DA.*

   На AB: $x = 1$, $z = y + y^2 + y = y^2 + 2y$, $y \in [-1.5; 1]$

   $Z'_y = 2y + 2 = 0 \Rightarrow 2(y + 1) = 0 \Rightarrow y = -1$ Знайдемо $Z(-1) = 1 - 2 = -1$

   $Z\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3 = \frac{9 - 12}{4} = -\frac{3}{4}$; $Z(1) = 3$.

   Пишемо: $Z(1; -1) = -1$ $Z\left(1; -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$; $Z(1; 1) = 3$

   на ділянці BC: $y = \frac{1}{x}$, $z = x + \frac{1}{x} + 1$, $x \in [1; 2]$

   $Z'_x = 1 - \frac{1}{x^2}$; $1 - \frac{1}{x^2} = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1 \notin [1; 2]$

   $Z(1) = 3$; $Z(2) = 3.5$

$Z(1;\ 1) = 3 \qquad Z(2; \frac{1}{2}) = 3.5$

На ділянці CE: $x = 2,\ z = 2y^2 + 6y,\ y \in \left[-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right]$

$Z'_y = 4_y + 6 = 0,\ \ y = -\frac{3}{2};\ \ z = \left(-\frac{3}{2}\right) = -4.5;\ \ Z\left[\right.$

$= 3.5$

$$Z\left(2; -\frac{3}{2}\right) = -4.5; \quad Z\left(2;\ \frac{1}{2}\right) = 3.5$$

На ділянці AE: $y = \frac{3}{2};\ \ z = -\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4}x\ ,\ \ x \in [1; 2]$

$$Z'_x = -3x + \frac{3}{4} = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{4} \ \notin [1; 2]$$

$$Z(1) = -\frac{3}{4};\ \ Z(2) = -4.5 \ \Rightarrow\ Z\left(1;\ -\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{4} \quad Z\left(2;\ -\frac{3}{2}\right) = -4.5$$

Порівнявши знайдені результати маємо:

$$M = +3.5 = Z_{\text{найб}}\left(2;\ \frac{1}{2}\right) = Z(C)$$

$$m = -4.5 = Z_{\text{найм}}\left(2;\ -\frac{3}{2}\right) = Z(E)$$