ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

2.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії на площині

Прямокутна система координат. Перетворення координат

Дві взаємно перпендикулярні осі Ox та Oy, що мають спільний початок точку O та однакову масштабну одиницю, утворюють ***прямокутну систему координат на площині.***

При розв'язанні деяких задач виникає необхідність разом з даною системою координат вводити інші системи координат. Відкіля випливає задача: знаючи координати точки в одній (старій) системі координат, знайти координати цієї ж точки в іншій (новій) системі координат.

Під ***паралельним перенесенням осей координат*** будемо розуміти перехід до нової системи координат, при якому змінюється розташування початку координат, а напрямок осей та масштабна одиниця залишаються незмінними.

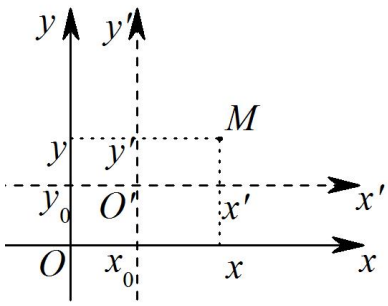


Рис. 32

Нехай задана прямокутна система координат Oxy та точка M з координатами x, y в цій системі координат. Перенесемо початок координат в точку $O'(x_0, y_0)$, отримуючи нову прямокутну систему координат $O'x'y'$ (рис. 32). Нехай точка M має координати x', y' в новій системі координат $O'x'y'$. Тоді отримуємо зв'язок між старими та новими координатами у вигляді

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Формули (3.24) є ***формулами перетворення координат при паралельному перенесенні.***

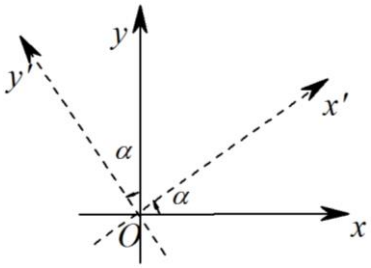


Рис. 33

Під ***поворотом осей координат*** будемо розуміти таке перетворення координат, при якому обидві осі повертаються на той самий кут, а початок координат та масштаб залишаються незмінними (рис. 33).

Формули перетворення координат при повороті на кут α мають вигляд:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Приклад 3.9. Визначити координати точки $M(3,5)$ в новій системі координат, початок якої знаходиться в точці $(-2,1)$, а осі паралельні початкової системі координат.

Розв'язання.

Застосовуємо формули (3.24):

$$\begin{cases} x' = 3 + 2 = 5, \\ y' = 5 - 1 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $M(5,4)$.

Відстань між двома точками. Ділення відрізка у даному співвідношенні. Площа трикутника

Якщо задано точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, тоді відстань між ними задається формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (3.25)$$

Нехай відрізок AB поділено точкою M у співвідношенні $\lambda > 0$:

$$\frac{AM}{MB} = \lambda,$$

тоді

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (3.26)$$

Формули (3.26) задають ***координати точки*** M, ***яка ділить відрізок*** AB ***у співвідношенні*** λ.

Якщо $\lambda = 1$, то M середина відрізку AB

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Якщо трикутник має координати $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, то його ***площу*** можна обчистити за формулою

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \qquad (3.27)$$

2.2. Рівняння прямої на площині

В даному розділі не будемо зосереджуватися на доведеннях, оскільки вони повторюють аналогічні міркування попереднього параграфа.

Загальне рівняння прямої

Розглянемо рівняння першого степеня відносно x та y

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.28}$$

де A, B, C довільні числа, причому A, B одночасно не дорівнюють нулю. Рівняння (3.28) називається ***загальним рівнянням прямої***.

Рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{3.29}$$

називається ***рівнянням прямої, що проходить через задану точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***перпендикулярно заданому вектору*** $\bar{n} = (A, B)$ (рис. 34).

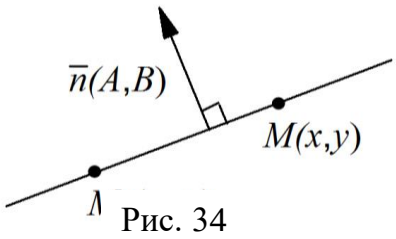


Рис. 34

Рис. 12

Вектор $\bar{n} = (A, B)$, перпендикулярний до прямої, називається вектором ***нормалі***, або ***нормальним вектором прямої***.

Неповні рівняння прямої

Загальне рівняння прямої називається ***повним***, якщо всі його коефіцієнти не дорівнюють нулю. Якщо хоча б один з коефіцієнтів дорівнює нулю, то рівняння називається ***неповним***.

Рівняння прямої у відрізках на осях

Перепишемо повне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0$$

у вигляді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{3.30}$$

де a та b позначені як

$$a = \frac{-C}{A},\ b = \frac{-C}{B}.$$

Отримане рівняння (3.30) називається ***рівнянням прямої «у відрізках».***

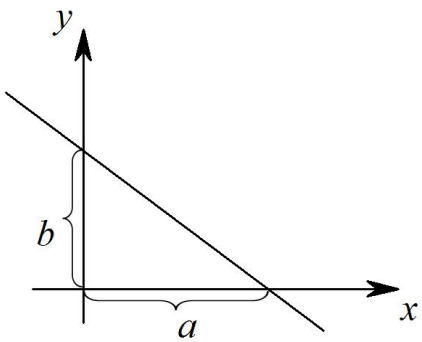


Рис. 35

Числа a і b відповідають величинам відрізків, що пряма відсікає на осях OX та OY (рис. 35). Дійсно, поклавши $x = 0$, отримуємо $y = b$. Отже, координати точки перетину з віссю OY – $(0, b)$. Аналогічно з віссю OX – $(a, 0)$.

