<u>Приклад 1</u>. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} z' = \dfrac{(z+1)^2}{y} \\ y' = z+1. \end{cases} \tag{40}$$

<u>Розв'язок</u>. Продиференціюємо по x друге рівняння системи (40): $y'' = z'$. З урахуванням першого рівняння маємо $y'' = \dfrac{(z+1)^2}{y}$. Ясно, що ми будемо одержувати диференціальне рівняння другого порядку з невідомою функцією $y(x)$. Це означає, що з останнього рівняння треба виключити z. З другого рівняння системи (40) (воно тут являє собою систему (37)) знайдемо значення z як функції від x, y, y', а саме

$$z = y' - 1. \tag{41}$$

Дістанемо рівняння другого порядку відносно $y(x)$:

$$y'' = \frac{(y')^2}{y}. \qquad (42)$$

Розв'яжемо рівняння (42). Це рівняння в точних похідних.

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}\ (y' \neq 0), \quad \left(\ln|y'|\right)' = \left(\ln|y|\right)' \Rightarrow y' = c_1 y.$$

звідки $\frac{y'}{y} = c_1\ (y \neq 0), \quad \left(\ln|y|\right)' = c_1, \ \ y = c_2 e^{c_1 x}$.

З (41) $z = \left(c_2 e^{c_1 x}\right)' - 1$, або $z = c_1 c_2 e^{c_1 x} - 1$. Остаточно,

$\begin{cases} y = c_2 e^{c_1 x} \\ z = c_1 c_2 e^{c_1 x} - 1 \end{cases}$ — загальний розв'язок системи (40).

При розв'язуванні рівняння (42) ми могли загубити розв'язки, для яких $y' = 0$, тобто $y = c$. Для вихідної системи це рівнозначно утраті сукупності розв'язків $y = c,\ z = -1$. Ці розв'язки – частинні, вони містяться у загальному при $c_1 = 0, c_2 = c$.

<u>Зауваження</u>. Іноді зручніше виключати з системи не невідомі функції, а деякі вирази від них. Наприклад, у прикладі 1 зручніше виключити не z, а $z + 1$, тоді рівність (41) набирає вигляду $z + 1 = y'$.

<u>Приклад 2</u>. *Розв'язати систему рівнянь методом виключення.*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 3y - z \\ \dot{z} = x + 2y + 3z \end{cases}. \qquad (43)$$

<u>Розвязок</u>. Продиференціюємо 2 рази перше рівняння системи (43) по незалежній змінній t, враховуючи кожного разу значення $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ з системи (43). Після першого диференціювання маємо: $\ddot{x} = 2\dot{x} + \dot{y}$, або

$\ddot{x} = 2(2x + y) + (x + 3y - z)$, або $\ddot{x} = 5x + 5y - z$. Після другого диференціювання $\dddot{x} = 5\dot{x} + 5\dot{y} - \dot{z}$ або

$$\dddot{x} = 16x + 18y - 8z. \tag{44}$$

Складемо систему вигляду (37):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \ddot{x} = 5x + 5y - z \end{cases}. \tag{45}$$

Оскільки якобіан $\dfrac{D(f_1, \Phi_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, то система розв'язна відносно y і z. З першого рівняння системи (45)

$$y = \dot{x} - 2x. \tag{46}$$

З урахуванням і другого рівняння

$$z = -\ddot{x} + 5\dot{x} - 5x. \tag{47}$$

Співвідношення (46) та (47) складають співвідношення (38).

Підставляючи (46)і (47) в (44), дістанемо рівняння 3-го порядку відносно $x(t)$: $\dddot{x} - 8\ddot{x} + 22\dot{x} - 20x = 0$. Це ЛОР другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Відповідне до нього рівняння

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = 0$$

має корені $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 + i, \lambda_3 = 3 - i$. Звідси

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \cos t + c_3 e^{3t} \sin t$$

— загальний розв'язок рівняння. З (46) і (47) знайдемо функції $z(t)$ і $y(t)$:

$$y = \left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \cos t + c_3 e^{3t} \sin t\right)' - 2\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \cos t + c_3 e^{3t} \sin t\right) \equiv$$
$$\equiv e^{3t}\left((c_2 + c_3)\cos t + (c_2 - c_3)\sin t\right)$$

$$z = -\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}\cos t + c_3 e^{3t}\sin t\right)'' + 5\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}\cos t + c_3 e^{3t}\sin t\right)' -$$
$$- 5\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}\cos t + c_3 e^{3t}\sin t\right) \equiv$$
$$\equiv c_1 e^{2t} + \left(2c_2 - c_3\right) e^{3t}\cos t + \left(c_2 + 2c_3\right) e^{3t}\sin t\ .$$

