**Приклад 1.** Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}.$$

Розв’язання. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Знайдемо спочатку загальний розв’язок відповідного даному рівнянню однорідного рівняння:

$$y'' - y' = 0.$$

Для цього складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 1. \end{array}\right.$$

Для дійсних різних коренів характеристичного рівняння маємо лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння:

$$y_1(x) = e^{0x} = 1, \qquad y_2(x) = e^x.$$

Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння*, згідно з формулою (3.6), має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 + C_2 e^x.$$

2. *Загальний розв'язок неоднорідного рівняння* шукатимемо у вигляді

$$y_{зн} = C_1(x) + C_2(x) e^x, \qquad (*)$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ - невідомі функції, які належить знайти склавши систему (4.8). Оскілки $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^x$ і $y_1'(x) = 0$, $y_2'(x) = e^x$ дістанемо систему, лінійну відносно функцій $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) e^x = 0, \\ C_2'(x) e^x = \dfrac{1}{e^x + 1}, \end{cases}$$

розв'язавши яку, матимемо:

$$C_2'(x) = \frac{1}{e^x (e^x + 1)}, \qquad C_1'(x) = -\frac{1}{e^x + 1},$$

звідки

$$C_1(x) = -\int \frac{1}{e^x + 1} dx = -\int \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} dx = -\int \frac{1 + e^x}{e^x + 1} dx + \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx =$$

$$= -\int dx + \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = -x + \ln\left|e^x + 1\right| + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^x (e^x + 1)} = \int \frac{dx}{e^{2x}(1 + e^{-x})} = \int \frac{e^{-2x} dx}{e^{-x} + 1} = \int \frac{e^{-2x} - 1 + 1}{e^{-x} + 1} dx =$$

$$= \int \left( e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{e^x (e^{-x} + 1)} \right) dx = \int (e^{-x} - 1) dx + \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = -e^{-x} - x + \ln\left|e^x + 1\right| + \overline{C}_2.$$

3. Підставляючи функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у передбачуваний розв'язок $(*)$, знайдемо *загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:*

$$y_{зн} = -x + \ln\left|e^x + 1\right| + \overline{C}_1 + \left(-e^{-x} - x + \ln\left|e^x + 1\right| + \overline{C}_2\right)e^x =$$
$$= \overline{C}_1 + \overline{C}_2 e^x - x + \ln(e^x + 1) - 1 - xe^x + \ln(e^x + 1)e^x =$$
$$= \overline{C}_1 + \overline{C}_2 e^x + (e^x + 1)(\ln(e^x + 1) - x) - 1.$$

**Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

<u>Розв'язання.</u> Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Однорідне рівняння, що відповідає йому

$$y''' + y' = 0$$

має такі корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = \pm i. \end{array}\right.$$

Тобто, фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння утворюють функції $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \sin x$ і *загальний розв'язок однорідного рівняння* має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

2. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y_{зн} = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x. \qquad (*)$$

Складемо систему рівнянь для функцій $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)\cdot 0 - C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0, \\ C_1'(x)\cdot 0 - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \dfrac{1}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Дану систему зручно розв'язувати за формулами Крамера. Головний визначник системи дорівнює:

$$\Delta = W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 1 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\cos x},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ -\cos x & \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

У результаті маємо:

$$C_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + \overline{C}_1;$$

$$C_2'(x) = -\frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = -\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \overline{C}_2;$$

$$C_3'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_3(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} + \overline{C}_3.$$

3. Підставляючи знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ у вираз $(*)$, знаходимо *загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:*

$$y_{зн} = \overline{C}_1 + tgx + \left(\overline{C}_2 + \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cos x + \left(\overline{C}_3 - \frac{1}{\cos x}\right)\sin x =$$

$$= \overline{C}_1 + \overline{C}_2 \cos x + \overline{C}_3 \sin x + tgx + \cos x \cdot \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - tgx =$$

$$= \overline{C}_1 + \overline{C}_2 \cos x + \overline{C}_3 \sin x + \cos x \cdot \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

## Завдання для самостійної роботи

1. **Знайти загальний розв'язок рівняння. Розв'язати, де вказано, задачу Коші:**

**1.1.** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}.$

**1.2.** $y'' + y = ctgx.$

**1.3.** $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}.$

**1.4.** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}.$

**1.5.** $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}.$

**1.6.** $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{xe^x}.$

**1.7.** $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}.$

**1.8.** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}.$

**1.9.** $y'' + y = tgx, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

**1.10.** $y''' + y' = \dfrac{1}{\cos x}.$