Практичне заняття №3 від 19.10.2020 р.

Тема: Обчислення границь. Зрівнянні нескінченно малих та нескінченно великих. Застосування еквівалентних нескінченно малих при обчисленні границь.

Приклад 3.1. Обчислити границю раціонального дробу $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_m}$.

► Винесемо за дужки найвищі ступені многочленів у чисельнику та у знаменнику дробу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_m}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+...+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+...+\frac{b_m}{x^m}\right)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{легко переконатися, що}\\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+...+\frac{a_n}{x^n}\right)=a_0,\\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+...+\frac{b_m}{x^m}\right)=b_0,\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^na_0}{x^mb_0}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \textit{при } n=m,\\ 0, & \textit{при } n<m,\\ \infty, & \textit{при } n>m.\end{cases}$$ ◄

Приклад 3.2 Застосуємо це правило до наступних прикладів:

► а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+7x+1}{8x^3+4x^2+3}=\left|\begin{array}{l}n=3\\ m=3\\ m=n\end{array}\right|=\dfrac{3}{8}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+7x+1}{5x^2+3}=\left|\begin{array}{l}n=3\\ m=2\\ n>m\end{array}\right|=\infty$;

с) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x+1}{8x^3+4x^2+3}=\left|\begin{array}{l}n=2\\ m=3\\ n<m\end{array}\right|=0$. ◄

Порівняння нескінченно малих функцій

Нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою їхнього відношення.

Нехай $\alpha=\alpha(x),\beta=\beta(x)$ - нескінченно малі функції при $x\to x_0$. Це означає, що $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

Дві нескінченно малі функції називаються нескінченно малими одного порядку при $x\to x_0$, якщо при $x\to x_0$ границя їхнього відношення дорівнює

постійному числу, відмінному від нуля, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0\ (A\in R)$. Позначають це символом $\alpha(x)=\mathrm{O}(\beta(x))$

Дві нескінченно малі функції називаються еквівалентними нескінченно малими при $x\to x_0$, *якщо при* $x\to x_0$ *границя їхнього відношення дорівнює одиниці, тобто* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, позначають це так $\alpha(x)\sim\beta(x)$, або $\alpha\sim\beta$.

Нескінченно мала $\alpha(x)$ *називається нескінченно малою більш високого порядку малості ніж* $\beta(x)$ *при* $x\to x_0$, *якщо при* $x\to x_0$ *границя відношення* $\alpha(x)$ *до* $\beta(x)$ *дорівнює нулю, тобто* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, позначають це $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, *то кажуть, що нескінченно мала* $\alpha(x)$ *є нескінченно малою більш низького порядку малості ніж* $\beta(x)$ *при* $x\to x_0$, позначають це $\beta(x)=o(\alpha(x))$.

Порядком нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно нескінченно малої $\beta(x)$ називають число ***k***, при якому $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=const\neq 0,\ \neq\infty$, тобто $\alpha(x)$ и $(\beta(x))^k$ є нескінченно малі одного порядку: $\alpha=\mathrm{O}\left(\beta^k\right)$

Приклад 3.3. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x)=3x-6$ та $\beta(x)=4x^2-16$ при $x\to 2$.

► $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-6}{4x^2-16}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{4(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{4(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3}{4(x+2)}=\frac{3}{16}\neq 0$.

Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ при $x\to 2$ є нескінченно малими <u>одного порядку</u>, тобто $(3x-6)\sim\frac{3}{16}\left(4x^2-16\right)$. ◄

Приклад 3.4. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x)=3(x-1)^2$ та $\beta(x)=x^2-3x+2$ при $x\to 1$.

► $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{x^2-3x+2}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x-2)}=0$.

Нескінченно мала $\alpha(x)$ при $x\to 1$ є нескінченно малою <u>більш високого порядку</u> малості ніж $\beta(x)$, тобто $\alpha(x)=o(\beta(x))$. Або $3(x-1)^2=o\left(x^2-3x+2\right)$.

Встановимо порядок малості $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{\left(x^2-3x+2\right)^k}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{(x-1)^k(x-2)^k}=\left\|\lim_{x\to 1}(x-2)^k=(-2)^k\right\|=$$

$$=3(-2)^k \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^k}=\|\text{якщо } k=2\|=3(-2)^k \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=3(-2)^k=const\ .$$

Тобто $\alpha(x)$ має <u>другий порядок</u> малості відносно $\beta(x)$: $\alpha(x)=\mathrm{O}\left((\beta(x))^2\right)$. Або $3(x-1)^2=\mathrm{O}\left(\left(x^2-3x+2\right)^2\right)$. ◄

Складемо таблицю еквівалентних нескінченно малих при $\alpha\to 0$. У лівому стовпчику наведені пари еквівалентних функцій, одержані за допомогою першої особливої границі, у правому – за допомогою другої.

I	II
1. $sin\,\alpha\sim\alpha$; 2. $tg\alpha\sim\alpha$; 3. $arcsin\,\alpha\sim\alpha$; 4. $arctg\alpha\sim\alpha$; 5. $1-cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2}$.	1. $ln(1+\alpha)\sim\alpha$; 2. $log_a(1+\alpha)\sim\frac{\alpha}{ln\,a}$; 3. $a^\alpha-1\sim\alpha\cdot lna$, 4. $e^\alpha-1\sim\alpha$; 5. $(1+\alpha)^m-1\sim m\alpha$.

