Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$– кінці відрізка M_1M_2, а точка $M(x,y,z)$ ділить цей відрізок у відношенні $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$, то координати цієї точки

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ (\lambda\neq -1).$$

Зокрема, якщо $M(x, y,z)$ – середина відрізка M_1M_2, то $\lambda=1$ й

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Приклад 1. Задано точки $A(2;-3;1)$ і $B(12;7;11)$. Знайти точку $M(x,y,z)$, що ділить відрізок BA у відношенні $\frac{BM}{MA}=\frac{1}{3}$.

Розв’язання. Вважаючи точку B початковою точкою відрізка, знаходимо:

$$x=\frac{12+\frac{1}{3}\cdot 2}{\frac{4}{3}}=\frac{19}{2}\ ,\quad y=\frac{7-\frac{3}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{2},\quad z=\frac{11+\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{4}{3}}=\frac{17}{2}.$$

Відповідь: $M\left(\frac{19}{2};\frac{9}{2};\frac{17}{2}\right)$.

Приклад 2. Задано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. За допомогою векторів виразити координати точки M, що ділить відрізок AB навпіл (рис. 2.6).

Розв’язання. Радіуси-вектори точок A і B: $\overrightarrow{OA}=(x_1;y_1;z_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2;y_2;z_2)$. За правилом додавання векторів $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$.

Тому що $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OC}}{2}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ тобто

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

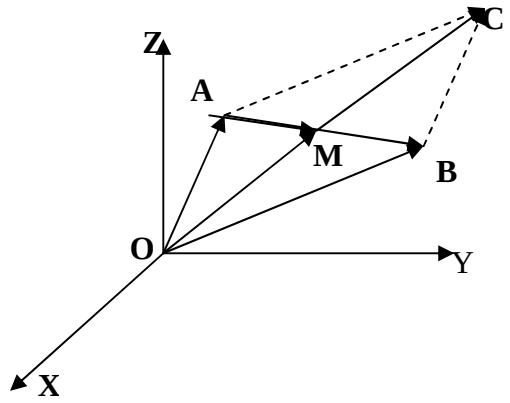

Рис. 2.6.

Приклад. Нехай *A(1; 2; 0), B(3; 1; -2)*. Знайти напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання. Координати вектора $\overrightarrow{AB}$ визначаються так: *x=3-1=2; y=1-2=-1; z=-2-0=-2,*

Тобто вектор $\overrightarrow{AB}=(2;-1;-2)$, його довжина $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3;$ напрямні косинуси: $\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=-\frac{1}{3},\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$

Приклад 1. Задано три точки на площині A(1;2), B(2;2), C(1,5;2,5). Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

Розв'язання. Знаходимо

$$\overrightarrow{AB}=(2-1;2-2)=(1;0),\ \overrightarrow{AC}=(1,5-1;2,5-2)=(0,5;0,5),$$

Тоді:
$$cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\sqrt{1^2+0^2}\cdot\sqrt{0,5^2+0,5^2}}=\frac{0,5}{\sqrt{0,5}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2. Обчислити скалярний добуток.
$(2\vec{m}+3\vec{n})\cdot(4\vec{m}-6\vec{n})$, де $\vec{m}$ й $\vec{n}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Розв'язання.

Знаходимо, використовуючи властивості скалярного добутку.

$$(2\vec{m}+3\vec{n})\cdot(4\vec{m}-6\vec{n})=$$

$$2\cdot4(\vec{m}\vec{m})+3\cdot4(\vec{n}\vec{m})-2\cdot6(\vec{m}\vec{n})-3\cdot6(\vec{n}\vec{n})=8\cdot1+12\cdot0-12\cdot0-18\cdot1=-10,$$

де $(\vec{m},\vec{m})=(\vec{n},\vec{n})=1,(\vec{m},\vec{n})=(\vec{n},\vec{m})=0.$

Приклад 3. При якому значенні α вектори $\vec{a}=(2;-3;4),\vec{b}=(\alpha;-6;8)$ паралельні?

