3.1. Поняття криволінійних координат точки

Нехай в області D^* площини O^*uv задана пара функцій

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \tag{3.1}$$

які є неперервними в цій області і мають неперервні частинні похідні.

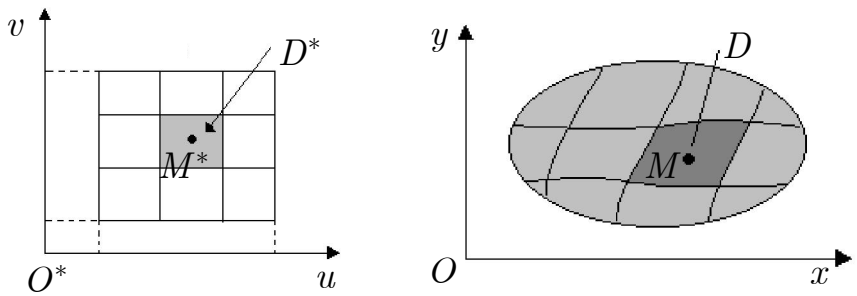

Рис.3.1

З рівнянь (3.1) випливає, що кожній точці $M^*(u; v) \in D^*$ відповідає одна визначена точка $M(x; y)$ площини Oxy, тобто точкам області D^* площини O^*uv відповідає деяка множина точок D площини Oxy (рис. 3.1). В цьому випадку говорять, що функції (3.1) здійснюють *відображення* області D^* на область D. Нехай різним точкам $(u; v)$ відповідають різні точки $(x; y)$. Це означає, що рівності (3.1) можна однозначно розв'язати відносно змінних u та v:

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases} \tag{3.2}$$

В цьому випадку відображення називають *взаємно однозначним* відображенням області D^* на область D. За заданою парою u_0, v_0 значень змінних u і v можна однозначно визначити не тільки положення точки $M^*(u_0; v_0)$ в області D^*, але й положення точки $M(x_0; y_0)$ в області D: $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$. Це дає змогу розглядати змінні u, v як деякі нові координати точки M області D на площині Oxy. Їх називають *криволінійними координатами* точки M. Тобто u, v — прямокутні декартові координати точок області D^* і криволінійні координати точок області D.

Зафіксуємо одну змінну, приміром, $v = v_0$, тоді параметричні рівняння (u — параметр)

$$\begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0) \end{cases}$$

є рівняннями деякої лінії. Таку лінію — множину точок області D, у яких одна з координат зберігає стале значення — називають *координатною лінією*.

Сітка криволінійних координатних ліній на площині Oxy є образом прямокутної сітки на площині O^*uv.

3.2. Якобіан та його геометричний зміст

Розглянемо в області D^* прямокутник $P_1^*P_2^*P_3^*P_4^*$, сторони якого паралельні осям координат O^*u і O^*v, а їх довжини дорівнюють Δu і Δv $(\Delta u > 0, \Delta v > 0)$. Площа цього прямокутника

$$\Delta S^* = \Delta u \cdot \Delta v. \tag{3.3}$$

При відображенні (3.1) прямокутник $P_1^*P_2^*P_3^*P_4^*$ переходить в криволінійний чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ в області D (рис. 3.2).

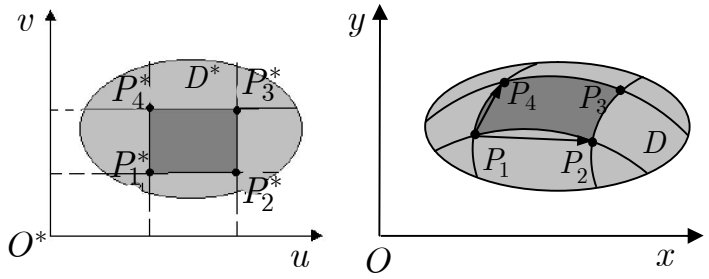

Рис. 3.2

Нехай вершини P_i^* $(i = 1, 2, 3, 4)$ мають координати:

$P_1^*(u; v)$, $P_2^*(u + \Delta u; v)$, $P_3^*(u + \Delta u; v + \Delta v)$, $P_4^*(u; v + \Delta v)$,

тоді за формулами (3.1) відповідні їм вершини P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ мають координати:

$P_1(x(u, v); y(u, v))$, $P_2(x(u + \Delta u, v); y(u + \Delta u, v))$,

$P_3(x(u + \Delta u, v + \Delta v); y(u + \Delta u, v + \Delta v))$, $P_4(x(u, v + \Delta v); y(u, v + \Delta v))$.

