АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ПЛОЩИНА ТА ПРЯМА У ПРОСТОРІ

1.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії у просторі

Прямокутна система координат

Три взаємно перпендикулярні осі *Ox, Oy* та *Oz,* що мають спільний початок, точку O та однакову масштабну одиницю, утворюють ***прямокутну систему координат*.**

Відстань між двома точками. Ділення відрізка у даному співвідношенні

Якщо задано точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то тоді ***відстань*** між ними задається формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (3.1)$$

Нехай відрізок AB поділено точкою M у співвідношенні $\lambda > 0$:

$$\frac{AM}{MB} = \lambda\,,$$

тоді (рис. 22)

$$\overline{AM} = \lambda\overline{MB}\,.$$

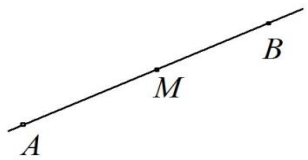

Рис. 22

Якщо $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $M(x, y, z)$, то останню рівність можна переписати у вигляді рівностей координат векторів:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x);$$
$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y);$$
$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z),$$

звідки випливає, що

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\,;\; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\,; \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\;. \qquad (3.2).$$

Формули (3.2) задають ***координати точки*** M***, яка ділить відрізок*** AB ***у співвідношенні*** λ.

Зауважимо, якщо $\lambda = 1$, , то M є серединою відрізку AB

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}\,;\; y = \frac{y_1 + y_2}{2}\,; \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}\;.$$

1.2. Рівняння площини

Загальне рівняння площини

Будь-який ненульовий вектор $\bar{n}=(A,B,C)$, перпендикулярний до площини, називається ***нормальним вектором площини або нормаллю.***

Положення площини в просторі однозначно визначається заданням точки M_0, яка належить площині, та вектором нормалі.

Нехай $\bar{n}=(A,B,C)$ - нормаль площини α, точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ належить площині α, $M(x,y,z)$ - довільна точка. Якщо точка $M(x,y,z)$ належить площині α, то вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ та вектор нормалі $\bar{n}=(A,B,C)$ будуть перпендикулярними (рис. 23), а тому $\bar{n}\cdot\overline{M_0M}=0$, тобто

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.3)$$

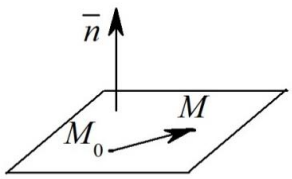

Рис. 23

Рівняння (3.3) називається ***рівнянням площини, що проходить через точку*** $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ***перпендикулярно до вектора*** $\bar{n}=(A,B,C)$. Розкривши дужки та позначивши $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, одержимо ***загальне рівняння площини***

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (3.4)$$

Зауважимо, що рівняння площини – це рівняння першого степеня відносно невідомих x, y та z, в якому коефіцієнтами при невідомих є координати нормального вектора.

Приклад 3.1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-1,2,3)$ та має нормальний вектор $\bar{n}=(2,-5,1)$.

Розв'язання.

Щоб скласти рівняння площини, слід застосувати формулу (3.3):

$$2\cdot(x-(-1))-5\cdot(y-2)+1\cdot(z-3)=0$$

або

$$2x-5y+z+9=0.$$

Приклад 3.2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3,4,-1)$ паралельно двом векторам: $\bar{a}_1=(1,-2,1)$ та $\bar{a}_2=(2,4,-3)$.

Розв'язання.

За нормаль до шуканої площини візьмемо векторний добуток векторів $\bar{a}_1$ та $\bar{a}_2$, тому що за означенням він є перпендикулярним до площини, якій ці вектори паралельні,

$$\bar{n}=\left[\bar{a}_1,\bar{a}_2\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -3\end{vmatrix}=2\bar{i}+5\bar{j}+8\bar{k}.$$

Підставляючи координати точки та вектора нормалі в рівняння (3.3), отримуємо

$$2\cdot(x-3)+5\cdot(y-4)+8\cdot(z-(-1))=0;$$

$$2x+5y+8z-18=0.$$

Рівняння площини у відрізках на осях

Розглянемо повне рівняння площини (3.4). Оскільки $D\neq 0$, то перенесемо його в праву частину рівняння та поділимо рівняння на ($-D$), отримаємо