При обчисленні границь нескінченно малі можна *замінювати на їхні еквівалентні* нескінченно малі. Це можна робити у доданках, добутках та частках. Можна також змінювати і у <u>різницях</u>, якщо нескінченно малі, що складають різницю, <u>не є еквівалентними</u>.

Приклад 3.5.

►а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+3x)}{3x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left|\begin{matrix}ln(1+3x)\sim 3x\\ x\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\frac{3x}{3x}=1.$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin(x-2)}{x-2}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left|\begin{matrix}y=x-2\\ y\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y}=1.$ ◄

Приклад 3.6. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(3x+5\pi)\cdot\left(3^{2x}-5^{4x}\right)}{\ln\cos x\cdot\left(\sqrt[5]{1+3x^3}-1\right)}$

$$\blacktriangleright \lim_{x\to 0}\frac{tg(3x+5\pi)\cdot\left(3^{2x}-5^{4x}\right)}{\ln\cos x\cdot\left(\sqrt[5]{1+3x^3}-1\right)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\|tg(3x+5\pi)=tg3x\|=\lim_{x\to 0}\frac{tg3x\cdot\left(3^{2x}-1+1-5^{4x}\right)}{ln\cos x\cdot\left(\sqrt[5]{1+3x^3}-1\right)}=$$

$$=\left|\begin{matrix}tg3x\sim 3x\\ 3^{2x}-1+1-5^{4x}=\left(3^{2x}-1\right)-\left(5^{4x}-1\right)\sim 2x\,ln\,3\text{-}4x\,ln\,5\sim x\,ln\frac{9}{625}\\ ln\cos x=ln(1+(\cos x-1))\sim ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)\sim\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\ \sqrt[5]{1+3x^3}-1=\left(1+3x^3\right)^{\frac{1}{5}}-1\sim\frac{1}{5}3x^3\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot x\cdot\ln\frac{9}{625}}{\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{3}{5}x^3\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{10x^2 \cdot \ln \frac{9}{625}}{\left(-x^2\right)x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{10 \cdot \ln \frac{9}{625}}{-x^3} = \infty . \blacktriangleleft$$

Приклад 3.7. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(3x-6)}{x^2-3x+2}$.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to 2} \frac{\sin(3x-6)}{x^2-3x+2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left| \begin{array}{l} \textit{Зробимо заміну змінної } \mathrm{y = x - 2 \to 0, ттод} \\ 3\mathrm{x - 6 = 3(x - 2)} = 3y; \\ x^2-3x+2 = (x-2)\cdot(x-1) = y\cdot(y+1) \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{y(y+1)} = \left|\textit{Зробимозаміну на еквівалентні}\right| = \lim_{y\to 0} \frac{3y}{y(y+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{3}{(y+1)} = 3. \blacktriangleleft$$

Відзначимо, що при обчисленні границь ***нескінченно малими доданками <u>вищих</u> порядків можна нехтувати.***

Приклад 3.8. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^3-3x^2+5x}-1}{ln\left(x^4+8x+1\right)}$.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3-3x^2+5x}-1}{ln\left(x^4+8x+1\right)} = \left| \begin{array}{l} \left(e^{x^3-3x^2+5x}-1\right) \sim \left(x^3-3x^2+5x\right) \sim 5x \\ ln\left(x^4+8x+1\right) \sim \left(x^4+8x\right) \sim 8x \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{8x} = \frac{5}{8}. \blacktriangleleft$$

Аналогічно зрівнянню нескінченно малих можна проводити зрівняння нескінченно великих, та замінювати нескінченно великі на їх асимптотичні рівні. рівними. Нескінченно великими доданками ***<u>нижчих</u> порядків можна нехтувати***.

Приклад 3.9. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^8+100x^5+2x}+5x^2\cdot\sqrt[3]{x^2-6x}}{\sqrt[7]{x^{14}+6x^7-10}+\sqrt{x^2-7}\cdot\sqrt[3]{x^5+x^2+3}}$.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^8+100x^5+2x}+5x^2\cdot\sqrt[3]{x^2-6x}}{\sqrt[7]{x^{14}+6x^7-10}+\sqrt{x^2-7}\cdot\sqrt[3]{x^5+x^2+3}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{x^8+100x^5+2x} \sim x^{8/3} \\ \sqrt[3]{x^2-6x} \sim x^{2/3} \\ \sqrt[7]{x^{14}+6x^7-10} \sim x^{\frac{14}{7}} = x^2 \\ \sqrt{x^2-7} \sim x^{2/2} = x \\ \sqrt[3]{x^5+x^2+3} \sim x^{5/3} \end{array} \right| =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{8}{3}}+5x^2\cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^2+x\cdot x^{\frac{5}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{8}{3}}+5x^{\frac{8}{3}}}{x^2+x^{\frac{8}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^{\frac{8}{3}}}{x^{\frac{8}{3}}} = 6. \blacktriangleleft$$