# Практичне заняття №3

## Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) методом Гаусса та Жордана-Гаусса

## Однорідні СЛАР

Одним з найбільш універсальних та ефективних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гаусса, який полягає в послідовному виключенні невідомих. Нехай задана система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

1. Виписують розширену матрицю системи і відокремлюють стовпець вільних членів вертикальною рискою:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Якщо $a_{11} \neq 0$, то його вибирають за головній елемент і за допомогою елементарних перетворень, що виконуються тільки над рядками матриці, виключають невідому $a_{11}$ з усіх рівнянь, крім першого; якщо $a_{11} = 0$, то міняють місцями рядки матриці так, щоб на перетині першого рядка та першого стовпця стояв ненульовий елемент, і цей елемент беруть за головний. Рядок, в якому знаходиться вибраний головний елемент, називається головним. Внаслідок цих перетворень отримують матрицю системи, що є рівносильною початковій системі. Слід зауважити, що найбільш зручно проводити перетворення, коли головний елемент дорівнює одиниці.

2. На другому кроці одержаний перший рядок залишають незмінним. Аналогічним чином вибирають головний елемент, що стоїть на перетині другого рядка та другого стовпця, та виключають елемент $a_{22}$ з решти рівнянь.

3. Вказаним способом частину матриці, що стоїть ліворуч вертикальної риски, зводять до трикутного або трапецеїдального вигляду. Якщо під час перетворень матриці утворюється рядок, що містить тільки нулі, то його викреслюють. Якщо утворюється рядок, в якому ліворуч вертикальної риски

стоять самі нулі, а праворуч – число, відмінне від нуля, то це означає, що система несумісна. Зведення матриці до трикутного або трапецеїдального вигляду становить прямий хід методу Гаусса.

4. Застосовують зворотний хід методу Гаусса, який полягає у наступному:

якщо ліва частина матриці звелася до трикутного вигляду, то $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}\overline{A} = n$, тобто система має єдиний розв'язок. Записують систему рівнянь, відповідну до одержаної матриці. Невідомі визначають послідовно, починаючи з останнього. Тобто з $n$-го рівняння знаходять $x_n$, з $n-1$-го – $x_{n-1}$ і так далі;

якщо ліва частина матриці звелася до трапецеїдального вигляду, то $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}\overline{A} < n$, тобто система має нескінченну безліч рішень. Тоді вибирають базисний мінор і тим самим фіксують базисні невідомі (вони відповідають тим стовпцям, що увійшли в базисний мінор), решту невідомих називають вільними. Записують систему рівнянь, відповідну одержаної матриці, а потім перетворюють її таким чином: доданки, що містять базисні невідомі, залишають у лівих частинах рівнянь, а доданки, що містять вільні невідомі, переносять в праві частини. Далі за описаною раніш схемою знаходять базисні невідомі або як лінійну комбінацію вільних, або як числа. Одержані рівності є загальним розв'язком системи. Зауважимо, що обернений хід методу Гаусса можна робити, продовжуючи перетворення розширеної матриці, отриманої після прямого ходу.

Надаючи вільним невідомим будь-яких числових значень, знаходять відповідні значення базисних невідомих та одержують частинні розв'язки системи.

***Приклад 3.1.*** Розв'язати систему рівнянь за допомогою методу Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_1 \cdot (-2) + e_2 = e_2 \\ e_1 \cdot (-3) + e_3 = e_3 \\ e_1 \cdot (-7) + e_4 = e_4 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_2 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \\ e_2 \cdot (-2) + e_4 = e_4 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \end{array}\right).$$

За базисний беремо той мінор, що стоїть на перетині першого та другого рядків з першим та другим стовпцями, тоді невідомі $x_1$ та $x_2$ будуть базисними, а $x_3$ та $x_4$ – вільними. Записуємо систему, що відповідає одержаній матриці:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 + 5x_3, \\ x_2 = -13x_3 + 5x_4 - 3, \end{cases}$$

тоді $x_2 = -13x_3 + 5x_4 - 3$, $x_1 = -8x_3 + 5x_4 - 1$.

Або обернений хід цього прикладу можна було зробити так:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \end{array}\right) \sim \left\| e_2 + e_1 = e_1 \right\| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \end{array}\right)$, тобто маємо систему $\begin{cases} x_1 + 8x_3 - 5x_4 = -1, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3, \end{cases}$ відкіля $\begin{cases} x_1 = -1 - 8x_3 + 5x_4, \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4. \end{cases}$

Загальним розв'язком системи є $X = \begin{pmatrix} -8x_3 + 5x_4 - 1 \\ -13x_3 + 5x_4 - 3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Одержимо будь-який частинний розв'язок; нехай $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, тоді

$$X = \begin{pmatrix} -8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 1 \\ -13 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

**Метод Жордана-Гаусса** є модифікацією методу Гаусса. Від класичного методу він відрізняється тим, що під час перетворень на кожному кроці головний елемент виключається зо всіх рівнянь, крім головного. Головний елемент не обов'язково повинен стояти на головній діагоналі. На кожному кроці, якщо головний елемент не дорівнював одиниці, всі елементи головного рядка діляться на головний елемент.