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1$$

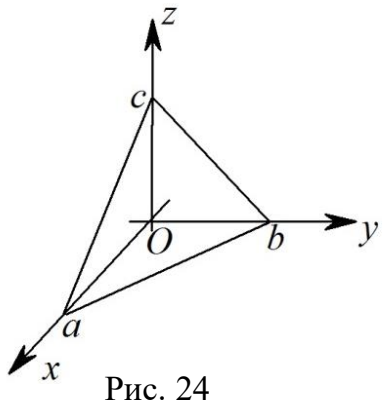

Рис. 24

або

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{C}{D}}=1. \qquad (3.5)$$

Позначимо в останньому рівнянні –

$$a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C},$$

тоді (3.5) набуває вигляду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (3.6)$$

Рівняння (3.6) називається ***рівнянням площини у відрізках на осях.***

Зауважимо, що числа a, b, c є величинами відрізків, які площина відсікає на осях координат Ox, Oy, Oz відповідно, рахуючи від початку координат (рис. 24).

Рівняння площини, що проходить через три дані точки

Побудуємо рівняння площини, що проходить через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ та $M_3(x_3,y_3,z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 25). Нехай точка $M(x,y,z)$ – довільна точка площини. Тоді вектори

$$\overline{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$

$$\overline{M_2M}=(x-x_2,y-y_2,z-z_2),$$

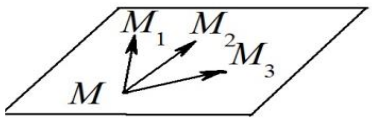

Рис. 4

$$\overline{M_3M} = (x - x_3, y - y_3, z - z_3)$$

належать одній площині, а тому вони є компланарними, і їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\overline{M_1M}, \overline{M_2M}, \overline{M_3M}\right) = 0.$$

Останню рівність можна подати у розгорнутому вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.7)$$

Рівняння (3.7) є ***рівнянням площини, що проходить через три дані точки, які не лежать на одній прямій.***

Приклад 3.3. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки: $M_1(1,0,-2)$, $M_2(3,7,1)$ та $M_2(-5,2,6)$.

Розв'язання.

Для знаходження рівняння площини застосуємо формулу (3.7):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-(-2) \\ 3-1 & 7-0 & 1-(-2) \\ -5-1 & 2-0 & 6-(-2) \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 2 & 7 & 3 \\ -6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, отримуємо

$$50(x-1) - 34y + 46(z+2) = 0 \Rightarrow \ 25x - 17y + 23z + 21 = 0.$$

Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задані дві площини своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Під ***кутом між площинами*** φ будемо розуміти кут між нормалями до площин $\overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{\left|\overline{n}_1\right| \cdot \left|\overline{n}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (3.8)$$

З аналогічних міркувань можна отримати *умови паралельності та перпендикулярності*:

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Rightarrow \overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (3.9)$$

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Приклад 3.4. Встановити, чи є площини $2x-3y-z-3=0$ та $2x+y+z-1=0$ перпендикулярними.

Розв'язання.

Випишемо нормальні вектори до площин:

$$\bar{n}_1=(2,-3,-1),\ \bar{n}_2=(2,1,1).$$

Тоді, скориставшись умовами (3.9), маємо

$$(\bar{n}_1,\bar{n}_2)=2\cdot 2+3\cdot(-1)+(-1)\cdot 1=0.$$

Отже, дві площини є перпендикулярними.

Відстань від точки до площини

Знайдемо відстань від точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$. Ця відстань дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{MM_0}$ на напрямок нормалі до площини $\bar{n}=(A,B,C)$, де точка $M(x,y,z)$ – довільна точка площини (рис. 26). Враховуючи, що $\overline{MM}_0=(x_0-x,y_0-y,z_0-z)$, маємо

$$d=\left|np_{\bar{n}}\overline{MM}_0\right|=\frac{|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.10)$$

