Задано координати вершин трикутника *ABC*. Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони *AB*;

2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини *C*;

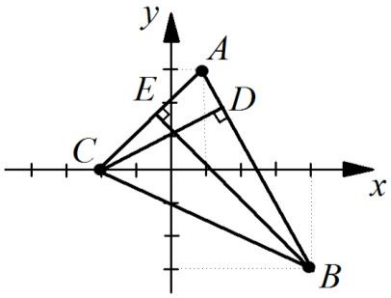
3) обчислити довжину висоти, проведеної з вершини *B*;

4) скласти рівняння прямої, що проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні *AC*;

5) знайти площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *A*.

Розв'яжемо завдання при $A(1,3)$, $B(4,-3)$ та $C(-2,0)$.



Завдання 1. Скласти рівняння сторони *AB*.

Розв'язання

Застосовуючи формулу (3.32), отримуємо

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-3}{-3-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{-6} \Leftrightarrow 2x+y-5=0.$$

$$AB:\ 2x+y-5=0.$$

Завдання 2. Скласти рівняння висоти, проведеної з вершини *C*.

Розв'язання.

Позначимо точку перетину висоти, проведеної з вершини C, зі стороною AB через D. Знайти рівняння висоти CD можна двома способами:

1-й спосіб. Запишемо нормальний вектор сторони *AB*: $\vec{n}_{AB}=(2,1)$. Очевидно, $\vec{n}_{AB}$ є напрямним вектором до CD, отже, можемо застосувати канонічне рівняння (3.31):

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-0}{1} \Leftrightarrow x-2y+2=0.$$

2-й спосіб. Визначимо кутовий коефіцієнт прямої AB:

$$y=-2x+5 \Rightarrow k_{AB}=-2.$$

З умови перпендикулярності двох прямих (3.43) отримуємо

$$k_{CD}=\frac{-1}{k_{AB}}=\frac{1}{2}.$$

Знаючи кутовий коефіцієнт прямої CD та координати точки C, складаємо рівняння висоти за формулою (3.34):

$$y-0=\frac{1}{2}(x+2) \Leftrightarrow x-2y+2=0;$$

$$CD:\ x-2y+2=0.$$

Завдання 3. Обчислити довжину висоти, проведеної з вершини *B*.

Розв'язання.

Зауважимо, що довжина висоти BE співпадає з відстанню від точки B до прямої AC. Отже, спочатку запишемо рівняння сторони AC за формулою (3.32):

$$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-3}{0-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-3}=\frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow x-y+2=0;$$

$$AC:\ x-y+2=0.$$

Тоді за формулою (3.44) отримаємо

$$d=\frac{|4-(-3)+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{2}};$$

$$d=\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Завдання 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні *AC*.

Розв'язання.

Для знаходження центра ваги застосуємо відому формулу:

$$x_O=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{1+4+(-2)}{3}=1;$$

$$y_O=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{3+(-3)+0}{3}=0.$$

Отже, центр ваги має координати $O(1,0)$. Провести пряму, паралельну даній, та таку, що приходить через дану точку, можна такими способами:

1-й спосіб. Знайдемо вектор $\overline{AC}=(-3,-3)$, який буде напрямним вектором шуканої прямої. Запишемо канонічне рівняння цієї прямої (3.31):

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-0}{-3} \Leftrightarrow x-y-1=0.$$

2-й спосіб. Запишемо кутовий коефіцієнт прямої AC: $k_{AC}=1$. З умови паралельності прямих (3.42) $k=1$ та

$$y-0=1\cdot(x-1)\Leftrightarrow x-y-1=0.$$

Завдання 5. Знайти площу трикутника.

Розв'язання.

Знайдемо площу трикутника за формулою (3.27), для чого обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4-1 & -3-3 \\ -2-1 & 0-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}=-27.$$

Звідки $S==\dfrac{27}{2}$.

Завдання 6. Знайти внутрішній кут трикутника при вершині *A*.

Розв'язання.

У попередніх пунктах було знайдено загальні рівняння сторони AB та AC і їх кутові коефіцієнти. Для визначення кута при вершині A застосуємо формулу (3.37) або формулу (3.41):

$$cos\angle A=\frac{2\cdot 1+1\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ або}$$

$$tg\alpha=\frac{-2-1}{1+(-2)\cdot 1}=3.$$

Звести рівняння лінії до канонічного вигляду, побудувати цю лінію та знайти її основні характеристики.

