Розглянемо випадок лінійних неоднорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами і спеціальним видом правої частини. Якщо права частина рівняння має так називаний спеціальний вигляд, то воно може бути вирішено (крім методу варіації постійних Лагранжа) також методом невизначених коефіцієнтів. Зупинимося на цьому питанні. Укажемо спеціальні види правих частин і відповідні їм окремі розв'язки:

1. $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, (22)

   де $P_m(x)$ — поліном від x ступеня m. Тоді частинний розв'язок $z(x)$ рівняння (21) із правою частиною (22) має вигляд

$$z(x) = x^s e^{\alpha x} Q_m(x),$$

   де число α є коренем кратності s характеристичного рівняння (18), $Q_m(x)$ — поліном від x того ж ступеня m з невизначеними коефіцієнтами.

2. $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$ (23)

   де $P_m(x)$ і $Q_l(x)$ — поліноми від x ступенів m і l відповідно. Тоді частинний розв'язок рівняння (21) варто шукати в такому вигляді:

$$z(x) = x^s e^{\alpha x}(R_q(x)\cos\beta x + T_q(x)\sin\beta x),$$

   де $\alpha + i\beta$ — корінь характеристичного рівняння кратності s, $R_q(x)$ і $T_q(x)$ — поліноми ступеня q з невизначеними коефіцієнтами, $q = \max\{m, l\}$.

Теорема. Якщо $z_k(x)$, $k = \overline{1,l}$ — розв'язки відповідно рівнянь $Ly = f_k(x)$, $k = \overline{1,l}$, то функція $z(x) = z_1(x) + \ldots + z_l(x)$ є розв'язком рівняння

$$Ly = f_1(x) + \ldots + f_l(x).$$

Приклад 1. Указати вид загального розв'язок з невизначеними коефіцієнтами рівняння

$$y^{(5)} + 2y''' + y' = 4x^2 - \sin x + 3x\cos x - e^{-3x}\sin 2x + (3x-2)e^{-4x} + 1 \quad (24)$$

Числових значень коефіцієнтів не знаходити.

Розв'язок. (24) — лінійне неоднорідне рівняння 5-го порядку з постійними коефіцієнтами. Його права частина є сума доданків, кожний з яких має спеціальний вигляд. Відповідне лінійне однорідне рівняння

$$y^{(5)} + 2y''' + y' = 0 \tag{25}$$

має характеристичне рівняння $\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = 0$. Його корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -i$. Отже, загальний розв'язок y_0 рівняння (25) має вигляд:

$$y_0 = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x + c_5 x \cos x.$$

Тому що права частина $f(x) = \sum_{i=1}^{4} f_i(x)$ рівняння (24) – сума доданків спеціального виду, то відповідно до теореми знайдемо частинні розв'язки рівнянь

$$y^{(5)} + 2y''' + y' = f_i(x) \ , \qquad i = \overline{1,4}\,.$$

Отже, $f_1(x) = 4x^2 + 1$ – права частина спеціального вигляду (22), де $\alpha = 0$, $s = 1$, $m = 2$, тобто

$$z_1 = x(A_1 x^2 + B_1 x + D_1).$$

$f_2(x) = -3x\cos x - \sin x$ — права частина спеціального вигляду (23), де $\alpha + i\beta = i$, $s = 2$, $m = 1$, $l = 0$, $q = 1$, отже,

$$z_2(x) = x^2((A_2 x + B_2)\cos x + (D_2 x + E_2)\sin x).$$

Аналогічно, $f_3(x) = -e^{3x}\sin 2x$, $\alpha + i\beta = -3+2i$, $s = 0$, $m = l = 0$, $q = 0$.

Тоді $z_3(x) = e^{-3x}(A_3 \cos 2x + B_3 \sin 2x)$. Далі,

$f_4(x) = (3x-2)e^{-4x}$,$\alpha + i\beta = -4$, $s = 0$, $m = 1$, $q = 0$. Тоді $z_4(x) = e^{-4x}(A_4 x + B_4)$.

Отже, загальний розв'язок рівняння (24) має вигляд $y = y_0 + z(x)$, тобто

$$y = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + c_4 x\sin x + c_5 x\cos x + x(A_1x^2 + B_1x + D_1) +$$
$$+ x^2((A_2x + B_2)\cos x + (D_2x + E_2)\sin x) + e^{-3x}(A_3\cos 2x + B_3\sin 2x) + e^{-4x}(A_4x + B_4),$$

де c_i — довільні постійні, A_i, B_i, D_i, E_i — невизначені коефіцієнти.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y'' - y' - 12y = 7e^{-3x} + (8x + 7)e^{-4x} \tag{26}$$

Розв'язок. Спочатку розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння

$$y'' - y' - 12y = 0.$$

Його характеристичне рівняння $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ має два корені $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд: $y_0 = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}$.