Оскільки $Ax+By+Cz=-D$, з (3.10) отримуємо

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3.11)$$

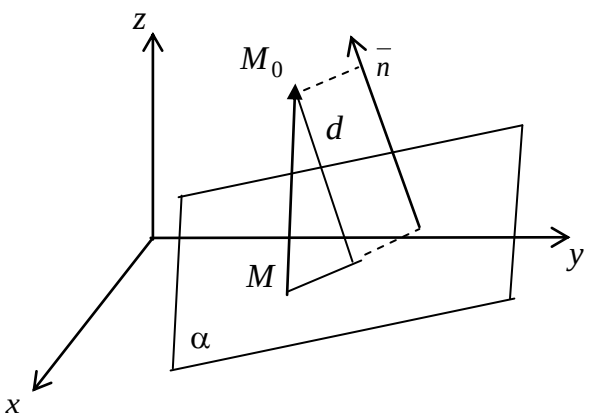

Рис. 26

Приклад 3.5. Знайти відстань від точки $M(1,2,3)$ до площини $2x-y+2z+3=0$.

Розв'язання.

За формулою (3.11) маємо

$$d = \frac{|2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3|}{\sqrt{4+1+4}} = 3.$$

Відстань між двома паралельними площинами.

Нехай задано дві паралельні площині

$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

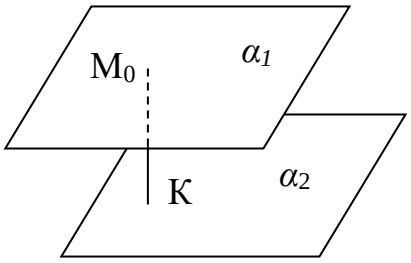

Рис. 27

Візьмемо будь-яку точку на першої площині. Обговоримо, як це зробити. Рівняння площини має три змінні, тобто дві змінні є вільними, їм можна надати любі довільні значення, у тому числі і нульові. Третя змінна визначиться вирішенням рівняння площини. Нехай в площині α_1 $y = y_0$, $z = z_0$, тоді $x_0 = -\frac{D_1 - B_1y_0 - C_1z_0}{A_1}$ і точка буде мати координати $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Відстань між паралельними площинами – це довжина перпендикуляра M_0K, яку можна здобути за формулою (3.11) відстані точки M_0 до площини α_2:

$$d = \frac{|A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2|}{\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}}$$

Якщо покласти $y_0 = z_0 = 0$, тоді $x_0 = -D_1/A_1$ і точка буде мати координати $M_0(-D_1/A_1, 0, 0)$, а відтань між паралельними площинами визначиться формулою: $d = \frac{\left|-\frac{A_2D_1}{A_1} + D_2\right|}{\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}}$.

1.3. Пряма лінія в просторі

Пряма лінія в просторі задається як перетин двох непаралельних площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \qquad (3.12)$$

Рівняння (3.12) визначають ***загальні рівняння прямої у просторі.***

Канонічні рівняння прямої

Введемо поняття напрямного вектора.

Напрямним вектором прямої називається будь-який ненульовий вектор, паралельний даній прямій.

Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – деяка точка прямої L, точка $M(x, y, z)$ – довільна точка прямої L, а вектор $\overline{q} = (l, m, n)$ – напрямний вектор цієї прямої (рис. 27). Виходячи з означення напрямного вектора, маємо $\overline{M_0M} \parallel \overline{q} = (l, m, n)$. Оскільки координати паралельних векторів пропорційні, отримуємо рівність

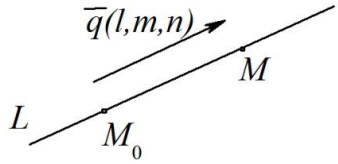

Рис. 28

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (3.13)$$

Рівняння (3.13) називаються ***канонічними рівняннями прямої.***

Рис. 6

Рівність нулю одного зі знаменників в канонічному рівнянні означає рівність нулю відповідної координати напрямного вектора.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

У випадку, коли пряма проходить через дві дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, вектор $\overline{q} = \overline{M_2M_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можна вважати напрямним, і рівняння (3.13) набуде вигляду

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (3.14)$$

Отримані рівняння (3.14) є ***рівняннями прямої, що проходить через дві дані точки:*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Параметричні рівняння прямої

Введемо параметр t таким чином:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Розв'язуючи останні рівняння відносно x, y, z, отримуємо ***параметричні рівняння прямої, що проходить через точку*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***та має напрямний вектор*** $\overline{q} = (l, m, n)$***:***

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Зауваження. Знаючи рівняння прямої у параметричному або канонічному вигляді завжди можна одержати координати напрямного

вектора $\bar{q} = (l, m, n)$ та координати однієї точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить прямій.