Розв'язання. Вектори паралельні, якщо їхні координати пропорційні, тобто:

$\frac{\alpha}{2}=\frac{-6}{-3}=\frac{8}{4}$. Звідси знаходимо: $\alpha=4$.

Приклад 4.

Дано: $\left|\vec{a}\right|=2,\ \left|\vec{b}\right|=5,(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$. Знайти, при якому значенні α вектори

$\vec{p}=\alpha\vec{a}+17\vec{b}$ і $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні.

Розв'язання.

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{p}\vec{q}=0$. Звідси

$$\vec{p}\vec{q}=(\alpha\vec{a}+17\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})=3\alpha(\vec{a},\vec{a})+17\cdot3(\vec{b},\vec{a})-$$

$$\alpha(\vec{a},\vec{b})-17(\vec{b}\cdot\vec{b})=3\alpha\left|\vec{a}\right|^2+51\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\cos\frac{2\pi}{3}-\alpha\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{2\pi}{3}-17\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$3\alpha\cdot4+(51-\alpha)\cdot10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-17\cdot25=0\Rightarrow\alpha=40.$$

Приклад 5. Вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ утворюють кут 120^0, $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5$. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Розв'язання.

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}=\sqrt{|\vec{a}|^2-2(\vec{a},\vec{b})+|\vec{b}|^2}=$$

$$\sqrt{|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^0+|\vec{b}|^2}=\sqrt{9-2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+25}=\sqrt{9+15+25}=\sqrt{49}=7.$$

Приклад 6. При якому значенні α вектори $\vec{a}=(1;\alpha;-2)$ й $\vec{b}=(\alpha;3;-4)$ перпендикулярні?

Розв'язання.

Обчислимо скалярний добуток векторів і прирівняємо його до нуля.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot\alpha+\alpha\cdot 3+(-2)\cdot(-4)=4\alpha+8=0$,

звідси знаходимо α=-2.

Приклад 7. Задано три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Довести, що вектор $\vec{d}=(\vec{b},\vec{c})\vec{a}-(\vec{a},\vec{c})\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{c}$.

Розв'язання.

Умова перпендикулярності векторів − рівність нулю їхнього скалярного добутку. Помножимо скалярно вектор $\vec{d}$ на $\vec{c}$ й, у силу властивостей скалярного добутку, одержимо:

$\vec{d}\cdot\vec{c}=((\vec{b},\vec{c})\vec{a}-(\vec{a},\vec{c})\vec{b})\vec{c}=(\vec{b},\vec{c})(\vec{a},\vec{c})-(\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{c})=0$.

Приклад 8. Знайти вектор $\vec{a}$, колінеарний вектору $\vec{b}=(2;-1;0)$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$.

Розв'язання.

Вектор $\vec{a}=\lambda\vec{b}=\lambda(2;-1;0)$ (оскільки колінеарні), тоді їхній скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda(2\cdot 2-1\cdot(-1)+0\cdot 0)=5\lambda=10$.

Звідси знаходимо: *λ=2,* $\vec{a}$ *=2(2; -1; 0) =(4; -2; 0).*

Приклад 9. Вектор $\vec{b}\,\|\,\vec{a}$, де $\vec{a}$=(8; -10; 13) і утворює з віссю *OZ* гострий кут. Знаючи, що $|\vec{b}|=\sqrt{37}$, знайти його координати.

Розв'язання.

З умови колінеарності вектор $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, $\vec{b}=(8\lambda;-10\lambda;13\lambda)$, при цьому повинна виконуватися умова *13λ>0,* тобто, *λ>0* (вектор $\vec{b}$ утворює з віссю *OZ* гострий кут). Модуль вектора $\vec{b}$ дорівнює

$|\vec{b}|=\sqrt{\lambda^2(8^2+(-10)^2+13^2)}=|\lambda|\sqrt{64+100+169}=|\lambda|\sqrt{333}=|\lambda|\sqrt{9\cdot 37}=\sqrt{37}$, звідси:

$|\lambda| = \frac{1}{3}, \lambda = \pm\frac{1}{3}$. Беремо $\lambda = \frac{1}{3}$ (за умовою λ>0). Виходить, $\vec{b} = \left(\frac{8}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{13}{3}\right)$.

