2.4. Рівняння, що зводяться до рівнянь з однорідною функцією

Такі рівняння мають загальний вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right). \qquad (2.12)$$

Випадок 3:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розглянемо цей випадок, позначивши $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$; $a_1 = a\lambda$; $b_1 = b\lambda$; рівняння (2.12) запишемо у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}\right). \qquad (2.16)$$

Це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою $z = ax + by$. Дійсно,

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

<u>Розв'язання.</u> Оскільки визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, робимо заміну

$$x + y = z \quad \Rightarrow \quad y = z - x, \;\; dy = dz - dx.$$

Тоді дане рівняння набуває вигляду:

$$(z + 2)dx + (2z - 1)(dz - dx) = 0 \quad \Rightarrow \quad (3 - z)dx + (2z - 1)dz = 0.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержимо:

$$\frac{2z - 1}{z - 3}dz = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2z - 1}{z - 3}dz = \int dx + C \quad \Rightarrow \quad 2z + 5\ln|z - 3| = x + C.$$

Повертаючись до вихідних змінних $(z = x + y)$, знаходимо остаточну відповідь:

$$x + 2y + 5\ln|x + y - 3| = C.$$

2.5 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Як було показано раніше диференціальні рівняння першого порядку можуть бути записані у вигляді:

$$y' = f(x, y); \quad x' = q(y, x), \tag{2.1}$$

де невідомою є функція $y(x)$ (або $x(y)$), а відомою функція $f(x, y)$ або $q(x, y)$.

Якщо рівняння (2.1) можна записати у вигляді

$$A(x)y' + B(x)y + E(x) = 0 \tag{2.20}$$

або

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{2.21}$$

де $A(x)$, $B(x)$, $E(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ — відомі функції і $A(x) \neq 0$, то таке рівняння називається лінійним тому, що у наведену форму запису (2.21) цього рівняння невідома функція і її похідна входять у першому степені. Не можна дати визначення лінійного рівняння як рівняння, до якого функція і її похідна входять у першому степені, не вказавши при цьому, що йдеться про рівняння, записане у формі (2.20) або (2.21). Саме тому форма запису рівняння (2.20) дістала назву **канонічної.** Перехід від (2.20) до (2.21) здійснюється діленням (2.20) на $A(x)$. Припущення $A(x) = 0$ не має смислу, оскільки в цьому разі немає диференціального рівняння. Отже, завжди припускають, що $A(x) \neq 0$, тому рівняння (2.20) і (2.21) еквівалентні.

Область визначення розв'язків рівнянь (2.20) і (2.21) визначається спільною частиною областей визначення функцій $A(x)$, $B(x)$, $E(x)$ для (2.20) і $P(x)$, $Q(x)$ для (2.21).

Якщо в (2.20) $E(x) \equiv 0$, а в (2.21) $Q(x) \equiv 0$, то рівняння (2.20) і (2.21) набирають вигляду

$$A(x)z' + B(x)z = 0; \tag{2.22}$$

$$z' + P(x)z = 0 \tag{2.23}$$

і називаються **лінійними однорідними рівняннями.** Оскільки рівняння (2.20), (2.21) відрізняються від рівнянь (2.22), (2.23), то в них невідома функція позначена $z(x)$.

Якщо в (2.20) $E(x) \neq 0$, а в (2.21) $Q(x) \neq 0$, то рівняння (2.20) і (2.21) називаються **лінійними неоднорідними рівняннями.**

Розглянемо розв'язання лінійних однорідних рівнянь. Запишемо рівняння (2.23) у вигляді

$$\frac{dz}{dx} = -P(x)z .$$

У цьому рівнянні змінні легко відокремити. В результаті маємо

$$\frac{dz}{dx} = -P(x)dx ; \ \ln|z| = -\int P(x)dx + \ln|C| ,$$

де для зручності стала C записана у вигляді $\ln|C|$. Потенціюючи, знаходимо загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння першого порядку:

$$z(x) = Ce^{-\int P(x)dx} . \qquad (2.24)$$

Для розв'язання неоднорідних рівнянь (2.20) і (2.21) застосовують два методи: метод варіації довільної сталої і метод Бернуллі–Фур'є.