Перехід від загальних рівнянь прямої до канонічних

Нехай пряма задається загальними рівнянням (3.12)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

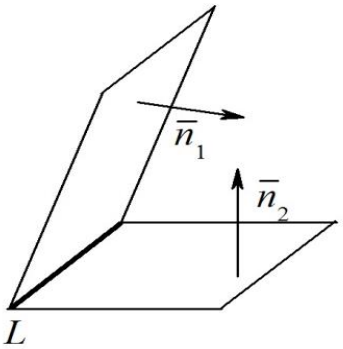

Рис. 29

Для того щоб отримати канонічне рівняння прямої, необхідно знати напрямний вектор $\bar{q}$ прямої та точку M_0, що лежить на ній. Рівняння (3.12) визначають перетин по прямої L площин з нормальними векторами $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ відповідно (рис.29). Оскільки пряма L належить обом площинам, то вона перпендикулярна до векторів $\bar{n}_1$ та $\bar{n}_2$, і вектор $\left[\bar{n}_1, \bar{n}_2\right]$ буде напрямним до прямої L. Отже,

$$\bar{q} = \left[\bar{n}_1, \bar{n}_2\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Координати точки M_0 можна отримати із системи (3.12), надавши одній з координат довільне значення, наприклад $z_0 = 0$. Розв'язуючи отриману систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0, \end{cases}$$

знаходимо координати x_0, y_0.

Приклад 3.6. Записати канонічні рівняння прямої, заданої як перетин двох площин:

$$\begin{cases} x - y + 3z - 1 = 0, \\ 2x + y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Нормальні вектори до площин – $\bar{n}_1 = (1,-1,3)$ та $\bar{n}_2 = (2,1,1)$, їхній векторний добуток, а отже, і напрямний вектор шуканої прямої

$$\bar{q} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{k}.$$

Поклавши $z_0 = 0$, розв'язуємо систему

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ 2x + y - 2 = 0, \end{cases} \quad x_0 = 1,\ y_0 = 0.$$

Тепер запишемо канонічні рівняння прямої (3.13), що проходить через точку $M_0(1,0,0)$ паралельно вектору $\bar{q} = (-4,5,3)$. Відповідь:

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}.$$

Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності та паралельності прямих

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Під ***кутом між двома прямими*** будемо розуміти кут між їх напрямними векторами.

Виходячи з цього, отримуємо формулу для обчислення косинусу кута між прямими, а також умови перпендикулярності та паралельності:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + +n_2^2}}; \tag{3.16}$$

$$L_1 \,//\, L_2 \Leftrightarrow \bar{q}_1 \,//\, \bar{q}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}; \tag{3.17}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{q}_1 \perp \bar{q}_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Умови, за якими дві прямі перетинаються або схрещуються

Дві просторові прямі, що перетинаються, мають загальну точку і через них можна провести площину, причому тільки одну, і навпаки, якщо дві непаралельні просторові прямі належать однієї площині, то вони перетинаються. Дві просторові прямі, що схрещуються, не мають загальної точки і не можуть належати однієї площині.

Нехай дві просторові прямі задано канонічними рівняннями:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Якщо ці прямі перетинаються, то напрямні вектори $\overline{q}_1=(l_1,m_1,n_1)$, $\overline{q}_2=(l_2,m_2,n_2)$ та вектор $\overline{M_2M_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ належать однієї площині, тобто вони компланарні і задовольняють умові:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0/$$

У випадку, коли непаралельні просторові прямі не перетинаються, вектори $\overline{q}_1=(l_1,m_1,n_1)$, $\overline{q}_2=(l_2,m_2,n_2)$ і $\overline{M_2M_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ не компланарні та задовольняють умові:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Зауважимо, що у випадку двох паралельних просторових прямих координати напрямних векторів пропорційні і визначник дорівнює нулю, загальної точки перетину паралельні прямі не мають, але через них завжди можна провести площину, притому тільки одну.

