Теорема (Арифметичні дії над неперервними функціями**).** Нехай $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0. Тоді їх сума, різниця, добуток і частка (за умови, що знаменник не дорівнює нулю) теж неперервні в точці x_0, тобто

$f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$ неперервні в точці x_0.

Доведення. Оскільки за означенням неперервні в точці x_0 функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границі, що дорівнюють $f(x_0)$ і $g(x_0)$, то за властивістю границі суми, різниці, добутку та частки, границі функцій (3.1.) існують і відповідно дорівнюють $f(x_0)+g(x_0)$, $f(x_0)-g(x_0)$, $f(x_0)\cdot g(x_0)$, $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$, $g(x_0)\neq 0$. Але ці величини дорівнюють значенням відповідних функцій. Отже функції (3.1.) за першим означенням неперервності є непреревними в точці x_0. Що й треба було довести.

Теорема. (*про неперервність складної функції*). Якщо функція $u=\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y=f(u)$ неперервна в точці $u_0=f(x_0)$, то складна функція $y=f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.

Доведення. Для доведення теореми досить встановити, що

$\lim\limits_{x\to x_0} f(\phi(x)) = f(\phi(x_0))$. Оскільки функція $u=\varphi(x)$ за умовою неперервна в точці x_0, то

$\lim\limits_{x\to x_0} \phi(x) = \phi(x_0) = u_0$, тобто при $x\to x_0$ значення функції $u\to u_0$. Тому внаслідок неперервності функції $y=f(u)$ маємо:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(\phi(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\phi(x_0))$. Що й треба було довести.

Друга видатна границя

Теорема (друга видатна границя). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Зауваження. Поклавши в $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, $x=\dfrac{1}{y}$, $y\to 0$, отримаємо $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ - теж друга важлива границя.

Наслідками з другої важливої границі є:

Приклади. 4. Нехай $a > 0$, $a \neq 1$. Доведемо, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e,$$

у окремому випадку при $a = e$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1.$$

⌈Застосуємо твердження 2° про границю складної функції, поклавши

$$A = (0, +\infty), \ x_0 = 0; \qquad f(x) = (1 + x)^{1/x}, \quad x > 0;$$

$$p = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e;$$

$$B = (0, +\infty): \ g(y) = \log_a y, \quad y > 0.$$

Оскільки логарифмічна функція неперервна на $(0, +\infty)$, то вона неперервна й у точці $y = e$. Тому згідно з твердженням 2° маємо

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{1/x} = \log_a e. \quad \lrcorner$$

5. Нехай $a > 0$. Доведемо, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

⌈ Нехай $a \neq 1$. Зазначимо, що

$$z := a^x - 1 \to 0 \Leftrightarrow x \to 0$$

і що $x = \log_a (1 + z)$. Тому

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\log_a (1 + z)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

6. Доведемо, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Всі наслідки можна записати у таблицю:

Висновки з І-ої важливої границі**:**	**Висновки з ІІ-ої важливої** границі**:**
1. $\sin x \sim x,\ x \to 0$ 2. $\arcsin x \sim x,\ x \to 0$ 3. $\mathrm{tg} x \sim x,\ x \to 0$ 4. $\mathrm{arctg} x \sim x,\ x \to 0$ 5. $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},\ x \to 0$	6. $e^x - 1 \sim x,\ x \to 0$ 7. $a^x - 1 \sim x \ln a,\ x \to 0$ 8. $\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0$ 9. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a},\ x \to 0$ 10. $(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x,\ x \to 0$ 10*a*. $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n},\ x \to 0$

Приклади.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{3x}-1}{\ln(1+2x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+2x}-1}$$

Розкриття невизначеності $\left\| 1^{\infty} \right\|$ **за формулою**

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} u^v = \left\| 1^{\infty} \right\| = e^{\lim\limits_{x\to x_0} (u-1)v}}$$

Доведення

Приклади

1. $$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}} = \left\|1^{\infty}\right\| = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(\cos 2x-1)\cdot\frac{1}{\sin^2 3x}} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\cos 2x-(1)}{\sin^2 3x}}.$$

Таким чином $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{\sin^2 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x^2}{9x^2} = -\dfrac{2}{9}$.

Остаточно маємо

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}} = \left\|1^{\infty}\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)}{\sin^2 3x}} = e^{-\frac{2}{9}}.$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1}{5x^2-4}\right)^{2x} = \left\|1^{\infty}\right\| = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1}{5x^2-4}-1\right)\cdot 2x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1-5x^2+4}{5x^2-4}\right)\cdot 2x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5\cdot 2x}{5x^2-4}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{5x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}} = e^0 = 1.$$

Класифікація точок розриву

Нехай $f:(a,\ b)\to \mathbf{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, і $x_0 \in (a,\ b)$. Функція f неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли існують границі зліва й справа в точці x_0

$$f(x_0-),\quad f(x_0+) \tag{1}$$

і виконуються рівності

$$f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+). \tag{2}$$

Якщо f у точці x_0 не є неперервною, то точка x_0 є точка розриву функції f.

Означення. Якщо обидві границі в (1) існують (скінченні), але хоча б одна із рівностей (2) порушується, то точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду***. При цьому кажуть, що функція f має в точці x_0 стрибок. Якщо хоча б одна із границь в (1) не існує (в окремому випадку, нескінченна), то точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду***.

Зауваження. Інколи окремо розглядають випадок, коли обидві границі (1) існують і $f(x_0-) = f(x_0+) \neq f(x_0)$. Тоді точку x_0 називають ***точкою усуваного розриву***.

Приклади. 1. Для функції $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbf{R}$ маємо для $x_0 = 0$ $f(0) = 0$, $f(0-) = -1$, $f(0+) = 1$. Точка 0 є точкою розриву першого роду.

2. Для функції $f(x) = \{x\}$, $x \in \mathbf{R}$ кожна з точок множини $\mathbf{Z}$ є точкою розриву першого роду.

3. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

У точці 0 функція f не має границі ні зліва ні справа, тому вона є точкою розриву другого роду.

Зауваження. У випадках, аналогічних прикладу 3, значення в точці x_0 інколи не розглядають. Наприклад, про функцію $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ при цьому кажуть, що вона в точці 0 має розрив другого роду.