Метод варіації довільної сталої полягає ось у чому: вважаємо в (2.24) C невідомою функцією від x і визначаємо її за умови такого розв'язку рівнянь (2.20) або (2.21):

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx} . \qquad (2.25)$$

Розглянемо рівняння (2.21). Після диференціювання виразу (2.25) маємо

$$y'(x) = \frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} . \qquad (2.26)$$

Замінивши в (2.21) y' на (2.26), дістаємо диференціальне рівняння для функції $C(x)$:

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} .$$

Інтегруючи, знаходимо

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_1 .$$

Замінивши в (2.25) $C(x)$ на цей вираз, маємо

$$y(x) = C_1e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx . \qquad (2.27)$$

Вираз (2.27) можна записати таким чином:

$$y = C_1\psi(x) + \xi(x). \tag{2.28}$$

Перший доданок збігається із загальним розв'язком однорідного рівняння, а другий $\xi(x)$ є частинним розв'язком неоднорідного рівняння. Функція

$$\xi(x) = e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

задовольняє рівняння (2.21). Дійсно, знайдемо похідну

$$\xi'(x) = -P(x)e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + Q(x)e^{\int P(x)dx}e^{-\int P(x)dx} =$$
$$= -P(x)e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + Q(x).$$

Підставивши значення похідної $\xi'(x)$ в (2.21), дістаємо

$$-P(x)e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + Q(x) +$$
$$+ P(x)e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = Q(x).$$

Маємо тотожність

$$Q(x) \equiv Q(x),$$

що й доводить, що функція $\xi(x)$ є розв'язком рівняння (2.21). Оскільки функція $\xi(x)$ не містить довільних сталих, то, природно, вона називається частинним розв'язком неоднорідного рівняння (2.21).

Отже, *загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння першого порядку складається із суми загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.* Звичайно це твердження називають теоремою.

Приклад. Розв'язати рівняння: $y' + 2y = 4x$.

Розв'язок. Розв'яжемо це рівняння по загальній схемі. Спочатку розглянемо рівняння $y' + 2y = 0$. вважаючи $y \neq 0$, запишемо його у вигляді:

$$\frac{dy}{y} = -2dx,$$
$$\ln|y| = -2x + \ln C,$$
$$y = Ce^{-2x},$$

Далі шукаємо розв'язок за умови що C є невідомою функцією змінної x:

$$y = C(x)e^{-2x}. \qquad (*)$$

Підставимо одержаний розв'язок в початкове рівняння.

$$C'(x)e^{-2x} + (-2)C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = 4x,$$

$$C'(x) = 4xe^{2x}.$$

$C(x)$ знайдемо скориставшись методом інтегрування частинами:

$$C(x) = 4\int xe^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x \\ du = dx \\ dv = e^{2x}dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = 4\left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \int\frac{1}{2}e^{2x}dx\right) =$$

$$= 2xe^{2x} - 2\frac{e^{2x}}{2} + C_1.$$

Підставивши знайдене $C(x)$ в (*), одержимо

$$y = e^{-2x}[e^{2x}(2x-1) + C_1] = \underline{C_1e^{-2x}} + \underline{2x-1}.$$

Зауважимо, що тут *Загальний розв'язок* *Частинний розв'язок*

Метод Бернуллі–Фур'є полягає ось у чому: припускається можливість пошуку розв'язку будь-якого рівняння у вигляді добутку двох функцій: $u(x)$ і $v(x)$, тобто

$$y(x) = u(x)v(x). \qquad (2.37)$$

Оскільки одна з двох функцій довільна, то це спричинює деяку свободу вибору однієї з функцій, яка далі використовується. Враховуючи (2.37) у рівнянні (2.21), дістаємо

$$y' = u'v + uv'; \; u'v + uv' + P(x)uv = Q(x).$$

Після групування маємо

$$[u' + P(x)u]v + uv' = Q(x).$$

Виберемо u таким чином, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тоді

$$u' + P(x)u = 0; \tag{2.38}$$

$$uv' = Q(x). \tag{2.39}$$

Ці рівняння легко розв'язуються. Рівняння (2.38) збігається з (2.23). Його розв'язком є функція (2.24). Враховуючи свободу вибору функції $u(x)$ в (2.24), можна покласти $C = 1$:

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

Цей розв'язок підставимо в рівняння (2.39):

$$v' = Q(x)e^{\int P(x)dx}; \; dv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

$$v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1;$$

$$y = C_1e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx. \tag{2.40}$$

Таким чином дістаємо вираз (2.40), що збігається з розв'язком (2.27), знайденим за методом варіації довільних сталих.

Зауваження. Якщо права частина неоднорідного рівняння (2.21) — стала величина і функція $P(x)$ також стала, то рівняння завжди можна звести до однорідного. Дійсно, нехай в (2.21) $Q(x) = Q_0 = \text{const}$, а $P(x) = P_0$. Введемо нову функцію $Y(x)$, пов'язану із старою $y(x)$ співвідношенням

$$y(x) = Y(x) + \frac{Q_0}{P_0}. \tag{2.41}$$

Тоді $y' = Y'$ і рівняння (2.21) перепишемо у вигляді

$$Y' + P_0\left[Y(x) + \frac{Q_0}{P_0}\right] = Q_0; \tag{2.42}$$

$$Y'(x) + P_0Y = 0.$$

Зауваження. При розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь методом Бернуллі або методом Лагранжа слід використовувати наведені алгоритми, а не отримані кінцеві формули.

Варіація довільної сталої

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$y' - y ctgx = \frac{1}{\sin x}.$$

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (2.21), тобто воно є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y', при цьому $P(x) = ctgx,\ Q(x) = \frac{1}{\sin x}$.

Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі, тобто загальний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y = uv.$$

Звідси

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставляємо y та y' у вихідне рівняння

$$u'v + uv' - uvctgx = \frac{1}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' - vctgx) = \frac{1}{\sin x}.$$

Для визначення невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ розіб'ємо отримане рівняння на два рівняння:

$$\begin{cases} v' - vctgx = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння системи, як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = vctgx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int ctgxdx + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|,$$

звідки

$$\ln|v| = \ln|C_1 \sin x| \quad \Rightarrow \quad v = C\sin x, \text{ де } C = \pm C_1.$$

Оскільки в даному рівнянні досить знайти який-небудь *частинний розв'язок*, то, для спрощення подальшого розв'язання, покладемо $C = 1$.

(Надалі, при розв'язанні першого рівняння системи, постійну інтегрування записувати не будемо, зразу шукаючи його найпростіший *частинний розв'язок*, який, як правило, можна отримати при $C = 1$ або $C = 0$).

Тоді

$$v = \sin x.$$

Підставляємо функцію $v(x) = \sin x$ у друге рівняння системи і знайдемо функцію $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}\sin x = \frac{1}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{\sin^2 x},$$

звідки

$$\int du = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + C \quad \Rightarrow \quad u = -ctgx + C.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = uv = (-ctgx + C)\sin x = -\cos x + C\sin x.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коши:

$$y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}, \qquad y(0) = -1.$$

<u>Розв'язання.</u> Маємо лінійне рівняння відносно функції y та її похідної y'. Застосуємо метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Спочатку знайдемо *загальний розв'язок однорідного рівняння*, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню:

$$y' + 2xy = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2xdx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -2\int xdx + \ln|C|,$$

звідси

$$\ln|y| - \ln|C| = -x^2 \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{C} = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x^2}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y = C(x)e^{-x^2}, \qquad (*)$$

вважаючи довільну сталу функцією змінної x. Тоді

$$y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x).$$

Підставляючи y та y' у задане рівняння, отримаємо:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 3x^2e^{-x^2}.$$

Після скорочення, маємо:

$$C'(x)e^{-x^2} = 3x^2e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x^3 + \overline{C}.$$

Підставивши знайдене значення $C(x)$ у вираз $(*)$, отримаємо *загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння*:

$$y = \left(x^3 + \overline{C}\right)e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y_{зн} = y_{зо} + y_{чн} = \overline{C}e^{-x^2} + x^3e^{-x^2}.$$

В даному випадку $y_{зо} = \overline{C}e^{-x^2}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $y_{чн} = x^3e^{-x^2}$ - частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння.

