Приклад 1: Знайти $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-7x+4)$.

Розв'язок.

Функція $f(x)=x^2-7x+4$ - ціла раціональна. Замінимо в аналітичному виразі функцію х його граничним значення і отримаємо

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4)=3^2-7\cdot 3+4=-8.$$

Приклад 2: Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$.

Розв'язок.

Будемо шукати границю дробово-раціональної функції. Перш ніж підставляти граничне значення x, перевіримо, чи не обертається в нуль знаменник дробу при $x = 3$.

Перевіряємо: $3^2+2\cdot 3+8=23\neq 0$

Тоді:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}=\frac{3^2+3+2}{3^2+2\cdot 3+8}=\frac{14}{23}.$$

Приклад 3: Якщо чисельник функції – стала величина, а границя знаменника дорівнює нулю, то границя такої функції є нескінченність.

$$\lim_{x\to 2}\frac{6}{4x-8}=\infty$$

Приклад 4: Якщо функція дробово – раціональна, то для знаходження границі чисельник і знаменник розкладають на множники, які потім скорочують, причому скоротитись повинен той множник, який обертається в нуль

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{3x\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{9}.$$

Приклад 5: Якщо функція містить знаки радикалів, то чисельник і знаменник помножають на вираз, спряжений до чисельника (знаменника), а потім застосовують формулу різниці квадратів. Вирази $\sqrt{a}-b$ *і* $\sqrt{a}+b$ та $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ *і* $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ називаються спряженими.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{\sqrt{5x+1}-4}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{\left(\sqrt{5x+1}-4\right)\cdot\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{\left(\sqrt{5x+1}\right)^2-4^2}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{5\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)(\sqrt{5x+1}+4)}{5}=\frac{(3+5)(\sqrt{5\cdot 3+1}+4)}{5}=\frac{8\cdot 8}{5}=\frac{64}{5}$$

Приклад 6: Якщо функція містить корінь третього степеня, то чисельник і знаменник помножають на неповний квадрат суми або різниці, а потім застосовують формулу суми або різниці кубів.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-1^3}{x\cdot\left(3\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

Приклад. Довести, що функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x\to 0$ є нескінченно малими одного порядку, якщо $f(x)=\dfrac{3x}{1-x}$ і $\varphi(x)=\dfrac{x}{4+x}$.

Тоді: $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{1-x}\cdot\frac{4+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{12+3x}{1-x}=\frac{3}{-1}=-3$$

Основні пари еквівалентних нескінченно малих функцій.

$\sin x\sim x,\quad x\to 0$

$tgx\sim x,\quad x\to 0$

$\arcsin x\sim x,\quad x\to 0$

$arctgx\sim x,\quad x\to 0$

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\quad x\to 0$

$e^x-1\sim x,\quad x\to 0$

$a^x-1\sim x\ln a,\quad x\to 0$

$\log_a(1+x)\sim x\log_a e,\quad x\to 0$

$\ln(1+x)\sim x,\quad x\to 0$

$(1+x)^k-1\sim kx,\quad x\to 0,\ k>0$

Приклад. Користуючись основними еквівалентностями, обчислити границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}=\begin{bmatrix} arctg\frac{7}{4}x\sim\frac{7}{4}x \\ e^{-2x}-1\sim -2x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{4}x}{2x}=\frac{7}{8}.$$

Важливі границі.

При обчисленні границь часто використовують такі границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$$ **- перша важлива границя**

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k,\quad k\neq 0;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x}=k,\quad k\neq 0;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ - друга важлива границя

Зауваження: зазначимо, що число e = 2,7183... є основою натуральних логарифмів $lna = log_e a$. Взагалі, число e, як і число π = 3,14 ..., широко застосовують при розв'язку різноманітних задач з різних галузей знань.

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$.

Приклади. Обчислити границі.

1. Границя функції, яка представляє собою многочлен, при $x\to\infty$ є нескінченність.

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x^2+4x-2\right)=\infty$$

2. Границя на нескінченності дробово – раціональної функції, у якої степінь чисельника і знаменника однакові дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших членах.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

3. Границя на нескінченності дробово – раціональної функції, у якої степінь чисельника менша за степінь знаменника, дорівнює нулю.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^3+x-6}=0.$$

4. Границя на нескінченності дробово – раціональної функції, у якої степінь чисельника більша за степінь знаменника, дорівнює нескінченності.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-4x+2}{x^3+8x-6}=\infty.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(sin2x\cdot ctg3x)=\{o\cdot\infty\}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{tg3x}{3x}}=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos3x}{\frac{sin3x}{3x}}=\frac{2}{3}.$

6. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left[\begin{array}{c} y=x-\frac{\pi}{3} \\ x\to\frac{\pi}{3},\ mo\ y\to 0\end{array}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