Отже,

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}\cos t + c_3 e^{3t}\sin t \\ y = e^{3t}\left(\left(c_2 + c_3\right)\cos t + \left(c_3 - c_2\right)\sin t\right) \\ z = c_1 e^{2t} + \left(2c_2 - c_3\right) e^{3t}\cos t + \left(c_2 + 2c_3\right) e^{3t}\sin t \end{cases}$$

- загальний розв’язок вихідної системи.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 4y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}.$$

<u>Розв'язання</u>. Це — ЛОСР зі сталими коефіцієнтами. Укладемо та розв'яжемо характеристичне рівняння.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ - прості.

Знайдемо власний вектор матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, відповідний до власного значення $\lambda = -2$, тобто розв'яжемо систему (54).

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\gamma = 0, \quad \gamma_1 + 4\gamma_2 = 0.$$

Власний вектор $\gamma = \begin{pmatrix} -4\gamma_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$. Оберемо $\gamma_2 = 1$, тоді $\gamma = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отже, знайдений розв'язок $y_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x}$ або в скалярній формі

$$\begin{cases} y_{11} = -4e^{-2x}, \\ y_{12} = e^{-2x}. \end{cases}$$

Аналогічно для $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\gamma = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ та } y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

або в скалярній формі $\begin{cases} y_{21} = e^{3x} \\ y_{22} = e^{3x} \end{cases}$.

Загальний розв'язок початкової системи має вигляд

$Y = c_1\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2x} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3x}$ або в скалярній формі

$$\begin{cases} y_1 = -4c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}, \\ y_2 = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}. \end{cases}$$

<u>Приклад 4</u>. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} y_1' = -7y_1 - 8y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2. \end{cases}$$

<u>Розв'язання.</u> Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} -7-\lambda & -8 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$ має прості корені $\lambda_1 = -3 + 4i$ та $\lambda_2 = -3 - 4i$. Знайдемо власний вектор матриці *A*, відповідний до власного значення $\lambda_2 = -3 - 4i$.

$\begin{pmatrix} -4+4i & -8 \\ 4 & 4+4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0$, $(i-1)\gamma_1 = 2\gamma_2$, звідки $\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix}$.

Дістали комплексновизначний розв'язок

$$\begin{cases} y_1 = 2e^{(-3-4i)x} \equiv 2e^{-3x}(\cos 4x - i\sin 4x) \\ y_2 = (-1+i)e^{(-3-4i)x} \equiv e^{-3x}(-1+i)(\cos 4x - i\sin 4x) \end{cases}. \tag{56}$$

Виділимо у розв'язку (56) дійсну та умовну частини:

$$\begin{array}{cc} \text{Re}: & \text{Im}: \\ \begin{cases} y_{11} = 2e^{-3x}\cos 4x \\ y_{12} = e^{-3x}(-\cos 4x + \sin 4x), \end{cases} & \begin{cases} y_{21} = -2e^{-3x}\sin 4x \\ y_{22} = e^{-3x}(\cos 4x + \sin 4x). \end{cases} \end{array} \tag{57}$$

(57) – два дійсних ЛНЗ розв'язки, відповідні кореням $\lambda_1 = -3 + 4i$ та $\lambda_2 = -3 - 4i$. Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = 2e^{-3x}(c_1\cos 4x - c_2\sin 4x) \\ y_2 = e^{-3x}[(c_2 - c_1)\cos 4x + (c_1 + c_2)\sin 4x]. \end{cases}$$

<u>Приклад 5.</u> Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Розв'язок</u>. Це - ЛОСР 3-го порядку. Характеристичне рівняння має корені $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. $\lambda_1 = 2$ — простий корінь. Відповідний до нього власний вектор знайдемо з системи (54):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ тобто } \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_3 \\ \gamma_1 = \gamma_2 \end{cases}, \text{ звідки } \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдено розв'язок $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ або $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{2t} \\ z = e^{2t} \end{cases}$.