За формулою Тейлора для функції двох змінних з точністю до $o(\Delta u, \Delta v)$ одержимо наступні наближені значення координат для вершин чотирикутника $P_1P_2P_3P_4$:

$P_1(x; y)$,

$$P_2(x + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u; y + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u),$$

$$P_3(x + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v; y + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v),$$

$$P_4(x + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v; y + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v).$$

Відмітимо, що чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ є паралелограмом. Тоді з точністю до нескінченно малих вищого порядку, площу цього паралелограма можна наближено знайти з геометричного змісту векторного добутку векторів, на яких побудований паралелограм:

$$\Delta S \simeq \left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right| \Delta u \Delta v = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right| \Delta u \Delta v.$$

Функціональний визначник

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v}\end{vmatrix} \tag{3.4}$$

називають *визначником Якобі* або *якобіаном*.

Таким чином,

$$\Delta S \simeq |J(u,v)|\Delta u\Delta v. \tag{3.5}$$

Вираз у правій частині формули (3.5) називають *елементом площі в криволінійних координатах*. Порівнюючи формули (3.3) та (3.5), одержимо

$$|J(u,v)| \simeq \frac{\Delta S}{\Delta S^*}. \tag{3.6}$$

Рівність (3.6) є наближеною, однак при переході до границі, коли діаметри площадок ΔS^* та ΔS прямують до нуля, вона переходить у точну:

$$|J(u,v)| = \lim_{d(\Delta S^*)\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta S^*}. \tag{3.7}$$

Аналізуючи формулу (3.7), можна зробити наступний висновок, який з'ясовує *геометричний зміст якобіана*.

Висновок. Модуль якобіана чисельно дорівнює відношенню нескінченно малих площ при відображенні $x = x(u,v), y = y(u,v)$ в точці $(u;v)$. Тобто абсолютне значення якобіана відіграє роль локального коефіцієнта деформації області D^* при відображенні її на область D.

3.3. Заміна змінних в подвійному інтегралі

3.3.1. Формула заміни змінних в подвійному інтегралі

Нехай неперервні функції $x = x(u,v), y = y(u,v)$ відображають область D^* на область D, а функція $z = f(x,y)$ — неперервна в області D на площині Oxy. Справедлива наступна теорема.

Теорема Нехай функції $x = x(u,v), y = y(u,v)$:

1) здійснюють взаємно однозначне відображення області D^* площини O^*uv на область D площини Oxy;

2) неперервно диференційовні в області D^*;

3) мають якобіан відмінний від нуля:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J(u,v)|dudv \tag{3.8}$$

яку називають *формулою заміни змінних в подвійному інтегралі*.

► Розіб'ємо область D^* прямими $u = u_i = \text{const}, v = v_j = \text{const}$ на прямокутники D^*_{ij}, площі яких ΔS^*_{ij}, при цьому криві $x = x(u_i, v), y = y(u_i, v)$ та $x = x(u, v_j),\ y = y(u, v_j)$ розіб'ють область D на криволінійні паралелограми D_{ij} з площами ΔS_{ij}. Тоді точці $(u_i; v_j) \in D^*$ відповідає точка $(x_i; y_j) = (x(u_i, v_j); y(u_i, v_j)) \in D$. Звідси, за означенням подвійного інтеграла, враховуючи формулу (3.7), маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta S_{ij} =$$

$$= \lim_{\substack{\max\Delta u_i\to 0\\ \max\Delta v_j\to 0}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x(u_i,v_j), y(u_i,v_j))\,|J(u,v)|\big|_{\substack{u=u_i\\ v=v_j}}\Delta S^*_{ij} =$$

$$= \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv. \blacktriangleleft$$

Диференціал площі поверхні в криволінійних координатах має вигляд

$$dS = |J(u,v)|\,dudv.$$

3.3.2. Подвійний інтеграл в полярних координатах

Найбільш поширена система криволінійних координат на площині — це полярна система координат (ρ, φ). Обчислення подвійного інтеграла часто суттєво спрощується заміною прямокутних координат x та y полярними координатами ρ та φ за формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \tag{3.9}$$

де $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Координатними лініями на площині Oxy будуть концентричні кола $\rho = \text{const}$ з центром у точці O і промені $\varphi = \text{const}$, що виходять з центру (рис. 3.3).