Приклад 10. Задано три вектори $\vec{a} = (3; -1), \vec{b} = (1; -2), \vec{c} = (-1; 7)$. Знайти розкладання вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по векторах $\vec{a}$ й $\vec{b}$.

Розв'язання. За правилом додавання векторів маємо: $\vec{p}$ = (3+1-1; -1-2+7)=(3; 4)

Розкласти вектор $\vec{p}$ по векторах $\vec{a}$ й $\vec{b}$ означає: знайти α і β такі, що буде виконуватися рівність $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Два вектори рівні, якщо рівні їхні відповідні компоненти:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3 \\ -\alpha - 2\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2; \quad \beta = -3.$$

Отже, $\vec{p} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{b}$.

Приклад 11. Задано: $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 2, \quad \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \quad (\vec{b}, \vec{c}) = 120^0$.

Знайти $(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c})$

Розв'язання.

Використовуючи означення й властивості скалярного добутку, одержимо:

$$(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) =$$

$$= 2|\vec{a}|^2 + 3\vec{b}\vec{a} - \vec{c}\vec{a} - 4\vec{a}\vec{b} - 6|\vec{b}|^2 + 2\vec{c}\vec{b} + 6\vec{a}\vec{c} + 9\vec{b}\vec{c} - 3|\vec{c}|^2 =$$

$$= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a}\vec{b} + 5\vec{a}\vec{c} + 11\vec{b}\vec{c} - 6|\vec{b}|^2 - 3|\vec{c}|^2 =$$

$$= 2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot \cos 90^0 + 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 90^0 + 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^0 - 6 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2^2 = -67$$

Приклад 12. Задано: $|\vec{m}| = 4, |\vec{n}| = 3, \quad (\vec{m}, \vec{n}) = 60^0$.

Знайти величину кута між векторами $\vec{m} - \vec{n}$ й $\vec{m} + \vec{n}$.

Розв'язання.

Використовуючи скалярний добуток, знаходимо

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{m} - \vec{n})(\vec{m} + \vec{n})}{|\vec{m} - \vec{n}||\vec{m} + \vec{n}|}.$$

Обчислюємо $(\vec{m} - \vec{n})(\vec{m} + \vec{n}) = |\vec{m}|^2 - |\vec{n}|^2 = 4^2 - 3^2 = 7$;

$$|\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{(\vec{m} - \vec{n})(\vec{m} - \vec{n})} = \sqrt{|\vec{m}|^2 - 2\vec{n}\vec{m} + |\vec{n}|^2} = \sqrt{16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^0 + 9} = \sqrt{13};$$

$$|\vec{m} + \vec{n}| = \sqrt{(\vec{m} + \vec{n})(\vec{m} + \vec{n})} = \sqrt{|\vec{m}|^2 + 2\vec{n}\vec{m} + |\vec{n}|^2} = \sqrt{16 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^0 + 9} = \sqrt{37};$$

$\cos\varphi = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{37}} = \frac{7}{\sqrt{481}}$, звідки $\varphi = \arccos\frac{7}{\sqrt{481}}$.

Приклад 1. Обчислити векторний добуток векторів $a = 2m + 3n$ й $\vec{b} = 5\vec{m} - \vec{n}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості векторного добутку, одержимо:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[2\vec{m} + 3\vec{n}, 5\vec{m} - \vec{n}\right] = \left[2\vec{m}, 5\vec{m}\right] + \left[3\vec{n}, 5\vec{m}\right] - \left[2\vec{m}, \vec{n}\right] - \left[3\vec{n}, \vec{n}\right].$$

Оскільки $\left[2\vec{m}, 5\vec{m}\right] = 0, \quad \left[3\vec{n}, n\right] = 0, \quad \left[\vec{m}, \vec{n}\right] = -\left[\vec{n}, \vec{m}\right]$, одержимо

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = 15\left[\vec{n}, \vec{m}\right] + 2\left[\vec{n}, \vec{m}\right] = 17\left[\vec{n}, \vec{m}\right].$$

Приклад 2. Задані 3 вершини паралелограма *A(1;-1;2); B(5;-6;2); C(1;3;-1)*. Знайти його площу.