Приклад 3.10. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,4)$ та відтинає на координатних осях ненульові відрізки

рівної довжини.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої у відрізках (3.30). З умови задачі маємо $|a| = |b|$. Оскільки точка належить прямій, то виконується рівність $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$, $a \neq 0$. Отже, для знаходження a та b маємо такі співвідношення:

$$\begin{cases} b = a \\ b + 4a = ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a \\ 5a = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} b = -a \\ b + 4a = ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ 3a = -a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Відповідь: умові задачі задовольняють дві прямі $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$, $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} = 1$.

Канонічне рівняння прямої

Будь-який ненульовий вектор $\bar{q} = (l, m)$, паралельний даній прямій, називається ***напрямним вектором прямої***.

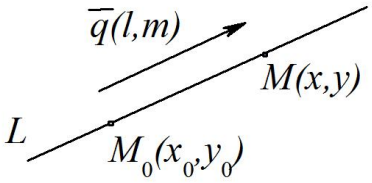


Рис. 36

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\bar{q}$ (рис. 36), має вигляд

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad (3.31)$$

і називається ***канонічним рівнянням прямої***.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма проходить через дві дані точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 37). Як і в просторовому випадку, візьмемо за напрямний вектор до прямої вектор $\bar{q} = \overline{M_2M_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Оскільки пряма проходить через точку M_1, відповідне канонічне рівняння буде мати вигляд

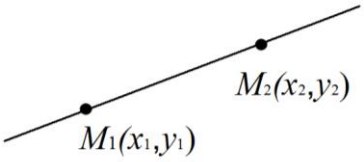


Рис. 37

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (3.32)$$

Рівняння (3.32) називається ***рівнянням прямої, що проходить через дві дані точки:*** $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

Приклад 3.11. Пряма проходить через точки $A(2,3)$, $B(-4,-1)$ та перетинає вісь OY в точці C. Знайти координати точки C.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві дані точки (3.32):

$$\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-3}{-1-3}\Leftrightarrow\frac{x-2}{-6}=\frac{y-3}{-4}\Leftrightarrow 2x-3y+5=0.$$

Оскільки точка C належить осі OY, то її абсциса дорівнює 0. Поклавши в рівнянні прямої $x=0$, отримуємо $y=\frac{5}{3}$.

Отже, маємо точку $C\left(0,\frac{5}{3}\right)$.

Параметричні рівняння прямої

Розв'язавши канонічні рівняння прямої

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=t$$

відносно x, y, отримуємо **параметричними** ***рівняннями прямої, що проходить через точку*** $M_0(x_0, y_0)$ ***та має напрямний вектор*** $\bar{q}=(l,m)$.

$$\begin{cases} x=lt+x_0, \\ y=mt+y_0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Перетворимо канонічне рівняння прямої (3.31) до вигляду

$$y-y_0=\frac{m}{l}(x-x_0),$$

Звідки, увівши позначення $k=\frac{m}{l}$, отримуємо

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{3.34}$$

Кутом нахилу α ***прямої до осі Ox*** будемо називати кут, що відкладається від додатного напрямку осі OX до прямої проти годинникової стрілки (рис. 38).

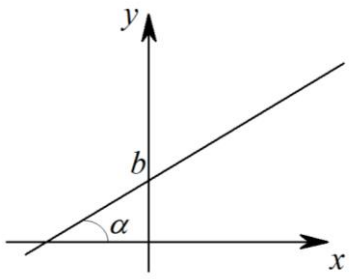


Рис. 38

Можна показати, що k в рівнянні (3.34) дорівнює $\mathrm{tg}\alpha$, де α – кут нахилу прямої до осі Ox. Число

$$k=\mathrm{tg}\alpha \tag{3.35}$$

називається ***кутовим коефіцієнтом*** прямої, а рівняння (3.34) – ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*** k***, що проходить через точку*** $M_0(x_0, y_0)$.

Розкривши дужки в рівнянні (3.34), неважко отримати таке рівняння:

$$y = kx + b, \tag{3.36}$$

де через b позначено вираз $y_0 - kx_0$. Рівняння (3.36) називають ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*** k. Відмітимо, що b у виразі (3.36) дорівнює ординаті точки перетину прямої з віссю OY (рис. 37).

Якщо пряма паралельна осі *OX*, то $\alpha = 0$, звідки $\mathrm{tg}\alpha = 0$. Отримуємо рівняння $y = b$. У випадку, коли пряма перпендикулярна осі *OX*, тобто $\alpha = \frac{\pi}{2}$ та $\mathrm{tg}\alpha$ не існує, маємо пряму $x = a$.