$\lambda_2 = 3$ - корінь характеристичного рівняння кратності $k = 2$. Укладемо матрицю $(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, її порядок $n=3$, ранг $r=1$ та дефект $def = n - r = 2 = k$. Отже, має місце випадок 3а). Система (54) приймає вигляд $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0$, або

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3. \tag{58}$$

Побудуємо, враховуючи (58), два ЛНЗ власних вектори $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

два ЛНЗ розв'язки вихідної системи $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$, $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$. Загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

або у скалярній формі

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3) e^{3t} \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ z = c_1 e^{2t} + c_3 e^{3t} \end{cases}.$$

<u>Приклад 6.</u> *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - 4y_2. \end{cases}$$

<u>Розв'язок</u>. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ має корінь $\lambda_1 = -3$ кратності $k = 2$. Матриця $(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ має порядок $n = 2$, ранг $r = 1$ та дефект $def = 1 < 2 = k$ (випадок 3б)). Для знаходження загального розв'язку вихідної системи скористуємося методом невизначених коефіцієнтів. Знайдемо блок, відповідний до кореня $\lambda_1 = -3$ кратності 2 у вигляді:

$$\begin{cases} y_1 = (Ax + B)e^{-3x} \\ y_2 = (Cx + D)e^{-3x} \end{cases}. \tag{59}$$

Підставимо розв'язок (59) в вихідну систему:

$$\begin{cases} (A - 3Ax - 3B)e^{-3x} = (-2Ax - 2B - Cx - D)e^{-3x} \\ (C - 3Cx - 3D)e^{-3x} = (Ax + B - 4Cx - 4D)e^{-3x} \end{cases} \Bigg| : e^{-3x}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^1 & \left.\begin{array}{l} -3A=-2A-C \\ -3C=A-4C \end{array}\right\} \\ x^0 & \left.\begin{array}{l} A-3B=-2B-D \\ C-3D=B-4D \end{array}\right\} \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=C \\ B=D+C \end{array}$$

Два коефіцієнти укладемо довільними параметрами: $C = c_1$, $D = c_2$. Інші виразимо через них: $A = c_1$, $B = c_1 + c_2$. Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = (c_1 x + c_1 + c_2)e^{-3x} \\ y_2 = (c_1 x + c_2)e^{-3x} \end{cases}.$$

<u>Приклад 7</u>. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + \dfrac{2}{\sin t} \\ \dot{y} = 5x - 2y \end{cases}.$$

<u>Розв'язок</u>. Це — ЛНСР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо її методом Лагранжа. Для цього спочатку розв'яжемо відповідну ЛОСР: $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 5x - 2y. \end{cases}$

Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 + 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

$\lambda_1 = i$:

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix}\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

Комплексновизначний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{it}, \qquad \begin{cases} x = \cos t + i\sin t \\ y = (2-i)(\cos t + i\sin t) \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} \mathrm{Re}: & \mathrm{Im}: \\ \begin{cases} x_1 = \cos t \\ y_1 = 2\cos t + \sin t, \end{cases} & \begin{cases} x_2 = \sin t \\ y_2 = 2\sin t - \cos t. \end{cases} \end{array}$$

Загальний розв'язок ЛОСР має вигляд:

$$\begin{cases} x_0 = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y_0 = c_1 (2\cos t + \sin t) + c_2 (2\sin t - \cos t) \end{cases}$$

Тоді загальний розв'язок ЛНСР, згідно до методу Лагранжа, шукається у вигляді:

$$\begin{cases} x = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t \\ y = c_1(t)(2\cos t + \sin t) + c_2(t)(2\sin t - \cos t) \end{cases}.$$

При цьому функції $c_i'(t)$ повинні відповідати системі

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = \dfrac{2}{\sin t} \\ c_1'(t)(2\cos t + \sin t) + c_2'(t)(2\sin t - \cos t) = 0, \end{cases}$$

Остання система – лінійна неоднорідна алгебраїчна система відносно невідомих функцій $c_i'(t)$. Розв'яжемо її, користуючись правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ 2\cos t + \sin t & 2\sin t - \cos t \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{\sin t} & \sin t \\ 0 & 2\sin t - \cos t \end{vmatrix} = 4 - 2\frac{\cos t}{\sin t},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos t & \dfrac{2}{\sin t} \\ 2\cos t + \sin t & 0 \end{vmatrix} = -4\frac{\cos t}{\sin t} - 2.$$

Звідки

$$c_1'(t) = 2\frac{\cos t}{\sin t} - 4, \qquad c_2'(t) = 2 + 4\frac{\cos t}{\sin t},$$

та $c_1(t) = 2\ln|\sin t| - 4t + c_1$, $c_2(t) = 2t + 4\ln|\sin t| + c_2$.

Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2(\cos t + 2\sin t)\cdot \ln|\sin t| + 2t\cdot(\sin t - 2\cos t),$$

$$y = c_1(2\cos t + \sin t) + c_2(2\sin t - 2\cos t) + 10\sin t \cdot \ln|\sin t| - 10t\cos t.$$