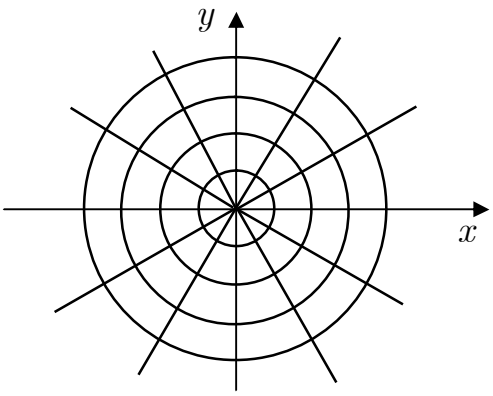

Рис. 3.3

Обчислимо якобіан в полярних координатах, для цього скористаємось формулою (3.4), в якій покладемо $u = \rho, v = \varphi$:

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho,$$

тобто

$$|J(\rho,\varphi)|=\rho,$$

а диференціал площі в полярних координатах дорівнює

$$dS=\rho d\rho d\varphi. \tag{3.10}$$

Запишемо формулу переходу від інтеграла в декартових координатах до інтеграла в полярних координатах:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \tag{3.11}$$

Як і у випадку прямокутних декартових координат, обчислення інтеграла в полярних координатах здійснюється зведенням подвійного інтеграла до повторних.

Розглянемо випадки різних областей.

1. Нехай полюс O лежить зовні області D (рис. 3.4), а довільний промінь, що виходить з полюса і проходить через внутрішню точку області D (координатна лінія $\varphi=\text{const}$) перетинає межу області не більше ніж у двох точках.

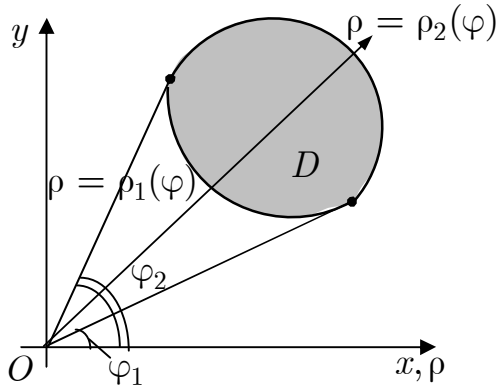

Рис. 3.4

Якщо область D обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути φ_1 та φ_2, і кривими $\rho=\rho_1(\varphi),\rho=\rho_2(\varphi)$, то полярні координати області D^* змінюються в межах $\rho_1\le\rho\le\rho_2,\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$. Тому при переході до повторних інтегралів одержуємо наступну формулу обчислення інтеграла (3.11):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho. \tag{3.12}$$

2. Нехай тепер полюс O розташований всередині області D (рис. 3.5).

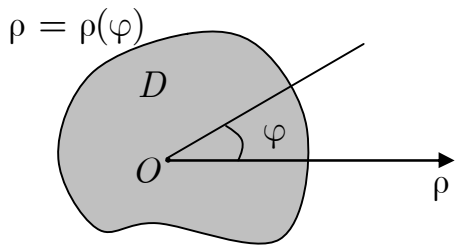

Рис. 3.5

Припустимо, що кожний промінь $\varphi = \text{const}$, що виходить з полюса і проходить через внутрішню точку області D перетинає межу області тільки в одній точці. Нехай полярне рівняння межі області $\rho = \rho(\varphi)$. Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \qquad (3.13)$$

Приклад

Перейти до полярних координат і розставити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де $D = \left\{x^2 + y^2 \le 1, y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}, y \le \sqrt{3}x\right\}$.

❍ Область D є круговим сектором (рис. 3.6).

