Практичне заняття №2,
МІТ -420сг,420сд, 720с, 520св, 420ск.
14.10.2020

Нехай дана система n рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.1)$$

в матричній формі $A \cdot X = B$. Основна матриця A такої системи квадратна. Визначник цієї матриці $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

називається головним визначником системи. Якщо головний визначник системи є відмінним від нуля, то матриця А зветься невиродженою, система також називається невиродженою. Очевидно, що для невиродженої системи $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = n$, тобто вона має єдиний розв'язок.

Правило Крамера. Нехай система (1.1) невироджена. Тоді її розв'язок можна знайти за формулами Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad \mathrm{j} = \overline{1,n},$$

де Δ_j − визначник, отриманий з головного визначника системи Δ заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів.

Приклад 1.1. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

► Головна матриця системи $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, матриця-стовбець правих частин $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, матриця-стовбець невідомих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Головний визначник системи $\Delta = detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, допоміжні визначники получаємо заміною коефіцієнтів стовпця на стовбець правих частин, у першому допоміжному визначнику змінюємо перший стовбець, у другому – другий, у третьому – третій, маємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$

За формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2,\ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1,\ \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3.$$

Перевірка: $\begin{cases} 2 \cdot 2 - (-1) + (-3) = 5 - 3 = 2, \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = 6 - 8 = -2, \\ 2 - 2 \cdot (-1) + (-3) = 4 - 3 = 1. \end{cases}$

Відповідь $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ◄

Приклад 1.2. Розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

У цієї системі: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Delta = detA = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 9 - (-1) - 0 - 12 = -2 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 9, \qquad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9}{-2} = -\frac{9}{2},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 3 - 0 - 0 - (-24) = 27, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{-2} = -\frac{27}{2},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 18 - 2 - 0 - 3 = -23, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-23}{-2} = \frac{23}{2}$$

Перевірка: $\begin{cases} -\dfrac{27}{2}+\dfrac{23}{2}=-\dfrac{4}{2}=-2, \\ 3\cdot\left(-\dfrac{9}{2}\right)-\cdot\left(-\dfrac{27}{2}\right)=-\dfrac{27}{2}+\dfrac{27}{2}=0, \\ -\dfrac{9}{2}+3\cdot\left(-\dfrac{27}{2}\right)+4\cdot\dfrac{23}{2}=-45+46=1. \end{cases}$ Відповідь $X=\begin{pmatrix} -9/2 \\ -27/2 \\ 23/2 \end{pmatrix}$ ◄

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана − Гаусса

Цей метод є модифікацією методу Гаусса. Від класичного методу він відрізняється тим, що під час перетворень на кожному кроці головний елемент виключається зо всіх рівнянь, крім головного. Головний елемент не обов'язково повинен стояти на головній діагоналі. На кожному кроці, якщо головний елемент не дорівнював одиниці, всі елементи головного рядка діляться на головний елемент.

Приклад 1.3. Розв'язати систему рівнянь за допомогою методу Жордана − Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1+3x_2-x_3=-2, \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0. \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_1\cdot(-1)+e_2=e_2 \\ e_1\cdot(-1)+e_3=e_3 \\ e_1\cdot(-3)+e_4=e_4 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_3\cdot(-2)+e_1=e_1 \\ e_3\cdot 3+e_2=e_2 \\ e_3\cdot 2+e_4=e_4 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \sim \left\| e_2\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)=e_2 \right\| \sim \left\| \begin{array}{l} e_2\cdot(-11)+e_1=e_1 \\ e_2\cdot 4+e_3=e_3 \\ e_2\cdot 14+e_4=e_4 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$ $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\overline{A}=3$, система має єдиний розв'язок.

Записуємо систему: $\begin{cases} x_1=-1, \\ x_3=1, \\ x_2=0, \end{cases}$ тобто розв'язком є $X=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.◄

Приклад 1.4. Розв'язати систему рівнянь двома способами:

а) за допомогою формул Крамера;

б) методом Жордана − Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

► а) Маємо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо головний визначник системи:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot(-3)\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot(-3)\cdot 2 -$$

$$-3\cdot(-1)\cdot 4 = 20 + 29 = 49 \neq 0.$$

Головний визначник системи не дорівнює нулю, а отже, система має єдиний розв'язок. Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-12 + 6 + 15) - (2 + 27 - 20) = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (40 + 9 + 6) - (5 - 36 - 12) = 98,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 5 - 27) - (-3 + 30 - 6) = -49.$$

Знаходимо розв'язок системи за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{49} = 0; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{98}{49} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-49}{49} = -1.$$

б) Для вирішення системи за методом Жордана-Гаусса запишемо розширену матрицю системи та проведемо її перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_1 + e_2 = e_2 \\ e_1 \cdot 3 + e_3 = e_3 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -2 & 2 \\ 7 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_3 : 7 = e_3 \\ e_1 \cdot (-1) = e_1 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_3 \cdot 2 + e_1 = e_1 \\ e_3 \cdot (-5) + e_2 = e_2 \\ \\ \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_2 : (-7) = e_2 \\ \\ \\ \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_2 : (-1) + e_1 = e_1 \\ e_2 : (-1) + e_3 = e_3 \\ \\ \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Записуємо систему, що відповідає перетвореній матриці:

$$\begin{cases} x_2 = 2, \\ x_3 = -1, \\ x_1 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв’язки, отримані двома способами, співпадають, отже, задача вирішена вірно.