Приклад 3.12. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A\left(-2, \frac{2}{5}\right)$ та утворює з віссю OX кут, що дорівнює $\mathrm{arctg}\ 3$.

Розв'язання.

Виходячи з формули (3.35), отримуємо $k = 3$. Тоді рівняння прямої, застосовуючи формулу (3.34), запишемо як

$$y - \frac{2}{5} = 3(x+2) \Leftrightarrow 15x - 5y + 32 = 0.$$

Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

а) нехай дві прямі задано загальними рівняннями

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Нормалі до заданих прямих відповідно мають вигляд $\bar{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2)$. Кут між прямими L_1 та L_2 – це кут між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}$ та $\overrightarrow{n_2}$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.37}$$

Аналогічно отримуємо умови паралельності та перпендикулярності прямих:

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 // \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \tag{3.38}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

б) нехай дві прямі задано канонічними рівняннями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

Кут між прямими в цьому випадку збігається з кутом між напрямними векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \quad . \tag{3.39}$$

Умови паралельності та перпендикулярності отримуємо у вигляді

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \bar{q}_1 // \bar{q}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}; \tag{3.40}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{q}_1 \perp \bar{q}_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0.$$

в) нехай прямі задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом

$$L_1 : y = k_1 x + b_1;$$

$$L_2 : y = k_2 x + b_2.$$

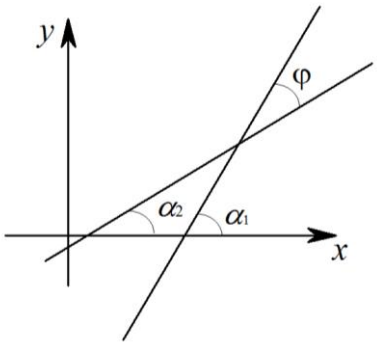


Рис. 39

Для того щоб отримати формулу для обчислення кута між прямими, позначимо кути нахилу прямих L_1 та L_2 через α_1 та α_2 (рис. 39). Тоді $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Якщо $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2 \mathrm{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Отже,

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{3.41}$$

Якщо у формулі (3.41) поміняти місцями k_1 та k_2, то отримаємо суміжний кут. Якщо ж треба обчислити гострий кут між прямими, то права частина формули (3.41) береться за модулем

$$\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Умови паралельності та перпендикулярності для даного випадку отримуємо з наступних міркувань. Якщо прямі L_1 та L_2 паралельні, то $\varphi = 0$, та з формули (3.41) $k_2 - k_1 = 0$. Отже,

$$L_1 // L_2 \Rightarrow k_1 = k_2. \tag{3.42}$$

У випадку, коли L_1 та L_2 перпендикулярні, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ та $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$.

Звідси

$$k_2 = \mathrm{tg}(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}) = -\mathrm{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{k_1}.$$

Таким чином, отримуємо умову перпендикулярності прямих у вигляді

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1. \qquad (3.43)$$

Приклад 3.13. При яких значениях α прямі $2x - 3y + 4 = 0$ і $\alpha x - 6y + 7 = 0$ паралельні та перпендикулярні?

Розв'язання.

Оскільки рівняння задано в загальному вигляді, то застосуємо умови (3.38)

- паралельності:

$$\frac{2}{\alpha} = \frac{-3}{-6} \Rightarrow \alpha = 4;$$

- перпендикулярності:

$$2\alpha + 18 = 0 \Rightarrow \alpha = -9.$$

Приклад 3.14. Знайти кут між прямими $y = 2x - 3$, $y = \frac{1}{2}x + 5$.

Розв'язання.

Випишемо кутові коефіцієнти прямих

$$k_1 = 2,\ k_2 = \frac{1}{2}.$$

Тоді за формулою (3.41)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \approx 37^\circ.$$

Відстань від точки до прямої

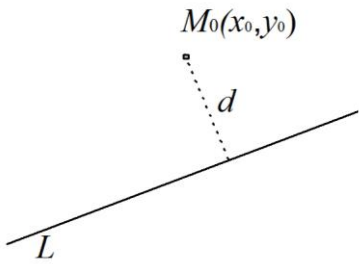


Рис. 40

Нехай задана пряма L: $Ax + By + C = 0$ та точка $M_0(x_0, y_0)$, що не належить прямій (рис. 40). Тоді відстань d від точки M_0 до прямої L обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.44)$$

Приклад 3.15. Знайти відстань від точки $M_0(1,-1)$ до прямої $3x + 4y + 6 = 0$.

Розв'язання.

За формулою (3.44) отримуємо

$$d == \frac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1.$$

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

Лінії, що визначаються рівнянням другого порядку відносно поточних координат

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (3.45)$$

де A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому $A^2+B^2+C^2\neq 0$, називаються *лініями (кривими)* другого порядку.

Розглянемо найпростіші рівняння ліній другого порядку.

3.1. Коло

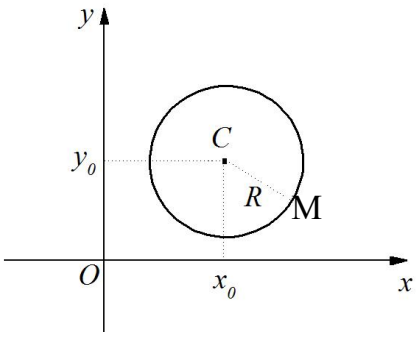


Рис. 41

Колом називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від деякої точки, центра кола, на задану відстань, що називається радіусом кола.