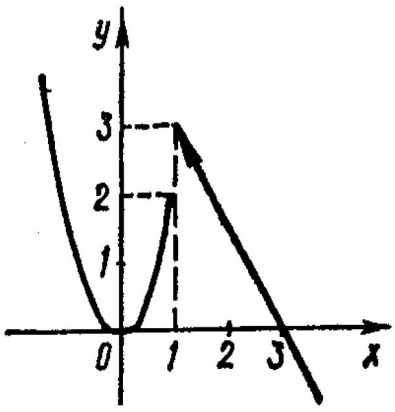
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}=\{1^{\infty}\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{-3}\cdot$
$\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{2x}=1\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{-x}\right)^{-2}=e^{-2}.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+3}{x^2-1}\right)^{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)^{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\right.$
$\left.+\frac{3}{x^2-1}\right)^{2(x^2-1)+5}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)}\right)^{2}\cdot\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)\right)^{5}=(e^3)^2\cdot 1=$
$=e^6.$

Приклад Знайти односторонні границі функції $f(x)=\begin{cases}2x^2, x\le 0;\\ \frac{-3x+9}{2}, x>1\end{cases}$ в точці $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}2x^2=2\cdot 1=2.$$

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{-3x+9}{2}=\frac{-3\cdot 1+9}{2}=3.$$



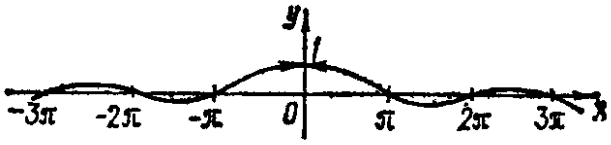
Односторонні границі функції в точці $x_0=1$ існують, але оскільки вони не рівні між собою, то границя функції f(x) в точці $x_0=1$ не існує.

Класифікація точок розриву.

.

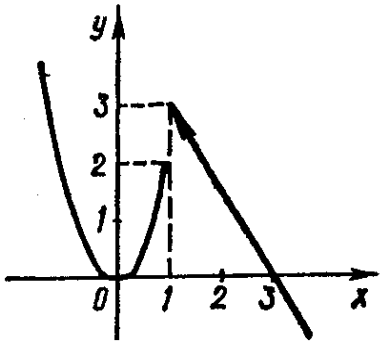
1. ***Точки розриву I-го роду.***
   1) Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має скінченну границю зліва і справа і вони дорівнюють одна одній, але не дорівнюють значенню функції $f(x)$ в точці x_0 або значення $f(x_0)$ не існує, то точку x_0 називають точкою усувного розриву функції.

Наприклад, для функції $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ точка $x=0$ є точкою усувного розриву, оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$, але значення функції в точці $x=0$ не існує.



   2) Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має границю зліва і справа, причому $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точку x_0 називають точкою розриву функції зі скінченним стрибком. Величину $\delta=\left|\lim\limits_{x\to a-0} f(x)-\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right|$ називають стрибком функції $f(x)$ в точці x_0.

Наприклад, для функції
$$f(x)=\begin{cases}2x^2, x\le 0;\\ \frac{-3x+9}{2}, x>1\end{cases}$$
точка $x_0=1$ є точкою розриву, стрибок функції в цій точці дорівнює $\delta=|2-3|=1$.

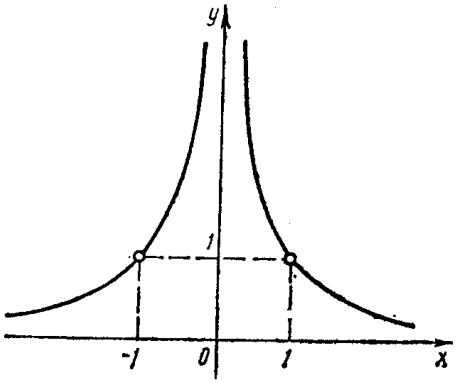


2. ***Точки розриву II-го роду.*** Кожна точка розриву II роду характеризується тим, що в ній функція не має хоча б однієї з односторонніх границь.

Наприклад, для функції $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2}=+\infty$,

тобто односторонні границі в точці $x_0=0$ не існують. Тому $x_0=0$ - точка розриву функції II роду.



Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $y=2^{\frac{1}{x-1}}$.

Область визначення цієї функції $x\subset(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна, як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Розрив функція має в точці $x = 1$. Обчислимо границі:

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}=\left|\begin{array}{l} x\to 1-0(x<1) \\ x-1\to -0 \\ \frac{1}{x-1}\to -\infty \\ 2^{-\infty}\to\frac{1}{2^{+\infty}}\to +0 \end{array}\right|=+0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}=\left|\begin{array}{l} x\to 1+0(x>1) \\ x-1\to +0 \\ \frac{1}{x-1}\to +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}}\to +\infty \end{array}\right|=+\infty.$$

Отже, $x = 1$ — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію

$$y=\begin{cases} x-1 \text{ при } x\ge -2; \\ x+1 \text{ при } x<-2. \end{cases}$$

На кожному з інтервалів $(-\infty;-2)$ і $(-2;+\infty)$ функція неперервна. Отже розглянемо односторонні границі функції у точці $x = -2$.

$$\lim_{x\to -2-0} y = \left| \begin{array}{c} (x \to -2-0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x < -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x+1 \end{array} \right| = \lim_{x\to -2-0} (x+1) = -1-0;$$

$$\lim_{x\to -2+0} y = \left| \begin{array}{c} (x \to -2+0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x > -2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x-1 \end{array} \right| = \lim_{x\to -2+0} (x-1) = -3+0.$$

Отже, точка $x = -2$ — точка розриву 1-го роду, бо односторонні границі функції у цій точці існують, але не рівні між собою.