Знайдемо частинний розв'язок рівняння (26). Для цього будемо шукати частинний розв'язок кожного з двох рівнянь

$$y'' - y' - 12y = 7e^{-3x} \tag{27}$$

та

$$y'' - y' - 12y = (8x + 7)e^{-4x} \tag{28}$$

Рівняння (27) має спеціальний вигляд (22), де $\alpha = -3, s = 1, m = 0$. Таким чином, його частинний розв'язок

$$z_1(x) = Axe^{-3x} \tag{29}$$

Підставимо розв'язок (29) у рівняння (27), а для цього будемо користуватись схемою:

$$\begin{array}{r|l} -12 & z_1(x) = Axe^{-3x} \\ -1 & z_1'(x) = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} \\ 1 & z_1''(x) = -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} \end{array}$$

$$-7Ae^{-3x} = 7e^{-3x} \qquad \Rightarrow A = -1$$

Таким чином, $z_1(x) = -xe^{-3x}$.

Рівняння (28) також має спеціальний погляд (22), де $\alpha = -4, s = 0, m = 1$.

Таким чином, воно має частковий розв'язок

$$z_2(x) = (Ax + B)e^{-4x}. \tag{30}$$

Підставляючи (30) у (28), одержуємо :

$$\begin{aligned} &z_2(x) = (Ax + B)e^{-4x} \\ &z_2'(x) = Ae^{-4x} - 4(Ax + B)e^{-4x} \\ &z''_2(x) = -Ae^{-4x} + 16(ax + B)e^{-4x} \\ \hline &8(Ax + B)e^{-4x} - 9Ae^{-4x} = (8x + 7)e^{-4x}, \\ &8(Ax + B) - 9A = 8x + 7. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однаковими ступенями x, одержуємо :

$$\begin{array}{l|l} x^1 & 8A = 8 \qquad \Rightarrow A = 1 \\ x^0 & 8B - 9A = 7 \Rightarrow B = 2 \end{array},$$

звідки $z_2(x) = (x + 2)e^{-4x}$.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (26):

$$y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x} + (x + 2)e^{-4x} - xe^{-3x}.$$

Приклад 3. *Розв'язати рівняння* $y'' + 4y = 6\cos x + 4\sin 2x$.

Розв'язок. Будемо шукати розв'язок відповідного ЛОР:

$$y_0 = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x.$$

Частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y = 6\cos x \quad (\alpha + i\beta, s = 0, m = l = q = 0) \tag{31}$$

треба шукати у вигляді $z_1(x) = A\cos x + B\sin x$. Підставляючи $z_1(x)$ у рівняння (31), одержуємо

$$\begin{array}{r|l} 4 & z_1(x) = A\cos x + B\sin x \\ 0 & z_1'(x) = -A\sin x + B\cos x \\ 1 & z_1''(x) = -A\cos x - B\sin x \end{array}$$

$$3A\cos x + 3B\sin x = 6\cos x$$

Прирівнюючи коефіцієнти за $\cos x$ та $\sin x$, одержуємо: $A = 2$, $B = 0$. Отже, $z_1(x) = 2\cos x$.

Частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y = 4\sin 2x(\alpha + i\beta = 2i, s = 1, m = l = q = 0)$$

треба шукати у вигляді $z_2(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Підставляючи у рівняння, дістаємо:

$$\begin{array}{r|l} 4 & z_2(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ 0 & z_2'(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2ASin2x + 2BCos2x) \\ 1 & z_2''(x) = 4(-A\sin 2x + BCos2x) + x(-4ACos2x - 4B\sin 2x) \end{array}$$

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\sin 2x \quad \Rightarrow A = 1, B = 0, \qquad z_2(x) = -x\cos 2x.$$

Загальний розв'язок початкового рівняння є

$$y = y_0 + z(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 2\cos x - x\cos 2x,$$

де c_1, c_2 – довільні сталі.

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, знайти їх частинні та загальні розв'язки.

1. $y'' - y = x^2 + 1$.
2. $y'' - 3y' + 2y = x^3$.
3. $y'' - 4y' + 4y = xe^x$.
4. $y'' + 4y = \cos x$.
5. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.