Нехай точка C є центром кола, $R>0$ – радіус кола. В деякій прямокутній системі координат Oxy центр кола нехай має координати x_0, y_0, а точка $M(x,y)$ є довільною точкою кола. Тоді з умови $CM=R$, за формулою (3.2), отримуємо рівняння

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R,$$

звідки

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (3.46)$$

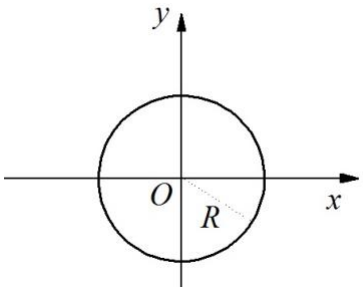


Рис. 42

Рівняння (3.46) – ***рівняння кола з центром у точці*** $C(x_0, y_0)$ ***радіуса*** R (рис. 41).

У випадку, коли $x_0=0, y_0=0$ (рис. 42), отримуємо *канонічне рівняння кола*:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Приклад 3.16. Визначити центр та радіус кола x^2+y^2-2x+ $+4y-20=0$ побудувати його графік.

Розв'язання.

Перегрупуємо доданки так, щоб наступним кроком можна було виділити повні квадрати:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0,$$

звідки

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 20 - 1 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Отримане рівняння є рівнянням кола з центром у точці $C(1,-2)$ та радіусом $R = 5$ (рис. 43).

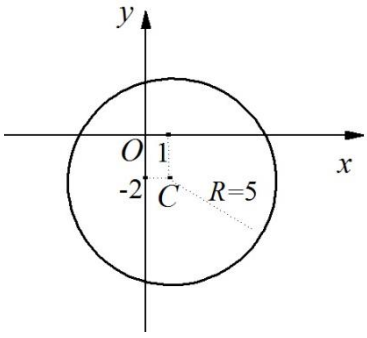


Рис. 43

3.2. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок площини, що називаються фокусами, є величиною постійною, більшою, ніж відстань між фокусами.

Позначимо фокуси як F_1 та F_2, відстань між ними – як $2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпсу до фокусів – як $2a$. За визначенням маємо $2a > 2c$ та $a > c$. Розглянемо таку прямокутну систему координат, в якій фокуси лежать на осі абсцис, а початок координат розділяє відрізок F_1F_2 навпіл.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпса, r_1, r_2 – відстані від точки M до фокусів F_1 та F_2 (фокальні радіуси) (рис. 44).

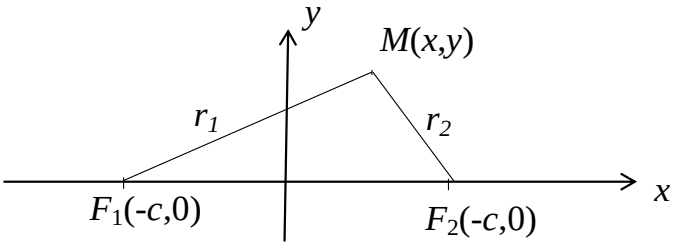


Рис. 44

Зауважимо, що

$$r_1 + r_2 = 2a\,. \qquad (3.47)$$

Застосуємо формулу відстані між двома точками (3.25):

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,,\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,,$$

звідки, враховуючи (3.47), маємо

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,,$$

або

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Піднесемо останню рівність до квадрата

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Розкривши дужки, та привівши подібні члени, одержимо

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc\,.$$

Підносячи до квадрата отриманий вираз, маємо

$$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right)^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

або

$$x^2\left(a^2 - c^2\right) - a^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = 0\,. \qquad (3.48)$$

Введемо позначення

$$b^2 = a^2 - c^2,\ \ (a > c)\,. \qquad (3.49)$$

Тоді з виразу (3.48) отримуємо

$$x^2b^2 - a^2b^2 + a^2y^2 = 0\,.$$

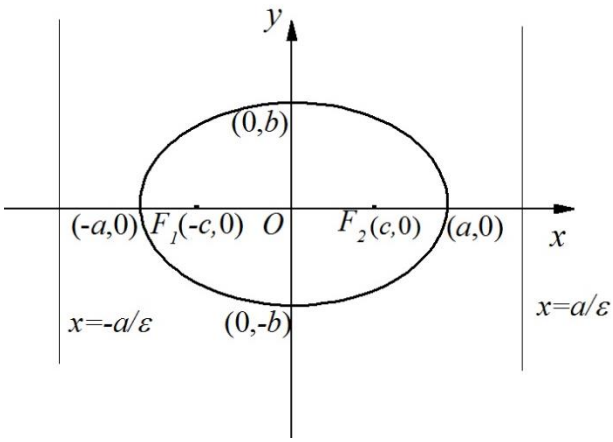
Поділивши останню рівність на a^2b^2 , маємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \qquad (3.50)$$

Рівняння (3.50) – ***канонічне рівняння еліпса***.

Досліджуючи отримане рівняння, побудуємо криву (рис. 45).