$9x^2+16y^2-90x+32y+97=0$;

$5x^2-6y^2+10x-12y-31=0$;

$x^2-6x-4y+29=0$.

Розв'язання.

Розглянемо перше рівняння $9x^2+16y^2-90x+32y+97=0$.

Перегрупуємо доданки. Застосовуючи метод виділення повних квадратів, виконаємо такі перетворення:

$$9(x^2-10x)+16(y^2+2y)+97=0,$$

$$9(x^2-2\cdot x\cdot 5+25)-9\cdot 25+16(y^2+2y+1)-16\cdot 1+97=0,$$

$$9(x-5)^2+16(y+1)^2=144$$

або

$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1.$$

Виконаємо паралельний перенос системи координат (3.24):

$$\begin{cases} x' = x - 5, \\ y' = y + 1. \end{cases} \qquad (3.55)$$

Початок нової системи координат буде збігатися з точкою $O'(5,-1)$. В новій системі координат $O'x'y'$ рівняння еліпса має канонічний вигляд:

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1.$$

Визначимо основні характеристики отриманого еліпса в системі координат $O'x'y'$ (рис. 54): півосі – $a = 4, b = 3$, фокуси $F_1\left(0,-\sqrt{7}\right)$, $F_2\left(0,\sqrt{7}\right)$,

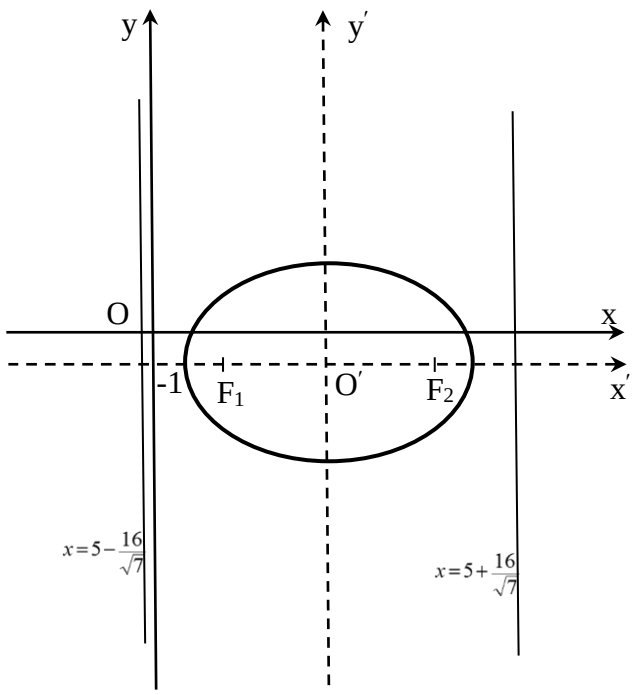


Рис.55

$(c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7})$, ексцентриситет – $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}$, рівняння директрис $x' = \pm\frac{16\sqrt{7}}{7}$.

Якщо повернутися до початкової системи координат Oxy, то, використовуючи зв'язок (3.55), отримуємо координати фокусів $F_1\left(5-\sqrt{7},-1\right), F_2\left(5+\sqrt{7},-1\right)$ та рівняння директрис у цій системі координат:, $x = 5 - \frac{16\sqrt{7}}{7}, x = 5 + \frac{16\sqrt{7}}{7}$.

Розглянемо друге рівняння $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$.

Перегрупуємо доданки та виділимо повні квадрати:

$$5(x^2+2x+1)-6(y^2+2y+1)-5+6-31=0;$$

$$5(x+1)^2-6(y-1)^2=30;$$

$$\frac{(x+1)^2}{6}-\frac{(y-1)^2}{5}=1.$$

Отримане рівняння є рівнянням гіперболи. Перенесемо початок системи координат в точку $O'(-1,1)$ паралельним переносом:

$$\begin{cases} x'=x+1, \\ y'=y-1. \end{cases}$$

У прямокутній системі координат $O'x'y'$ рівняння гіперболи набуде канонічного вигляду:

$$\frac{x'^2}{6}-\frac{y'^2}{5}=1.$$

Основні характеристики даної гіперболи в системі координат $O'x'y'$ (рис. 56): півосі – $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{5}$; ексцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{66}}{6}$ ($c=\sqrt{6+5}=\sqrt{11}$); координати фокусів $F_1(-\sqrt{11},0), F_2(\sqrt{11},0)$; рівняння директрис $x'=\pm\frac{6\sqrt{11}}{11}$; рівняння асимптот $y'=\pm\frac{\sqrt{30}}{6}x'$. Повертаючись до початкової системи