Розв'язання.

Площа $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$, $\overrightarrow{AB} = (4;-5;0)$, $\overrightarrow{AC} = (0;4;-3)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} - 16\vec{k};$$

$$S = \sqrt{15^2 + 12^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25(\text{кв. од.}).$$

Приклад 3. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$ й $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$,

якщо $\left|\vec{m}\right| = 2, \left|\vec{n}\right| = 1, \widehat{\vec{m}\vec{n}} = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання. $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$,

$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{m} + \vec{n}, 2\vec{m} - \vec{n}\right] = \left[\vec{m}, 2\vec{m}\right] + \left[\vec{n}, 2\vec{m}\right] - \left[\vec{m}, \vec{n}\right] - \left[\vec{n}, \vec{n}\right]$. Оскільки

$\left[\vec{m}, 2\vec{m}\right] = 0, \quad \left[\vec{n}, n\right] = 0, \quad \left[\vec{m}, \vec{n}\right] = -\left[\vec{n}, \vec{m}\right]$, то $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = 2\left[\vec{n}, \vec{m}\right] + \left[\vec{n}, \vec{m}\right] = 3\left[\vec{n}, \vec{m}\right]$

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|3\left[\vec{n}, \vec{m}\right]\right| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left|\vec{n}\right|\left|\vec{m}\right| \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (кв. од.).

Приклад 1. Обчислити мішаний добуток векторів:

$\vec{a} = (2;-1;3), \quad \vec{b} = (1;4;-2), \quad \vec{c} = (-3;2;5)$.

Розв'язання. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ =40+6-6+36+8+5=89.

Приклад 2. Задано вершини піраміди A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;2). Знайти її об'єм і довжину висоти, опущеної з вершини D.

Розв'язання.

Об'єм піраміди дорівнює

$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right|$; або $V = \frac{1}{3} S_{осн.} H \Rightarrow H = \frac{3V}{S_{осн.}}$.

$S_{осн.} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$. Знаходимо $\overline{AB} = (2;-2;-3), \overline{AC} = (4;0;6), \ \overline{AD} = (-7;-7;1)$,

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -14 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 260.$$ Тоді $V = \frac{1}{6} 260 (куб.од.)$.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k};$$

$S_{осн.} = 2\sqrt{9+36+4} = 2 \cdot 7 = 14 (кв.од.)$; $H = \frac{3 \cdot 260}{6 \cdot 14} = \frac{65}{7}$ (од. довж.)

Приклад 3. Чи лежать точки *A(3;-1;2), B(-2;2;5), C(1;4;2), D(0;1;-2)* в одній площині?

Розв'язання. Якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ компланарні, то точки *A, B, C, D* лежать в одній площині.

У цьому випадку мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$=(-5; 3; 3), $\overrightarrow{AC}$=(-2; 5; 0) і $\overrightarrow{AD}$=(-3; 2; -4) повинен рівнятися нулю. Знаходимо мішаний добуток

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 100-12+0+45-24=109 \neq 0.$$

Виходить, вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ некомпланарні й, отже, точки *A, B, C, D* не лежать в одній площині.

Розкладання вектора по заданому базису

Нехай вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ лінійно незалежні, тобто утворюють базис *n*-мірного простору.

Теорема. *Кожен вектор $\vec{X}$ лінійного простору R можна представити, і притім єдиним способом, у вигляді лінійної комбінації векторів базису:* $\vec{X}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n$. Таке представлення називається *розкладанням вектора по базису* $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$, а коефіцієнти $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ *– координатами вектора* $\vec{X}$ в цьому базисі.