Точки $(-a,0)$, $(a,0)$, $(0,-b)$, $(0,b)$ називаються ***вершинами еліпса***, величини a та b – відповідно ***великою та малою півосями***, $2a$ та $2b$ –



великою та малою осями.

Відношення половини фокусної ві Рис. 45 довжини більшої півосі називається ***ексцентриситетом еліпса:***

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Геометричний зміст ексцентриситету. При малому значенні ε числа a та b практично рівні. Дійсно, з виразу (3.49) маємо

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,.$$

Якщо $\varepsilon = 0$, то $a = b$, і еліпс перетворюється в коло. Якщо ж ε близьке до 1, то b набагато менше, ніж a і еліпс буде сплющений.

Зауважимо, що фокальні радіуси r_1 та r_2 точки $M(x, y)$ задовольняють формули:

$$r_1 = a + \varepsilon x\,, \quad r_2 = a - \varepsilon x\,.$$

Дві прямі, перпендикулярні осі OX і розташовані симетрично відносно центра еліпса на відстані a/ε, називаються ***директрисами***:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}\,.$$

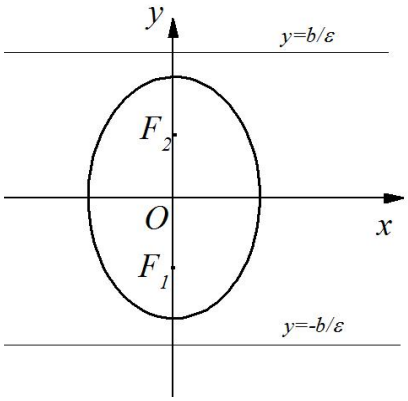


Рис. 46

Зауваження. Раніше ми припус-кали, що $a > b$. Якщо ж $a < b$ (рис. 46), то більша вісь $2b$ лежить на осі OY, а менша вісь $2a$ – на осі Ox. Фокуси такого еліпса знаходяться в точках $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$, де $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Ексцентриситет та директриси такого еліпсу визначаються формулами $\varepsilon = \frac{c}{b}$ та $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Фокально-директоріальна властивість еліпса: відношення відстані будь-якої точки $M(x, y)$ кривої до одного з фокусів до відстані від цієї ж точки до відповідної до цього фокуса директриси – величина постійна та дорівнює ексцентриситету:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon .$$

Зауваження. Рівняння

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

задає еліпс з центром в точці $M(x_0, y_0)$ та півосями a та b, паралельними осям координат *Ox*, *Oy* відповідно.

Приклад 3.17. Звести до канонічного вигляду криву

$$4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0,$$

побудувати її графік та визначити основні характеристики.

Розв'язання.

Застосовуючи метод виділення повних квадратів, виконаємо такі перетворення:

$$4(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) - 32 = 0,$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 3(y^2 + 4y + 4) - 12 - 32 = 0,$$

$$4(x - 1)^2 + 3(y + 2)^2 = 48$$

або

$$\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1.$$

Зауважимо, що дане рівняння визначає еліпс з центром у точці $(1,-2)$.

Виконаємо паралельний перенос системи координат (3.24):

$$\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y + 2. \end{cases} \qquad (3.51)$$

Початок нової системи координат буде збігатися з точкою $O'(1,-2)$. В новій системі координат $O'x'y'$ рівняння еліпса має канонічний вигляд (рис.47):

$$\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{16} = 1.$$

Визначимо основні характеристики отриманого еліпса в системі координат $O'x'y'$: півосі – $a = 2\sqrt{3}, b = 4$, фокуси $F_1(0,-2)$, $F_2(0,2)$, $(c = \sqrt{16-12} = 2)$, ексцентриситет – $\varepsilon = \frac{1}{2}$, рівняння директрис $y' = \pm 8$. Якщо повернутися до початкової системи координат Oxy, то, використовуючи зв'язок (3.51), отримуємо координати фокусів та рівняння директрис у цій системі координат: $F_1(1,-4), F_2(1,0)$, $y = 6, y = -10$.

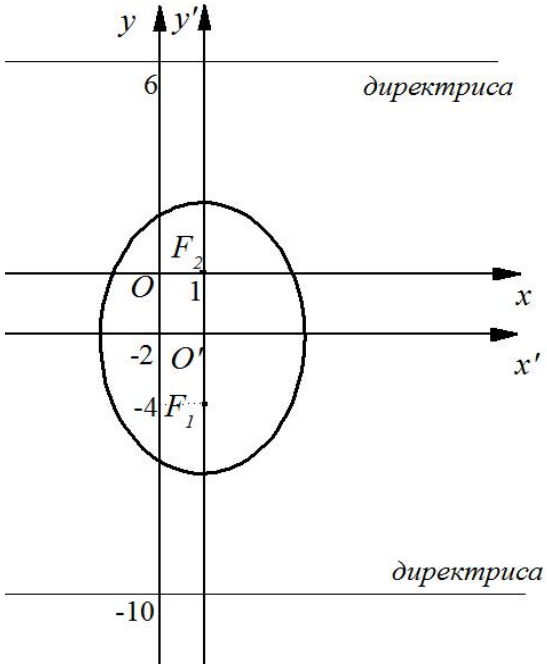


Рис. 47

3.3. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, для яких модуль різниці відстаней до двох даних точок, що називаються фокусами, – величина постійна, менша ніж відстань між фокусами.