Приклад. Встановити, перетинаються чи ні прямі $L_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{4}$, $L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{3}$. Якщо вони перетинаються, то знайти їх точку перетину.

Розв'язання.

Точки M_1 та M_2 мають координати: $M_1(2,0,-2)$, $M_2(1,1,-3)$. Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 0-1 & -2+3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=3-4+4-1-8+6=0\Rightarrow \text{прямі}$$

перетинаються. Щоб знайти точку перетину, складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}, \\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{z+2}{4}, \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}, \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z+3}{3}. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x-2=2y, \\ 4x-8=2z+4, \\ 2x-2=y-1, \\ 3x-3=z+3. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x-2y=2, \\ 4x-2z=12, \\ 2x-y=1, \\ 3x-z=6. \end{cases}$$

. Знайдемо розв'язок методом Жордана-Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 12 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)\sim\left\| e_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=e_2\right\|\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)\sim\left\| e_2\cdot+e_4=e_4\right\|\sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left\| e_3 \cdot (-2) + e_1 = e_1 \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{l} e_4 \cdot 3 + e_1 = e_1 \\ e_4 \cdot 2 + e_2 = e_2 \\ e_4 \cdot (-2) + e_3 = e_3 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left\| e_3 \cdot (-1) = e_3 \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Оскільки $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$, система має єдиний розв'язок: $\begin{cases} x = 0, \\ y = -1, \\ z = -6, \end{cases}$ тобто координати точки перетину прямих $K(0, -1, -6)$.

Відстань від точки до прямої в просторі

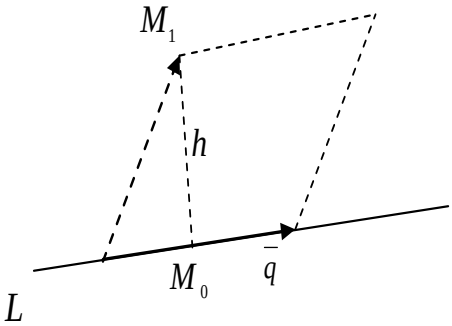

Рис. 30

Нехай пряма задана рівняннями

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ не належить даній прямій. Відстань h між точкою M_1 та прямою L дорівнює висоті паралелограма, побудованого на векторах $\overline{M_0 M_1}$ та $\overline{q}$ (рис. 30):

$$h = \frac{S}{|\overline{q}|} = \frac{\left|\left[\overline{M_0 M_1}, \overline{q}\right]\right|}{|\overline{q}|}. \qquad (3.18)$$

Відстань між двома паралельними прямими

Обчислюється також, як і відстань між точкою і прямою. За точку обираємо точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на першій прямій та застосовуємо формулу (3.18) відстані від точки до другої прямої $h == \frac{\left|\left[\overline{M_1 M_2}, \overline{q_2}\right]\right|}{|\overline{q_2}|}$, де чисельник є модулем векторного добутку $\left|\left[\overline{M_1 M_2}, \overline{q_2}\right]\right| = \left\| \begin{array}{ccc} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{array} \right\|$, а знаменник – модулем напрямного вектора другої прямої $|\overline{q_2}| = \sqrt{l_2^{\,2} + m_2^{\,2} + n_2^{\,2}}$.

1.4. Взаємне розташування прямої та площини

Кут між прямою та площиною, умови паралельності та перпендикулярності

Розглянемо площину та пряму, які відповідно задані рівняннями

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.19}$$

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{3.20}$$

Під ***кутом між прямою та площиною*** розуміють кут між прямою та її проекцією на площину.