Для визначення коефіцієнтів розкладання дана рівність записується в координатній формі. Одержимо систему лінійних неоднорідних рівнянь щодо невідомих $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$.Розв'язуючи її, знайдемо коефіцієнти розкладання вектора $\vec{X}$ по базису.

Приклад. Показати, що вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ утворять базис і знайти розкладання $\vec{b}$ по даному базису: $\vec{a}_1=(1;-1;2),\vec{a}_2=(2;2;-1),\vec{a}_3=(2;1;0),\vec{b}=(3;7;-7)$.

Розкладемо вектор $\vec{b}$ по векторах $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$: $\vec{b}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3$.

Розв'яжемо систему відносно методом повного виключення.

$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{b}$	
1	2	2	3	
-1	2	1	7	$e_2+e_1\to e_2$
2	-1	0	-7	$e_3+e_1(-2)\to e_3$
1	2	2	3	
0	4	3	10	$e_2+e_3\to e_2$
0	-5	-4	-13	
1	2	2	3	$e_2\cdot 2+e_1\to e_1$
0	-1	-1	-3	
0	4	3	10	$e_2\cdot 4+e_3\to e_3$
1	0	0	-3	

$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{b}$	
0	1	1	3	$e_3+e_2\to e_2$
0	0	-1	-2	
1	0	0	-3	
0	1	0	1	
0	0	1	2	

Як видно з розв'язку, ранг матриці системи дорівнює 3, отже, вектори лінійно незалежні й утворюють базис. Розв'язок системи $\alpha_1=-3;\alpha_2=1;\alpha_3=2$. Виходить, $\vec{b}=-3\vec{a}_1+\vec{a}_2+2\vec{a}_3$ – розкладання вектора $\vec{b}$ по базису $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$.

Контрольні завдання до розділу

Завдання 1

2.1.1. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

a) $\vec{a}$ =(-2;3;1), $\vec{b}$ =(5;7;-4);

b) $\vec{a}$ =2$\vec{i}$ +3$\vec{j}$ -4$\vec{k}$, $\vec{b}$ = $\vec{i}$ -2$\vec{j}$ +$\vec{k}$.

2.1.2. При якому α вектори $\vec{l}$ =(6; α ;-8) і $\vec{m}$ =(-3;-1;4) паралельні?

2.1.3. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ =(-1;2;-2) і $\vec{b}$ =(6;3;-6).

2. 1.4. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ -$\vec{b}$ і $\vec{a}$ +$\vec{b}$,якщо $\vec{a}$ =(1;2;1) і $\vec{b}$ =(2;-1;0).

2.1.5. При якому значенні x вектори $\vec{a}$ =(x;3;4) і $\vec{b}$ =(5;6;3) перпендикулярні?

2.1.6. Задані вектори $\vec{a}$ =(2;3;-5), $\vec{b}$ =(3;0;1) і $\vec{c}$ =(4;-3;2). Знайти координати і довжину вектора $\vec{d}$ =3$\vec{a}$ +$\vec{b}$ -$\vec{c}$.

2.1.7. Знайти (у градусах) кут між векторами $\vec{a}$ =2$\vec{i}$ +5$\vec{j}$ -$\vec{k}$ і $\vec{b}$ =$\vec{i}$ -$\vec{j}$ -3$\vec{k}$.

2.1.8. Знайти кут між векторами 2$\vec{a}$ і $\vec{b}$ /2, якщо $\vec{a}$ =(-4;2;4), $\vec{b}$ =$(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$.

2.1.9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4,$ обчислити (3-2$\vec{b}$)($\vec{a}$ +2$\vec{b}$).

2.1.10. Задані чотири точки: *A(-2;-3;8), B(2;1;7), C(1;4;5), D(-7;-4;7).* Чи будуть колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і$\overrightarrow{CD}$?