Позначимо фокуси як F_1 та F_2, відстань між фокусами – як $2c$, модуль різниці відстаней до довільної точки – як $2a$.

Розглянемо таку прямокутну систему координат, у якій фокуси лежать на осі абсцис, а початок координат ділить відрізок F_1F_2 навпіл.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи, r_1 та r_2 – відстані від цієї точки до фокусів (фокальні радіуси), тоді

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Виконуючи з останньої рівності дії аналогічні тим, що були виконані при отриманні рівняння еліпсу, знаходимо рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.52)$$

Рівняння (3.52) – *канонічне рівняння гіперболи*.

При отриманні рівняння гіперболи було введено позначення

$$b^2=c^2-a^2. \qquad (3.53)$$

Точки $(-a,0)$, $(a,0)$ називаються ***вершинами гіперболи***, величини a та b – відповідно ***дійсною та уявною півосями***, $2a$ та $2b$ – ***дійсною та уявною осями***.

Відношення половини фокусної відстані до довжини дійсної півосі називається ***ексцентриситетом гіперболи***:

$$\varepsilon=\frac{c}{a},\ \ \varepsilon>1.$$

Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ називаються ***асимптотами гіперболи***.

Дві прямі, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи і розташовані симетрично відносно її центра на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$, називаються ***директрисами гіперболи***:

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

Досліджуючи рівняння гіперболи (3.29), побудуємо її графік (рис. 48).

Фокальні радіуси гіперболи можна знайти за формулами

$$r_1=a+\varepsilon x,\ r_2=-a+\varepsilon x,\ x>0,$$

$$r_1=-a-\varepsilon x,\ r_2=a-\varepsilon x,\ x<0.$$

Фокально-директоріальна властивість гіперболи: відношення відстані від будь-якої точки $M(x,y)$ гіперболи до одного з фокусів до відстані від цієї ж точки до відповідної до цього фокуса директриси – величина постійна та дорівнює ексцентриситету:

$$\frac{r}{d}=\varepsilon.$$

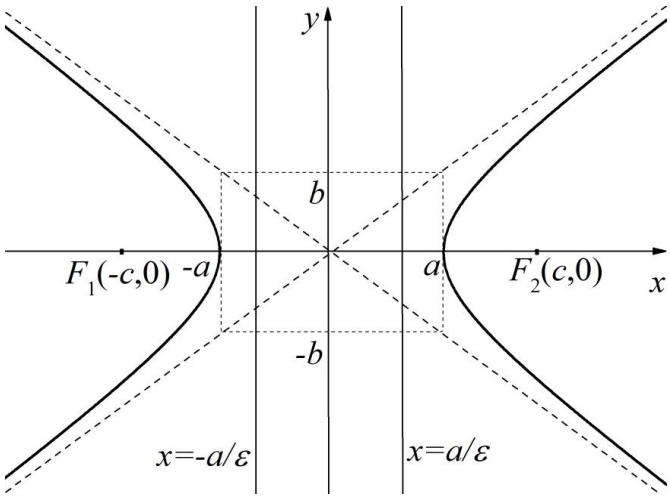


Рис. 48

Зауваження. Поряд з гіперболою $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ введемо до розгляду так звану спряжену до неї гіперболу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Дійсна та уявна осі даної гіперболи – відповідно $2b$ та $2a$. Фокуси розташовані в точках $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$, ексцентриситет задовольняє формулу $\varepsilon=\frac{c}{b}$. Рівняння асимптот спряженої гіперболи мають вигляд $y=\pm\frac{b}{a}x$, рівняння директрис – $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ (рис. 49).

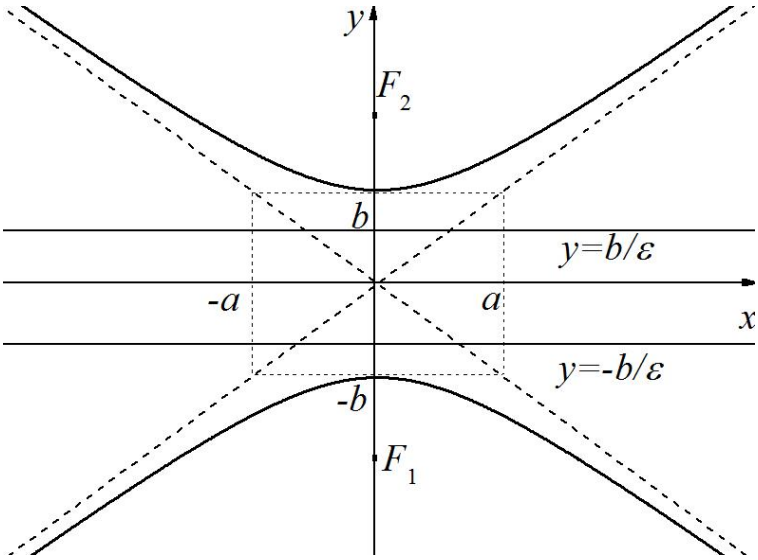


Рис. 49

Гіпербола, рівняння якої має вигляд

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

називається ***рівносторонньою***.