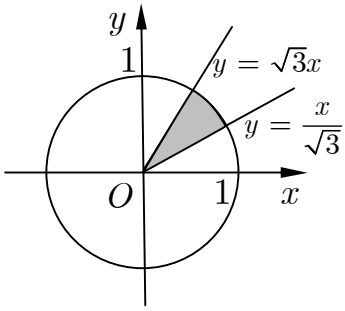

Рис. 3.6

Перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Підставляємо вирази для x та y в рівняння межі області:

1) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 1$, звідси $\rho = 1$ — полярне рівняння кола;

2) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \rho\sin\varphi = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, звідси $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$;

3) $y = \sqrt{3}x \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, тобто $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$.

Отже, область $D^* = \left\{0 \le \rho \le 1, \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right\}$. Запишемо інтеграл за формулою (3.12)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^1 f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \bullet$$

Зауваження

1. Площу області в полярних координатах обчислю-

ють за формулою

$$S = \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D^*} \rho d\rho d\varphi. \qquad (3.14)$$

2. Формулу переходу в подвійному інтегралі до полярної системи координат (3.11) доцільно застосовувати, коли рівняння границі або підінтегральна функція містить вираз $x^2 + y^2$, оскільки в полярних координатах цей вираз спрощується:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2.$$

3. Графічне перетворення області D в область D^* для полярних координат, як правило, не виконують, а тільки узгоджують декартову і полярну системи координат згідно формул (3.9).

3.3.3. Подвійний інтеграл в узагальненій полярній системі координат

Якщо рівняння межі області або підінтегральна функція містить вираз $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, то зручно обчислювати подвійний інтеграл в *узагальненій полярній системі координат*. Узагальнені полярні координати ρ і φ вводять за формулами:

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi, \\ y = b\rho \sin \varphi, \end{cases} \qquad (3.15)$$

де $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Узагальнені полярні координати відображають еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ на прямокутник $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Знайдемо якобіан переходу від прямокутних декартових координат x і y до узагальнених полярних координат ρ і φ:

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Отже, формула заміни змінних для узагальнених полярних координат в подвійному інтегралі має вигляд

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi)ab\rho d\rho d\varphi. \qquad (3.16)$$

Зауваження .

1. Площу області в узагальнених полярних координатах обчислюють за формулою

$$S = \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D^*} ab\rho d\rho d\varphi. \qquad (3.17)$$

2. Формулу (3.16) застосовують, якщо рівняння границі або підінтегральна функція містить вираз

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, оскільки в узагальнених полярних координатах цей вираз має вигляд
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=\rho^2$.

Приклад .

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, де $D: 1\le\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 3, 0\le x\le\frac{2}{3}y$.

❍ Побудуємо область інтегрування D (рис. 3.7).

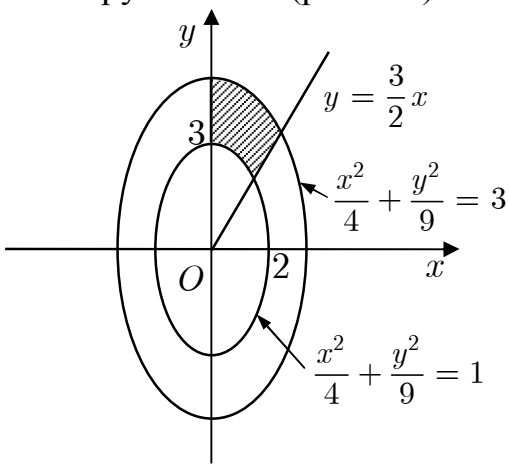

Рис. 3.7

Виходячи з форми області при обчисленні подвійного інтеграла доцільно перейти до узагальнених полярних координат:

$$\begin{cases} x=2\rho\cos\varphi, \\ y=3\rho\sin\varphi, \end{cases} |J(\rho,\varphi)|=6\rho.$$

Перетворимо рівняння ліній, що обмежують область D:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow\rho^2=1\Rightarrow\rho=1;$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=3\Rightarrow\rho^2=3\Rightarrow\rho=\sqrt{3};$

$x=0\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2};$

$x=\frac{2}{3}y\Rightarrow 2\rho\cos\varphi=\frac{2}{3}\cdot 3\rho\sin\varphi\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=1\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}.$

Отже, в узагальнених полярних координатах область $D^*=\left\{1\le\rho\le\sqrt{3},\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

Тоді

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{3}} 6\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi \cdot 6\rho\, d\rho =$$

$$= 36 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d(\sin\varphi) \int\limits_1^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho = 36 \cdot \frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = 18. \bullet$$