Тепер розв'яжемо задачу Коші, тобто знайдемо частинний розв'язок даного рівняння, який відповідає заданій початковій умові.

Підставивши в загальний розв'язок початкову умову $y(0) = -1$, знайдемо значення сталої $\overline{C}$:

$$-1 = \left(0 + \overline{C}\right)e^0 \quad \Rightarrow \quad \overline{C} = -1.$$

Отже, *розв'язком задачі Коші* є функція

$$y = \left(x^3 - 1\right)e^{-x^2}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВПРАВИ. **1.** Розв'язати рівняння:

а) $\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = t$; б) $\frac{dx}{d\varphi} - \frac{2x}{\varphi} = \varphi^3$.

Відповідь. а) $y = t(t + C)$; б) $x = \varphi^2\left(\frac{\varphi^2}{3} + C\right)$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

а) $\frac{dh}{dt} - \frac{h}{1-t^2} - 1 - t = 0$, $h = 0$ при $t = 0$;

б) $xy' + y - e^x = 0$, $y = 2$ при $x = 1$.

Відповідь. а) $h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\left(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right)$; б) $y = \left(e^x + 2 - e\right)x^{-1}$.

2.6. Рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{2.43}$$

де n не дорівнює нулю або одиниці, називається **рівнянням Бернуллі.** Якщо $n = 0$, то рівняння (2.43) збігатиметься з лінійним. Якщо $n = 1$, то після об'єднання $P(x)$ з $Q(x)$ дістанемо лінійне однорідне рівняння

$$y' + [P(x) - Q(x)]y = 0 \text{ або } y' + P_1(x)y = 0,$$

метод розв'язування якого відомий. Тому цікаво розглянути рівняння, в якому $n \neq 0$ або $n \neq 1$. Розв'яжемо рівняння (2.43). Поділивши його на y^n, знайдемо

$$y^{-n}y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x). \tag{2.44}$$

Введемо позначення $y^{-n+1} = z$, тоді

$$\frac{dz}{dx} = y^{-n}(1-n)\frac{dy}{dx}; \quad \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x);$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x). \tag{2.45}$$

Останнє рівняння є лінійним відносно z. Розв'язок такого рівняння відомий. Таким чином, підстановка $z = y^{-n+1}$ зводить рівняння (2.43) до лінійного.

Зауваження 1. Очевидно, що $y = 0$ є розв'язком рівняння Бернуллі, коли $n > 0$.

Зауваження 2. Розв'язок рівняння Бернуллі можна шукати безпосередньо методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його попередньо до лінійного рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Розв'язання. Тут

$$n = \frac{1}{2};\ z = y^{-\frac{1}{2}+1};\ z^2 = y;\ y' = 2zz';$$

$$2xzz' - 4z^2 = x^2 z;\ z\left(2xz' - 4z - x^2\right) = 0.$$

Розв'язування останнього рівняння зводиться до розв'язування двох рівнянь:

1) $z = 0$, але тоді і $y = 0$ (тривіальний розв'язок);

2) $2xz' - 4z - x^2 = 0$; $z' - \dfrac{2}{x}z = \dfrac{x}{2}$.

Розв'яжемо це рівняння методом Бернуллі–Фур'є:

$$z = uv;\ u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = \frac{x}{2};\ u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = \frac{x}{2};$$

$$v' - \frac{2}{x}v = 0;\ v' = \frac{2}{x}v;\ \frac{dv}{v} = \frac{2}{x}dx;\ \ln|v| = 2\ln|x|;\ v = x^2;$$

$$u'v = \frac{x}{2};\ du = \frac{1}{2x}dx;\ u = \frac{1}{2}\ln|x| + C;\ z = uv = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right).$$

У виразі $z = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)$, замінивши z на $\sqrt{y}$, дістанемо відповідь