Зауваження. Рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

визначає гіперболу з центром у точці $C(x_0, y_0)$.

Приклад 3.18. Звести до канонічного вигляду криву

$$9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0,$$

побудувати її графік та визначити основні характеристики.

Розв'язання.

Перегрупуємо доданки та виділимо повні квадрати:

$$9(x^2 + 10x) - 16(y^2 - 2y) - 367 = 0;$$

$$9(x^2 + 10x + 25) - 16(y^2 - 2y + 1) - 225 + 16 - 367 = 0;$$

$$9(x+5)^2 - 16(y-1)^2 = 576;$$

$$\frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1.$$

Отримане рівняння є рівнянням гіперболи. Перенесемо початок системи координат в точку $O'(-5,1)$ паралельним переносом:

$$\begin{cases} x' = x + 5, \\ y' = y - 1. \end{cases}$$

У прямокутній системі координат $O'x'y'$ рівняння гіперболи набуде канонічного вигляду (рис. 50):

$$\frac{x'^2}{64} - \frac{y'^2}{36} = 1.$$

Основні характеристики даної гіперболи в системі координат $O'x'y'$: півосі – $a = 8$, $b = 6$; ексцентриситет $\varepsilon = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ ($c = \sqrt{64+36} = 10$); координати фокусів $F_1(-10,0)$, $F_2(10,0)$; рівняння директрис $x' = \pm\frac{32}{5}$; рівняння асимптот $y' = \pm\frac{3}{4}x'$. Повертаючись до початкової системи координат Oxy, отримуємо фокуси $F_1(-15,1)$, $F_2(5,1)$, рівняння директрис $x = \frac{7}{5} = 1,4$, $x = -\frac{57}{5} = -11,4$, рівняння асимптот $3x + 4y + 11 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$.

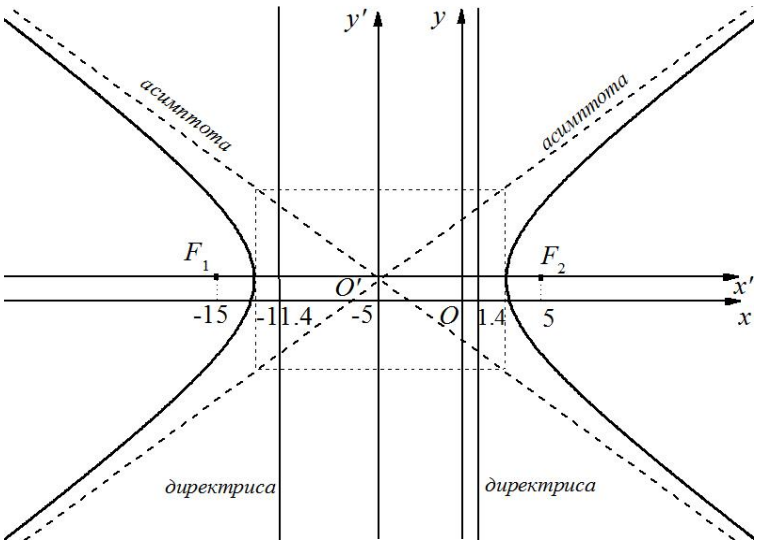


Рис. 50

3.4. Парабола

Параболою називається геометричне місце точок, рівно від-далених від точки, що називається *фокусом*, та прямої, що називається *директрисою*.

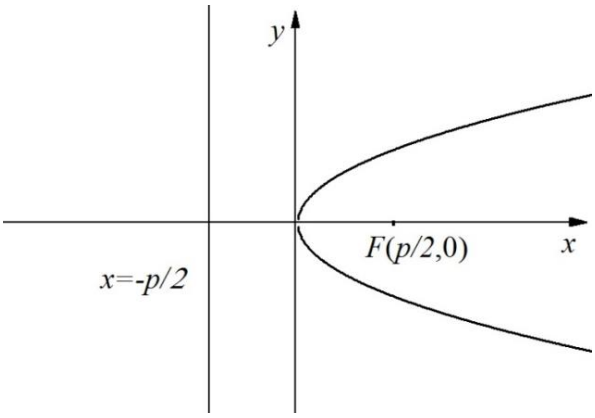


Рис. 51

Розглянемо таку прямокут-ну систему координат, коли вісь *Ox* проходить через фокус перпендикулярно директрисі в напрямку від директриси до фокуса. Початок координат розташований посередині між директрисою та фокусом (рис. 51).

Нехай точка $M(x,y)$ є точкою на параболі. Позначимо через r відстань від точки $M(x,y)$ до фокуса, а через d – відстань від точки $M(x,y)$ до директриси. Нехай відстань від фокуса до директриси дорівнює p, тоді координати фокусу визначатимуться як $F(\frac{p}{2},0)$, а рівняння директриси – як

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Згідно з означенням параболи маємо $r=d$. Оскільки з формули (3.25)

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \text{ та } d=\frac{p}{2}+x,$$

маємо $$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x.$$

Підносячи до квадрата останню рівність та виконуючи перетворення

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\frac{p^2}{4}+px+x^2 \Rightarrow x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=\frac{p^2}{4}+px+x^2,$$

отримуємо рівняння параболи

$$y^2=2px. \qquad (3.54)$$

Рівняння (3.54) – ***канонічне рівняння параболи.***

Геометричний зміст параметра p. Параметр $p>0$ параболи дорівнює відстані від фокусу параболи до директриси.