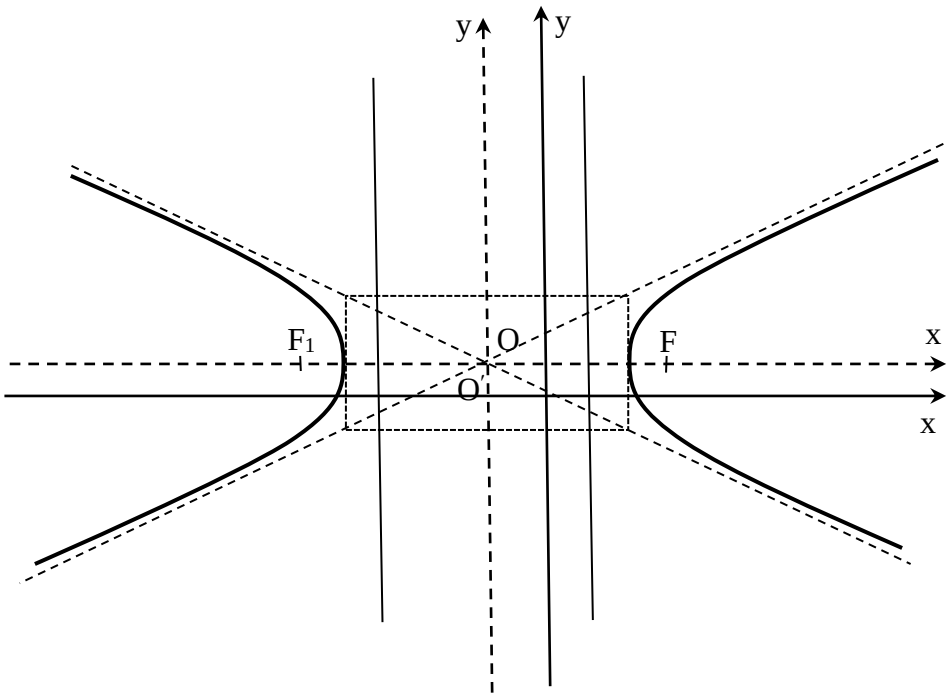


Рис.56

координат Oxy, отримуємо фокуси $F_1\left(-1-\sqrt{11},-1\right), F_2\left(-1+\sqrt{11},-1\right)$, рівняння директрис $x=-1-\frac{6\sqrt{11}}{11}$, $x=-1+\frac{6\sqrt{11}}{11}$ та асимптот $y-1=\pm\frac{\sqrt{30}}{6}(x+1)$.

Розглянемо третє рівняння $x^2-6x-4y+29=0$.

Виділимо повний квадрат у лівій частині рівняння:

$$(x^2-6x+9)-9-4y+29=0\Rightarrow$$

$$(x-3)^2-4y+20=0\Rightarrow(x-3)^2=4(y-5).$$

Отже, маємо параболу вершина якої знаходиться в точці $O'(3,5)$. Паралельним переносом перенесемо початок координат у точку O':

$$\begin{cases} x'=x-3, \\ y'=y-5. \end{cases}$$

Тоді рівняння параболи набуде канонічного вигляду

$$x'^2=4y'.$$

Параметр отриманої параболи $p=2$, фокус $F(0,1)$, рівняння директриси $y'=-1$. У початковій системі координат Oxy фокус $F(3,6)$, рівняння директриси $y=4$ (рис. 57).

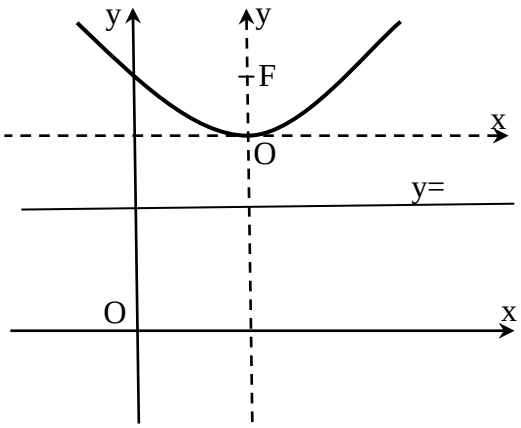


Рис.5