***Приклад 3.2.*** Розв'язати систему рівнянь за допомогою методу Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_1 \cdot (-1) + e_2 = e_2 \\ e_1 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \\ e_1 \cdot (-3) + e_4 = e_4 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_3 \cdot (-2) + e_1 = e_1 \\ e_3 \cdot 3 + e_2 = e_2 \\ e_3 \cdot 2 + e_4 = e_4 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \sim \left\| e_2 \cdot \left(-\frac{1}{14}\right) = e_2 \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_2 \cdot (-11) + e_1 = e_1 \\ e_2 \cdot 4 + e_3 = e_3 \\ e_2 \cdot 14 + e_4 = e_4 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$, система має єдиний розв'язок.

Записуємо систему: $\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_3 = 1, \\ x_2 = 0, \end{cases}$ тобто розв'язком є $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ◄

***Приклад 3.3.*** Розв'язати систему рівнянь або встановити її несумісність:

$$\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4. \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \left(\begin{array}{ccccc|c} 12 & 14 & -15 & 23 & 27 & 5 \\ 16 & 18 & -22 & 29 & 37 & 8 \\ 18 & 20 & -21 & 32 & 41 & 9 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_4 \cdot (-1) + e_1 = e_1 \\ e_4 \cdot (-1) + e_2 = e_2 \\ e_4 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & -6 & 9 & 14 & 4 \\ 8 & 8 & -5 & 12 & 18 & 5 \\ 10 & 12 & -16 & 20 & 23 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{l} e_1 \cdot (-3) + e_2 = e_2 \\ e_1 \cdot (-4) + e_3 = e_3 \\ e_1 \cdot (-5) + e_4 = e_4 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -21 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_2 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \\ e_2 \cdot (-2) + e_4 = e_4 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_3 \cdot (-1) + e_1 = e_1 \\ e_2 :\cdot 2 = e_2 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -9/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{l} e_2 + e_3 = e_3 \\ e_2 \cdot (-5) + e_1 = e_1 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 53/2 & -2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -9/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -15/2 & 5 & 0 & -5/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left\| \begin{array}{l} e_1 : 2 = e_1 \\ e_3 :\cdot 2 = e_3 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 53/4 & -1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & -9/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -15/4 & 5/2 & 0 & -5/4 \end{array}\right).$$

Ранг матриці дорівнює 3. Базисний мінор утворюють стовпці 1, 2 та 5, невідомі $x_1$, $x_2$ та $x_5$ – базисні, $x_3$ та $x_4$ – вільні. Записуємо систему, що відповідає перетвореній матриці:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{53}{4} x_3 - x_4 = \dfrac{3}{4}, \\ -\dfrac{9}{2} x_3 + x_5 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 - \dfrac{15}{4} x_3 + \dfrac{5}{2} x_4 = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Переносимо доданки, що містять вільні невідомі, в праві частини рівнянь та одержуємо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{53}{4} x_3 + x_4, \\ x_2 = -\dfrac{5}{4} + \dfrac{15}{4} x_3 - \dfrac{5}{2} x_4, \\ x_5 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2} x_3. \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} - \dfrac{53}{4} x_3 + x_4 \\ -\dfrac{5}{4} + \dfrac{15}{4} x_3 - \dfrac{5}{2} x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2} x_3 \end{pmatrix}.$$ Якщо позначити

вільну змінну $x_3 = \alpha,\ \alpha \in R$, а вільну змінну $x_4 = \beta,\ \beta \in R$, то загальний

розв'язок СЛАР набуває вигляду: $X = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} - \dfrac{53}{4} \alpha + \beta \\ -\dfrac{5}{4} + \dfrac{15}{4} \alpha - \dfrac{5}{2} \beta \\ \alpha \\ \beta \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2} \alpha \end{pmatrix}$. ◄

## Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однорідна система завжди сумісна, тому що для неї $\operatorname{rang}A = \operatorname{rang}\overline{A}$; вона завжди має нульовий (тривіальний) розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

За яких умов однорідна система має і ненульові розв'язки?

**Теорема.** Для того щоб однорідна система мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці був менший від числа невідомих.

Спираючись на цю теорему, можна зробити такий висновок: будь-яка однорідна система, в якій кількість рівнянь менша від числа невідомих, має нескінченну безліч розв'язків, серед яких є і ненульові.

**Теорема.** Для того щоб однорідна система $n$ рівнянь з $n$ невідомими мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю.

Довести цей факт дуже просто. Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний, нульовий розв'язок. Якщо $\Delta = 0$, то ранг основної матриці системи менший від числа невідомих $\operatorname{rang}A < n$, а отже, система має нескінченну безліч розв'язків, серед яких є і ненульові.