Відстань r від точки $M(x,y)$ до фокуса називається ***фокальним радіусом***.

Зауваження. Разом з параболою, що задається рівнянням (3.54), введемо до розгляду такі параболи (рис. 52):

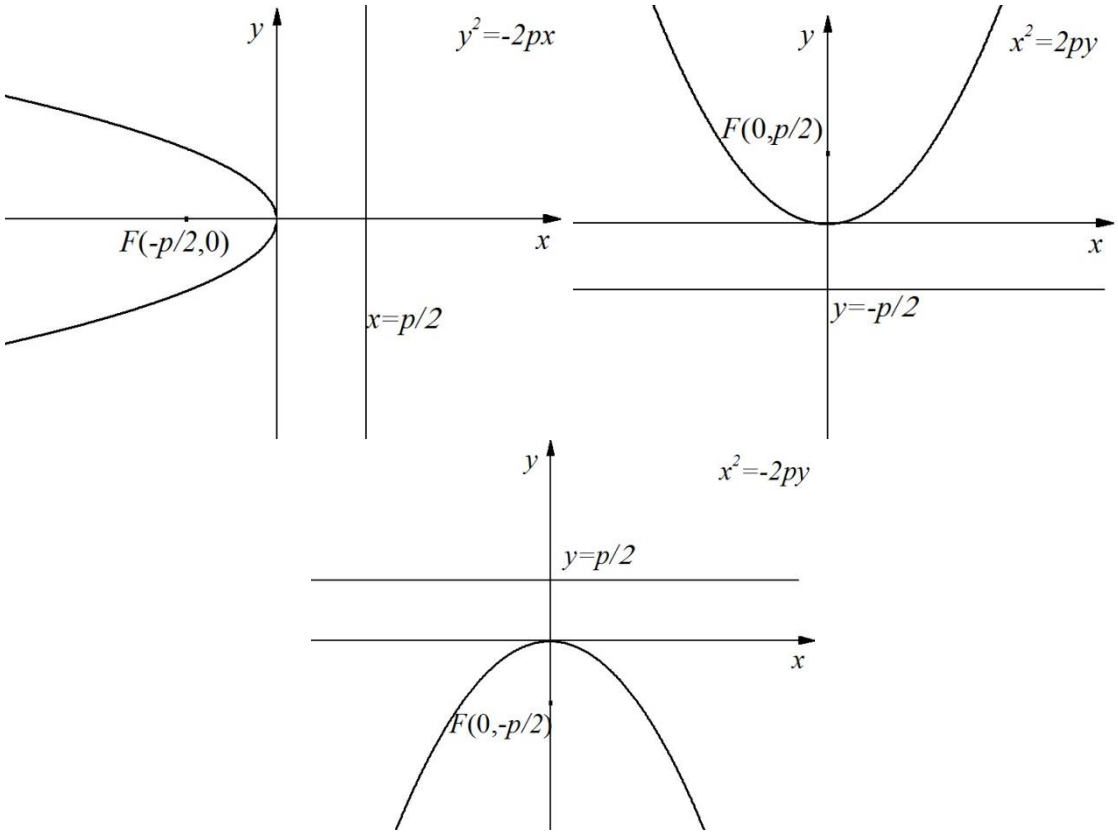


Рис. 52

Зауваження. Рівняння

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$$

є рівнянням параболи з вершиною в точці $C(x_0,y_0)$.

Приклад 3.19. Звести до канонічного вигляду криву $x^2 - 12x + 6y + 42 = 0$, побудувати її графік та визначити основні характеристики.

Розв'язання.

Виділимо повний квадрат у лівій частині рівняння:

$$(x^2 - 12x + 36) + 6y + 42 - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-6)^2 + 6y + 6 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 = -6(y+1).$$

Отже, маємо параболу вершина якої знаходиться в точці $O'(6,-1)$. Паралельним переносом перенесемо початок координат у точку O':

$$\begin{cases} x' = x - 6, \\ y' = y + 1. \end{cases}$$

Тоді рівняння параболи набуде канонічного вигляду

$$x'^2 = -6y'.$$

Параметр отриманої параболи $p = 3$, фокус $F(0,-3/2)$, рівняння директриси $y' = 3/2$. У початковій системі координат Oxy фокус $F(6,-5/2)$, рівняння директриси $y = 1/2$ (рис.53).

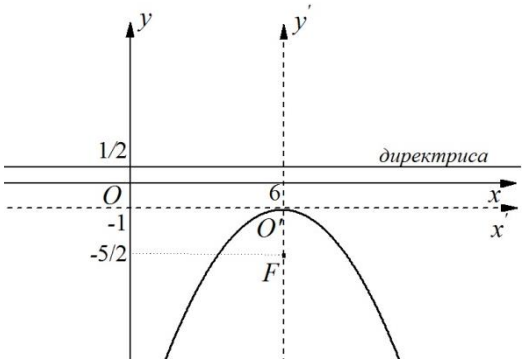


Рис. 53