)
)

IV. ПОХІДНА І ДИФЕРЕНЦІАЛ

1. Означення похідної.

Нехай на деякому проміжку $\langle a; b\rangle$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in \langle a; b\rangle$ і надамо x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x + \Delta x$ також належала проміжку $\langle a; b\rangle$.

Знайдемо приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Похідною функцією $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x позначається одним із таких символів:

$$y'; \qquad \frac{dy}{dx}; \qquad \frac{df}{dx} \quad y'_x; \quad f'(x)$$

Таким чином, за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Приклад: Знайти похідну $y = x^2$.

Надамо аргументу x приросту Δx і обчислимо приріст Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

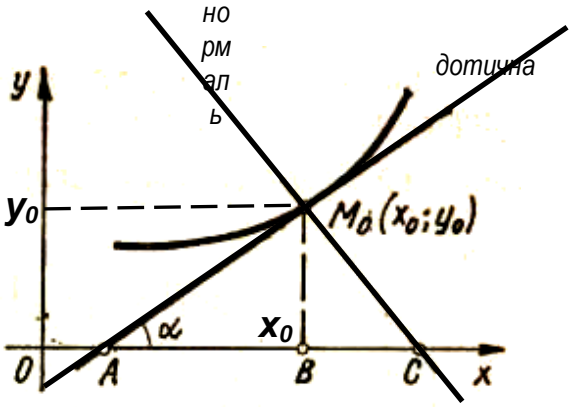
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Отже $(x^2)' = 2x$

2. Геометричний зміст похідної.

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0;\, y_0)$ або тангенс кута α, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі *Ox*, – це похідна $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = tg\alpha = K$$



Використовуючи геометричний зміст похідної, запишемо рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці (x_0, y_0).

Рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Рівняння нормалі:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

2. Правила диференціювання.

$$(CU)' = CU'$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V';$$

$$(UV)' = U'V + UV';$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}.$$

4. Формули диференціювання.

1. $C' = 0;$

2. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u,\ \alpha \in R;$

2а. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$

2б. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$

3. $(\alpha^u)' = \alpha^u \ln\alpha \cdot u',\ \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1;$

4. $(e^u)' = e^u u';$

5. $(log_{\alpha} u)' = \frac{1}{u \ln \alpha} u';$

6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} u';$

7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

9. $(\mathrm{tg}\ u)' = \frac{1}{cos^2 u} u';$

10. $(\mathrm{ctg}\ u)' = -\frac{1}{sin^2 u} u';$

11. $(\mathrm{sh}\ u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u';$

12. $(\mathrm{ch}\ u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u';$

13. $(\mathrm{th}\ u)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u';$

14. $(\mathrm{cth}\ u)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} u';$

15. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{u}^2}} u';$

16. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{u}^2}} u';$

17. $(\mathrm{arctg}\ u)' = \frac{1}{1+u^2} u';$

18. $(\mathrm{arcctg}\ u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'.$

5. Похідна функції

Похідна функції, заданої параметрично. Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

Тоді похідну, знаходять за формулою

$$y_x = \frac{y_t}{x_t} = \frac{\psi'(t)}{\psi'(t)}$$

Приклади

1) $y=3x^3+10x^2-2x+6$

$y'=9x^2+20x-2;$

2) $y=(3x^4-5x^2+1)(6x^2-7x+2)$

$y'=(3x^4-5x^2+1)'(6x^2-7x+2)+(3x^4-5x^2+1)(6x^2-7x+2)'=(12x-10x+1)(6x^2-7x+2)+(3x^4-5x^2+1)(12x-7);$

3) $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$

$y'=(x^2-3x+3)'(x^2+2x-1)+(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)'=(x^2-3)(x^2+2x-1)+(x^2-3x+3)(2x+2);$

4) $y=\frac{x^2-1}{3x^3+5}$

$y'=\frac{(x^2-1)'(3x^3+5)-(x^2-1)(3x^3+5)'}{(3x^3+5)^2}=\frac{2x(3x^3+5)-(x^2-1)(9x^2)}{(3x^3+5)^2}$

$$\boxed{(U^\alpha)'=\alpha U^{\alpha-1}\cdot U'}$$

1) $y=(3x^4+5x-1)^{10}$

$y'=10(3x^4+5x-1)^9(3x^4+5x-1)'=10(3x^4+5x-1)^9(12x^3+5).$

2) $y=(1+2x)^{30}$

$y'=30(1+2x)^{29}(1+2x)'=30(1+2x)^{29}\cdot 2=60(1+2x)^{29}.$

3) $y=(7x^2-\frac{4}{x}+6)^6$

$y'=6\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)'=6\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5\left(14x+\frac{4}{x^2}\right).$

4) $y=cos^3x=(cosx)^3$

$y'=3(cosx)^2(cosx)'=3cos^2x\cdot(-sinx)=-3cos^2x\cdot sinx.$

$$y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$$

$$y' = 5\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^4\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)' = 5\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^4\frac{(1+x^2)'(1+x)-(1+x^2)(1+x)'}{(1+x)^2}$$

$$= 5\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^4\frac{2x(1+x)-(1+x^2)}{(1+x)^2}.$$

6) $y = cos^2 4x = (cos4x)^2$

$y' = 2cos4x(cos4x)' = 2cos4x(-sin4x)\,(4x)' = -8cos4xsin4x.$

7) $y = 3sin(3x+5)$

$y' = 3cos(3x+5)(3x+5)' = 3cos(3x+5)\cdot 3 = 9cos(3x+5).$

8) $y = \frac{1}{4}tg^4x = \frac{1}{4}(tgx)^4$

$y' = \frac{1}{4}\cdot 4tg^3x\cdot(tgx)' = tg^3x\frac{1}{cos^2x}$

$y = \frac{1}{4}tg^4 3x$

$y' = \frac{1}{4}\cdot 4tg^3 3x\cdot(tg3x)' = 3tg^3 3x\frac{1}{cos^2 3x}$.