***Приклад 3.4.*** Розв'язати систему рівнянь за допомогою методу Жордана − Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

При розв'язанні однорідних систем нульовий стовпець вільних членів в розширеній матриці можна не записувати:

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_1 \cdot (-2) + e_2 = e_2 \\ e_1 \cdot (-3) + e_3 = e_3 \\ e_1 \cdot (-2) + e_4 = e_4 \\ \\ \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\left\|\begin{matrix} e_4\cdot(-2)+e_1=e_1 \\ e_4\cdot 5+e_2=e_2 \\ e_4\cdot 4+e_3=e_3 \end{matrix}\right\|\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\left\|\begin{matrix} e_2\cdot(-1)+e_3=e_3 \\ e_4\cdot(-1)=e_4 \end{matrix}\right\|\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\sim\left\|\begin{matrix} e_2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=e_2 \\ \text{міняємо місцями } e_2 \text{ і } e_4 \\ \text{викреслюємо } e_3 \end{matrix}\right\|\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}\sim\left\|\begin{matrix} e_3\cdot(-1)+e_2=e_2 \\ e_3\cdot(-3)+e_1=e_1 \end{matrix}\right\|\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{pmatrix},$$

Ранг матриці дорівнює 3. Базисний мінор утворюють стовпці 1, 2 і 3, невідомі $x_1$, $x_2$ та $x_3$ – базисні, $x_4$ та $x_5$ – вільні. Записуємо систему, що відповідає перетвореній матриці:

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_4-\frac{7}{8}x_5=0, \\ x_2+\frac{1}{2}x_4-\frac{5}{8}x_5=0, \\ x_3-\frac{1}{2}x_4+\frac{5}{8}x_5=0. \end{cases}$$

Переносимо доданки, що містять вільні невідомі, в праві частини рівнянь та одержуємо загальний розв’язок системи:

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x_4+\frac{7}{8}x_5, \\ x_2=-\frac{1}{2}x_4+\frac{5}{8}x_5, \\ x_3=\frac{1}{2}x_4-\frac{5}{8}x_5. \end{cases} \qquad X=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_4+\frac{7}{8}x_5 \\ -\frac{1}{2}x_4+\frac{5}{8}x_5 \\ \frac{1}{2}x_4-\frac{5}{8}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

*Фундаментальними розв'язками* однорідної системи називають лінійно незалежні частинні розв’язки, у яких одна вільна змінна дорівнює одиниці, а решта вільних змінних має нульове значення. Число фундаментальних розв’язків визначається числом вільних змінних. Загальний розв’язок може бути записаним лінійною комбінацією фундаментальних розв’язків $X=C_1X_{ф1}+C_2X_{ф2}+...+C_kX_{фk}$, де $C_i$, $X_{фi}$, $i=\overline{1,k}$ відповідно довільні стали та фундаментальні розв’язки. Так, у розглянутому прикладі фундаментальних

розв'язків два (перший получаємо, якщо покласти $x_4 = 1, x_5 = 0$, другий при $x_4 = 0, x_5 = 1$) і загальний розв'язок можна записати як

$$X = C_1 X_{ф1} + C_2 X_{ф2} = C_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 7/8 \\ 5/8 \\ -5/8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

***Приклад 3.5.*** Розв'язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 30x_4 + 15x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 30 & 15 \\ 6 & 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_1 \cdot (-3) + e_2 = e_2 \\ e_1 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \\ e_1 \cdot (-2) + e_4 = e_4 \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & -21 & -9 \\ 0 & 4 & 4 & 21 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -11 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} \text{рядки } e_2 \text{ і } e_3 \\ \text{пропорціональні,} \\ \text{викреслюємо } e_2 \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 21 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -11 & -7 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_3 \cdot 2 + e_1 = e_1 \\ e_3 \cdot 2 + e_2 = e_2 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & -11 & -7 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} e_2 \cdot (-13) + e_1 = e_1 \\ e_2 \cdot (-11) + e_3 = e_3 \end{matrix} \right\| \sim \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 48 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} e_1 \cdot (-1) = e_1 \\ e_2 \cdot (-1) = e_2 \\ e_3 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = e_3 \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & -57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -24 \end{pmatrix} \sim \left\| e_1 \cdot (-1) + e_3 = e_3 \right\| \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & -57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці дорівнює 3. Базисний мінор утворюють стовпці 2, 3 та 4, невідомі $x_2$, $x_3$ та $x_4$ – базисні, $x_1$ та $x_5$ – вільні. Записуємо систему, що відповідає перетвореній матриці: $\begin{cases} -3x_1 + x_3 - 57x_5 = 0, \\ x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 33x_5 = 0. \end{cases}$

Переносимо доданки, що містять вільні невідомі, в праві частини рівнянь та одержуємо загальний розв'язок системи :

$$\begin{cases} x_3 = 3x_1 + 57x_5, \\ x_4 = -5x_5, \\ x_2 = -3x_1 - 33x_5, \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3x_1 - 33x_5 \\ 3x_1 + 57x_5 \\ -5x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Якщо застосувати фундаментальні розв’язки, то загальний розв’язок набуває вигляду: $X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -33 \\ 57 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.◄