Приклад 1. Скласти рівняння кола в декартовій прямокутній системі координат радіуса R с центром у точці *O(a;b)*.

Розв'язання:

Коло є геометричне місце точок, що задовольняють умові $\left|\overrightarrow{OM}\right| = R$, де *M(x,y)* – довільна точка кола, тоді $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, звідси одержимо $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ – шукане рівняння кола. Зокрема, якщо центр перебуває на початку координат, рівняння має вигляд: $x^2+y^2=R^2$.

Приклад 2. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $M_1(3;2)$ і $M_2(2;3)$.

Розв'язання:

Нехай *M(x,y)* – довільна точка шуканого геометричного місця точок.

За умовою $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \left|\overrightarrow{M_2M}\right|$, де

$\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$, $\left|\overrightarrow{M_2M}\right| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$,

тоді $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

або після спрощень

$x^2-6x+9+y^2-4y+4=x^2-4x+4+y^2-6y+9 \Rightarrow y-x=0.$

Це рівняння прямої.

Приклад 3. Точка *M* рухається так, що в довільний момент часу її відстань від точки $M_1(6;0)$ утроє більше відстані до точки $M_2(2/3;\ 0)$. Знайти траєкторію руху точки *M*.

Розв'язання:

За умовою $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = 3\left|\overrightarrow{M_2M}\right|$. Виразимо відстані $\left|\overrightarrow{M_1M}\right|$ й $\left|\overrightarrow{M_2M}\right|$ через координати точок, тоді

$\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}$, $\left|\overrightarrow{M_2M}\right| = \sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-0)^2}$

або $\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2} = 3\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-0)^2}$,

що після спрощень дає: $x^2+y^2=4$.

Одержали рівняння кола радіуса $R=2$ із центром на початку координат.

Приклад 4. Скласти рівняння кола, якщо її центр знаходиться на початку координат і пряма $3x-4y+20=0$ є дотичною до кола.

Розв'язання. Точка *O(0;0)*– центр кола, отже, рівняння кола має вигляд $x^2+y^2=R^2$.

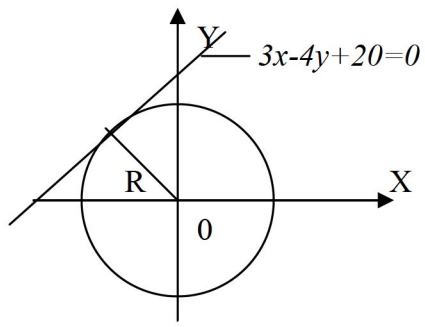

Рис. 3.1

Оскільки радіус кола в точці дотику перпендикулярний дотичній, його довжина дорівнює відстані від точки O(0;0) (Рис. 3.1) до прямої $3x-4y+20=0$, тобто

$R = \frac{|3\cdot 0-4\cdot 0+20|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{20}{5} = 4$. Таким чином, рівняння кола $x^2+y^2=16$.

Приклад 2. Знайти відстань між паралельними площинами
$x-2y+3z+7=0$ й $x-2y+3z-1=0$.

Для цього досить взяти будь-яку точку на одній із площин й обчислити її відстань до іншої площини. Візьмемо в другій площині точку з координатами (1;0;0) і підставимо їх у формулу для обчислення відстані від точки до площини

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot 1-2\cdot 0+3\cdot 0+7|}{\sqrt{14}}=\frac{8}{\sqrt{14}}\ .$$

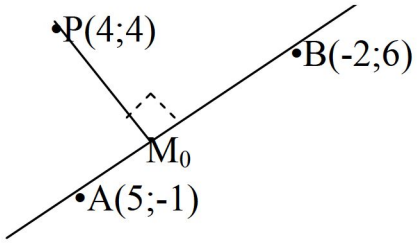

Рис. 3.13

Приклад 3. Знайти проекцію т. $P(4;4)$ на пряму, що проходить через т. $A(5;-1)$ і $B(-2;6)$.