2.1.11. Знайти вектор $\vec{b}$ =(x,y, z), колінеарний вектору $\vec{a}$ =(2$\sqrt{2}$;-1; 4), якщо $|\vec{b}|=10$.

2.1.12. Знайти косинус кута між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$, що задовольняють системі рівнянь $\vec{p}+2\vec{q}=\vec{b}$, $2\vec{p}+\vec{q}=\vec{a}$, якщо відомо, що в прямокутній системі координат $\vec{a}=(1;1)$ $\vec{b}=(1;1)$.

2.1.13. Вектор $\vec{x}$ задовольняє наступним умовам : а) $\vec{x}$ колінеарний $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{j}-7,5\vec{k}$; b) $\vec{x}$ утворює гострий кут з віссю OZ; c) $|\vec{x}|$=50.

Знайти координати вектора $\vec{x}$.

2.1.14. Задані два вектори $\vec{a}$ =(-1;1;1) і $\vec{b}$ =(2;0;1).

Знайти вектор, якщо відомо, що він лежить в площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перпендикулярний вектору $\vec{a}$ і $\vec{a} \cdot \vec{x}$ =7.

2.1.15. Задані вершини трикутника *A(3;2;-3),B(5;1;-1),C(1;-2;1).* Знайти його внутрішній кут при вершині *A*.

2.1.16. Довести, що точки A (-2;-3),B(-3;1),C(7;7),D(3;0) служать вершинами трапеції. Знайти довжину середньої лінії трапеції.

2.1.17 Трикутник заданий координатами своїх вершин A*(3;2;-3), B(5;1;-1)* і *C(1;-2;1)* .Знайти величину зовнішнього кута трикутника при вершині *A* і координати вектора $\vec{a}$, що має напрям вектора $\overrightarrow{AB}$, а довжину вектора $\overrightarrow{AC}$.

2.1.18. Задані три послідовні вершини паралелограма *ABCD: A(-3;-2;0), B(3;-3;1), C(5;0;2)* .Знайти четверту вершину D і кут між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

2.1.19. Трикутник заданий координатами своїх вершин *A(2;1;2), B(1;0;0), C(1+* $\sqrt{3}$ *;* $\sqrt{3}$ *;-* $\sqrt{6}$ *).* Обчислити величини кутів трикутника і довжину медіани, проведеної до сторони BC.

2.1.20. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=5\vec{a}-4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

2.1.21. Довести, що точки *A (3; 0), B (0; 1), C (2; 7), D (5; 6)* є вершинами прямокутника *ABCD*. Обчислити його площу.

2.1.22. Обчислити довжину вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $\vec{a}$ = (1; 1; -1), $\vec{b}$ = (2; 0; 0).

2.1.23. При якому значенні α кут між векторами $\vec{x}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ і $\vec{y}=\alpha\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ дорівнює $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$?

2.1.24. Задані вектори $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(3;-5;6)$. Обчислити $np_{\vec{a}}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$.

2.1.25. Вектор $\vec{x}\perp\vec{b}=\left(\vec{i}-22\vec{y}-5\vec{k}\right)$ і утворює з віссю OY тупий кут. Знайти його координати, знаючи, що довжина вектора $\vec{x}$ рівна 14.

2.1.26. Довести, що сума векторів, що сполучають центр трикутника з його вершинами, рівна нулю.

2.1.27. Задані три точки A (2;1), B (3; -2), C (0; λ). При якому значенні λ дані точки лежать на одній прямій?

2.1.28. Точки A і B мають координати A (1; 2), B (7; 10). Знайти координати *(x; y)* точки, яка ділить відрізок AB в відношенні 1:3, рахуючи від точки A.

2.1.29. Трикутник заданий координатами вершин A (2; $2\sqrt{3}$), B (0; 0), C(3; $\sqrt{3}$). Знайти кути трикутника ABC.

2.1.30. Заданий трикутник ABC : A (1; 2), B (-2; 3), C (2; 4). Точки M, N і P – середини сторін BC, CA і AB трикутника. Знайти координати векторів $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{PM}$.