9) $y = 10^{2x-3}$

$y' = 10^{2x-3}\cdot ln10\cdot(2x-3)'$

$y' = 10^{2x-3}\cdot ln10\cdot 2.$

10) $y = ln(1-2x)$

$y' = \frac{1}{1-2x}(1-2x)' = \frac{1}{1-2x}(-2).$

11) $y = lnsinx$

$y' = \frac{1}{sinx}\cdot(sinx)' = \frac{1}{sinx}\cdot cosx$

12) $y = (1+lnsinx)^{10}$

$y' = 10(1+lnsinx)^9(1+lnsinx)' = 10(1+lnsinx)^9\cdot\frac{1}{sinx}(sinx)' =$

$10(1+lnsinx)^9\frac{cosx}{sinx}.$

13) $y = e^{arcsin\,2x}$

$y' = e^{arcsin\,2x}(arcsin2x)' = e^{arcsin}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}(2x)' = 2e^{arcsin\,2x}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.$

Приклад:

Знайти похідну y'_x,

якщо $x = \alpha\cos t$, $y = \alpha\sin t$, $x'_t = -\alpha\sin t$, $y'_t = -\alpha\cos t$.

Тоді $y'_x = \frac{\alpha\cos t}{-\alpha\sin t} = -ctg\,t$.

6. Диференціювання неявно заданої функції.

Нехай функція задана рівнянням $F(x, y) = 0$.

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, треба взяти похідну по x, вважаючи y функцією від x і одержане рівняння розв'язати відносно y'.

Приклади:

а) $x^2 + y^2 \cdot y' - 2y + 3x = 1$;

Візьмемо похідну від правої і лівої частини рівняння, причому від x і від y.

$$2x + 2y \cdot y' - 2y' + 3 = 0;$$

$$y'(2y - 2) + 2x + 3 = 0;$$

$$y' = \frac{-2x - 3}{2y - 2}$$

б) $y - x - \frac{1}{4}\sin(xy) = 0$;

$y' - 1 - \frac{1}{4}\cos(xy)(x'y + xy') = 0$;

$y' - 1 - \frac{1}{4}\cos(xy)(y + xy') = 0$;

$y' - \frac{1}{4}\cos(xy) \cdot y - \frac{1}{4}\cos(xy) \cdot xy' = 1$;

$y'\left(1 - \frac{1}{4}\cos(xy) \cdot x\right) = 1 + \frac{1}{4}\cos(xy) \cdot y$;

$y' = \frac{1+\frac{y}{4}\cos(xy)}{1-\frac{x}{4}\cos(xy)}$.

7. Логарифмічне диференціювання.

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну.

Згадаємо формули:

Якщо $a = b$ то $\ln a = \ln b$

1. $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

2. $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

3. $\ln a^n = n \cdot \ln a$

Приклади:

а) $y = x^{\sin x}$

Ми маємо з таблиці похідних формули

$(U^{\alpha})' = \alpha \cdot U^{\alpha-1} \cdot U'$ і $(a^{u})' = \alpha^{u} \cdot \ln \alpha \cdot U'$, але вони нам не підходять.

В нашому прикладі і основа і показник функції - змінні величини. Ми повинні тільки логарифмувати функцію.

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\ln y = sin\, x \cdot \ln x$$

(використали властивість 3)

$$(\ln y)' = (sin\, x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (sin\, x)' \ln x + \sin x \cdot (\ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = cos\, x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = (cos\, x \cdot \ln x + \frac{\sin x \cdot}{x}) \cdot y$$

$$y' = (cos\, x \cdot \ln x + \frac{\sin x \cdot}{x}) \cdot x^{\sin x}$$

б) $y = \frac{x^3(x^2+3)\cdot \sin x}{(x-4)\sqrt{3x+5}}$

Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки, а потім (де потрібно) добутку, але цей спосіб дуже громіздкий.

Застосуємо логарифмічне диференціювання.

$$ln\, y = ln\, \frac{x^3(x^2+3) \cdot \sin x}{(x-4)\sqrt{3x+5}};$$

$$ln\, y = ln\, x^3 + ln(x^2+3) + ln \sin x - ln(x-4) - ln\sqrt{3x+5};$$

$$ln\, y = 3ln\, x + ln(x^2+3) + ln \sin x - ln(x-4) - \frac{1}{2} \ln(3x+5);$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+3} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x-4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3x+5}$$

$$y' = \left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+3} + ctg\, x - \frac{1}{x-4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3x+5}\right) \cdot \frac{x^3(x^2+3) \cdot \sin x}{(x-4)\sqrt{3x+5}}$$

8. Диференціал.

Означення, геометричний та механічний зміст диференціала.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x \in [a; b]$, тобто в цій точці має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \;\; \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0$$

звідки

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

Перший з доданків лінійний відносно Δx і при $\Delta x \to 0$ та $f'(x) \neq 0$ є нескінченно малою одного порядку з Δx, тому що:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x)$$

Другий доданок – нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx, тому що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

Цей доданок не є лінійним відносно Δx, тобто містить Δx в степені, вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок у формулі є головною частиною приросту функції, лінійною відносно приросту аргументу.

Диференціалом dy *функції* $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції $f(x)$ в цій точці:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Диференціал dy називають також *диференціалом першого порядку*.

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx. Тому формулу можна записати так:

$$dy = f'(x)dx$$

Диференціали застосовуються в наближених обчисленнях.

Приклад: Знайти диференціал функції $y = \ln \sin x$

$$dy = f'(x)dx$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctg\ x$$

$$dy = ctg\ x \cdot dx$$