Розв'язання. Рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$\frac{x-5}{-2-5}=\frac{y+1}{6+1}\ \Rightarrow x+y-4=0,\ k_1=-1.$$

Тоді кутовий коефіцієнт прямої M_0P $k_2=1$.

Рівняння прямої M_0P: $y-4=1(x-4)$ або $y=x$. Розв'язуючи систему: $\begin{cases} y=x, \\ y=-x+4 \end{cases}$,

знаходимо координати т. $M_0(2;2)$.

Проекцією точки P на пряму AB є точка $M_0(2,2)$ (Рис. 3.13).

Приклад. Через точку перетину прямих $2x+y-3=0$ й $x-y+8=0$ провести пряму, паралельну прямій $x+y+3=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння пучка прямих:

$2x+y-3+\lambda(x-y+8)=0$, кутові коефіцієнти яких залежно від λ визначаються виразом $k_1=\frac{2+\lambda}{\lambda-1}$.

Кутовий коефіцієнт прямої $x+y+3=0$ дорівнює $k_2=-1$.

З умови паралельності маємо: $k_1=k_2$ або $2+\lambda=-\lambda+1$, звідки $\lambda=-\frac{1}{2}$.

Таким чином, шукане рівняння прямої має вигляд $2(2x+y-3)-(x-y+8)=0$ або $3x+3y-14=0$.

Зауваження. Задачу можна розв'язати іншим способом, знайшовши точку перетину прямих (l_1) і (l_2).

Приклад 5. Дані координати вершин піраміди $A_1(2;-1;1)$, $A_2(5;5;4)$, $A_3(3;2;-1)$, $A_4(4;1;3)$. Знайти:

1) Довжину ребра A_1A_2:

$\overrightarrow{A_1A_2}$ =(5-2; 5-(-1); 4-1)=(3; 6; 3);

Довжина ребра A_1A_2 дорівнює $\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2+6^2+3^2} = \sqrt{54}$.

2) Кут між ребрами A_1A_2 й A_3A_4:

$\overline{A_3A_4}$ =(1; -1; 4)

$$\cos\alpha = \frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_3A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{A_3A_4}\right|} = \frac{3\cdot1+6(-1)+3\cdot4}{\sqrt{54}\sqrt{1^2+1^2+4^2}} = \frac{9}{9\cdot2\sqrt{3}}.;\ \alpha = \arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

3) Проекцію вектора $\overline{A_1A_3}$ на напрям вектора $\overline{A_1A_4}$:

$$\text{Пр}_{\overline{A_1A_4}}\overline{A_1A_3} = \frac{\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_4}\right|};\ \overline{A_1A_3} = (1;3;-2)\ ;\qquad \overline{A_1A_4} = (2;2;2)$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};\ np_{\overline{A_1A_4}}A_1A_3 = \frac{1\cdot2+3\cdot2-2\cdot2}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

4) Площа грані $A_1A_2A_3$:

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]\right|,\qquad \left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix} = -21\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k};$$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{21^2+9^2+3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{531}\ \text{(кв. од.).}$$

5) Об'єм піраміди:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|,$$

$$\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix} = -18\qquad V = \frac{18}{6} = 3\ \text{(куб. од).}$$

6) Рівняння прямої A_1A_2:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{3}\ \text{або}\ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

7) Рівняння площини $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z-1\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix} = 0\qquad \text{або}\qquad -21(x-2)+9(y+1)+3(z-1)=0,$$

$-7(x-2)+3(y+1)+z-1=0,\qquad -7x+3y+z+16=0.$

8) Рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

Нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$: $\vec{n} = (-7;3;1)$, тоді рівняння шуканої висоти мають вигляд $\dfrac{x-4}{-7} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{1}$

9) Кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

Маємо $\overrightarrow{A_1A_4}$ =(2;2;2), $\vec{n} = (-7;3;1)$, тоді

$$\sin\varphi = \frac{|2\cdot(-7)+2\cdot 3+2\cdot 1|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\sqrt{7^2+3^2+1^2}} = \frac{6}{2\sqrt{3}\sqrt{59}} = \sqrt{\frac{3}{59}}\,;\ \varphi = \arcsin\sqrt{\frac{3}{59}}.$$

Приклад 6. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму (l_1), що є лінією перетину площин паралельно прямій (l_2).