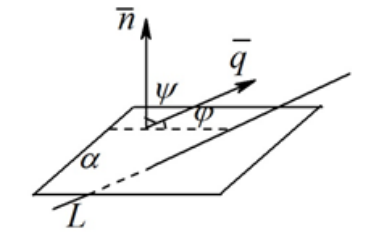

Рис. 31

Через ψ позначимо кут між векторами $\bar{n} = (A, B, C)$ та $\bar{q} = (l, m, n)$ (рис. 30), тоді

$$\cos\psi = \frac{(\bar{n}, \bar{q})}{|\bar{n}||\bar{q}|}.$$

Оскільки $\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\psi$, запишемо формулу

$$\sin\varphi = \frac{(\bar{n}, \bar{q})}{|\bar{n}||\bar{q}|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{3.21}$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямих випливають з відповідних умов для векторів:

$$\text{пл.}\alpha \parallel \text{пр.}L \Leftrightarrow \bar{n} \perp \bar{q} \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0; \tag{3.22}$$

$$\text{пл.}\alpha \perp \text{пр.}L \Leftrightarrow \bar{n} \,||\, \bar{q} \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Приклад 3.7. Перевірити, чи перпендикулярні пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-5}{1}$ та площина $-6x + 9y - 3z + 10 = 0$.

Розв'язання.

Перевіримо виконання умови перпендикулярності прямої та площини (3.22):

$$\frac{-6}{2} = \frac{9}{-3} = \frac{-3}{1}.$$

Отже, пряма та площина перпендикулярні.

Умова належності прямої площині

Пряма (3.20) належить площині (3.19) у випадку, якщо пряма та площина паралельні і будь-яка точка прямої належить площині, нехай це буде точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тобто маємо умови

$$Al + Bm + Cn = 0,$$
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (3.23)$$

Точка перетину прямої та площини

Для того щоб знайти точку перетину прямої (3.20) та площини (3.19), треба записати рівняння прямої у параметричному вигляді (3.15), отримані вирази для x, y та z підставити у рівняння площини (3.19). В результаті таких дій маємо:

$$A(lt + x_0) + B(mt + y_0) + C(nt + z_0) + D = 0,$$
$$t(Al + Bm + Cn) = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)$$

Можливі три випадки:

1) Якщо пряма перетинає площину, то $Al + Bm + Cn \neq 0$. Знаходимо значення параметра t, яке відповідає точці перетину за формулою $t = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$. Знайдене значення параметра підставляємо у параметричні рівняння прямої та визначаємо координати точки перетину.

2) Якщо пряма паралельна площині, але не належить їй то $Al + Bm + Cn = 0$, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тоді одержуємо рівняння $t \cdot 0 = const$ ($const \neq 0$), яке не має розв'язків (тобто пряма і площина не мають жодної спільної точки).

3) Якщо пряма лежить в площині, то $Al + Bm + Cn = 0$ та $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Одержуємо рівняння $t \cdot 0 = 0$, яке має безліч розв'язків (тобто пряма і площина мають безліч спільних точок).

Приклад 3.8. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$ та площини $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Розв'язання.

Параметричні рівняння даної прямої мають вигляд

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = 6t \end{cases}$$

Підставляємо вирази для x, y та z в рівняння площини:

$$2(t+1) + 3(-2t-1) + 6t - 1 = 0, \; t = 1.$$

Отже, координати точки перетину такі:

$$x_0 = 1 + 1 = 2,\ y_0 = -2 \cdot 1 - 1 = -3,\ z_0 = 6 \cdot 1 = 6.$$

Маємо відповідь: $M_0(2,-3,6)$.

Точка перетину трьох площин

Три площини у просторі можуть мати або одну точку перетину, або перетинатися по загальній для всіх площин прямій (пучок площин), або мати дві чи три паралельні прямі попарного перетину площин і при цьому не мати жодної загальної точки перетину усіх трьох площин, або взагалі не перетинатися (у випадку трьох паралельних не співпадаючих площин).

Нехай площини задані рівняннями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\alpha_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

Точка перетину визначається розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases},$$

Якщо головний визначних системи $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$, то ранг матриці коефіцієнтів дорівнюю трьом, число невідомих теж три, і система має єдиний розв'язок, тобто три площині мають одну точку перетину. Якщо $\Delta = 0$, ранг матриці коефіцієнтів два, і ранг розширеної матриці теж два, то усі три площини перетинаються по спільній прямій. Якщо ранг матриці коефіцієнтів не співпадає з рангом розширеної матриці, то площини не мають жодної загальної точки перетину. Якщо ранг матриці коефіцієнтів і ранг розширеної матриці дорівнює одиниці, це значить, що три рівняння описують одну і ту же площину.