(l_1): $\begin{cases} 3x-y+z-5=0, \\ x+2y-z+2=0. \end{cases}$ (l_2): $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Розв'язання. Рівняння пучка площин, що проходять через пряму (l_1), має вигляд

$3x-y+z-5+\lambda(x+2y-z+2)=0$ або $(3+\lambda)x+(2\lambda-1)y+(1-?)z-5+2?=0;$

Із цього пучка вибираємо площину, паралельну прямій (l_2).

З умови паралельності площини й прямої одержимо:

$(3+\lambda)(-1)+(2\lambda-1)\,2+(1-\lambda)2=0,$ звідки $\lambda=3$.

Підставляючи це значення λ у рівняння пучка площин, одержимо: $6x+5y-2z+1=0$ – рівняння шуканої площини.

Приклад 1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його більша вісь дорівнює 20, а ексцентриситет 3/5.

Розв'язання. За умовою $2a=20$, $\varepsilon=3/5$. Тоді $a=10,$ а відповідно до формули $\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\cdot\varepsilon = 10\cdot\frac{3}{5} = 6$. Зі співвідношення $b^2=a^2-c^2$ знаходимо $b^2=100-36=64$.

Підставляючи $a^2=100,\ b^2=64$ у рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ одержимо $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ – шукане рівняння еліпса.

Приклад 2. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c=10$, а ексцетриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Розв'язання. За умовою задачі фокуси розташовані на осі ординат, тому напишемо канонічне рівняння спряженої гіперболи у вигляді: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

Параметри a й b знаходимо із системи: $\begin{cases} a^2+b^2=c^2, \\ \varepsilon = \frac{c}{b}. \end{cases}$

Підставляючи $c=5$ й $\varepsilon = \frac{5}{3}$, одержимо:

$\begin{cases} a^2+b^2=25, \\ \frac{5}{b}=\frac{5}{3}. \end{cases}$ Із другого рівняння системи знаходимо $b=3$,

тоді $a^2=25-9=16;$

Отже, рівняння гіперболи: $\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{4^2}=1$.

Приклад 2**.** Привести рівняння до канонічного виду й побудувати криву.

$$4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки й виділимо повні квадрати

$$\left(4x^2-40x\right)+\left(9y^2+36y\right)+100=0,\ 4\left(x^2-10x\right)+9\left(y^2+4y\right)+100=0,$$

$$4\left(x^2-10x+25\right)-100+9\left(y^2+4y+4\right)-36+100=0, 4\left(x-5\right)^2+9\left(y+2\right)^2=36,$$

$$\frac{\left(x-5\right)^2}{9}+\frac{\left(y+2\right)^2}{4}=1.$$

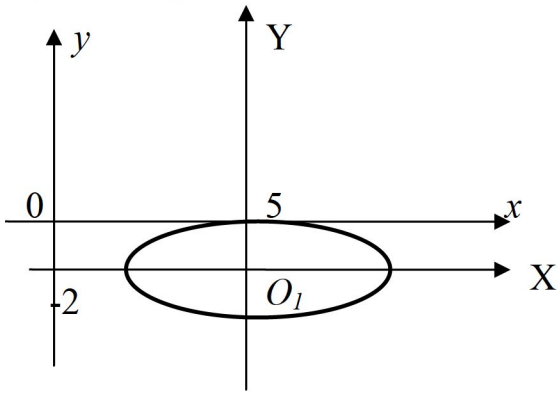

Рис. 3.18

Виконуючи перетворення паралельного переносу осей з новим початком координат $O_1(5;-2)$: x-5=X, y+2=B, одержимо рівняння виду $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$. Це рівняння еліпса з півосями $a=3$, $b=2$. Будуємо криву в системі координат XO_1Y.