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коши:

$$\left(x^2\ln y - x\right)y' = y, \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

<u>Розв'язання.</u> Дане рівняння не буде лінійним відносно функції $y(x)$, оскільки змінна y входить під знак логарифма. Зробимо деякі перетворення:

$$\left(x^2\ln y - x\right)\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2\ln y - x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x^2\ln y - x}{y},$$

звідси

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2\ln y}{y} - \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x' + \frac{x}{y} = \frac{\ln y}{y}x^2.$$

Отримане рівняння є *рівняння Бернуллі*, якщо вважати змінну x функцією, а y її аргументом. Тоді його розв'язок шукаємо у вигляді

$$x = u(y)\cdot v(y) \quad \Rightarrow \quad x' = u'v + uv'.$$

Підставляючи x і x' в отримане рівняння, маємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{y} = \frac{\ln y}{y}u^2v^2 \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{y}\right) = \frac{\ln y}{y}u^2v^2. \quad (*)$$

Покладемо $v' + \frac{v}{y} = 0$ і знайдемо функцію $v(y)$:

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{v}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\ln|y| \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{y}.$$

Далі підставляємо знайдену функцію $v = \frac{1}{y}$ в рівняння (*) та відокремлюємо змінні:

$$u'\frac{1}{y} = \frac{\ln y}{y}u^2\frac{1}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = \frac{\ln y}{y^2}u^2 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{du}{u^2} = \int\frac{\ln y}{y^2}dy.$$

Інтеграл справа беремо частинами:

$$\int\frac{\ln y}{y^2}dy = \left|\begin{array}{ll} u = \ln y, & du = \frac{1}{y}dy \\ dv = \frac{dy}{y^2}, & v = -\frac{1}{y} \end{array}\right| = -\frac{\ln y}{y} + \int\frac{dy}{y^2} + C = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + C.$$

У результаті знаходимо функцію $u(y)$:

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{y}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Отже, *загальний розв'язок* рівняння має вигляд:

$$x(y) = u(y) \cdot v(y) = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову $x = \frac{1}{2}$ при $y = 1$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\ln 1 + 1 - C \cdot 1} \quad \Rightarrow \quad C = -1.$$

Отже, *частинний розв'язок заданого* рівняння має вигляд:

$$x = \frac{1}{\ln y + y + 1}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВПРАВИ. Знайти загальний розв'язок рівняння.

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$. *Відповідь.* $y = \frac{1}{x\left(x^3 + C\right)}$.

2. $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right)dy = 0$. *Відповідь.* $\frac{1}{\sqrt{y(C + y)}}$ (за невідому функцію взяти $x(y)$).

2.7. Рівняння у повних диференціалах

Вираз вигляду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{2.46}$$

називається **повним (точним) диференціалом,** якщо існує функція $u(x, y)$ двох змінних, для якої

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{2.47}$$

Рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{2.48}$$

в якому ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, називається **рівнянням у повних (точних) диференціалах.**

Розглянемо методику розв'язування таких рівнянь. Якщо ліва частина рівняння (2.47) є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, то (2.48) можна записати так: $du = 0$. Розв'язком цього рівняння є

$$u(x, y) = C. \tag{2.49}$$

Для існування розв'язку $y = y(x)$ рівняння (2.48), що відповідає початковим значенням x_0, y_0, необхідно мати змогу за $u(x, y)$ визначити неявну функцію $y(x)$. Для цього треба, щоб $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ при $x = x_0$, $y = y_0$. Враховуючи рівність $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ і (2.47), маємо

$$\begin{cases} P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \tag{2.50}$$

Знайдемо умову, за якою можна стверджувати, що (2.46) є повним диференціалом.

Теорема. *Для того щоб вираз* (2.46), *де* $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ — *неперервні функції двох змінних, разом із частинними похідними* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *і* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *в їхній спільній частині області визначення D був повним диференціалом, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2.51}$$

Доведемо *необхідність*. Нехай (2.46) — повний диференціал. Тоді, диференціюючи (2.50) і враховуючи, що змішані частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ рівні між собою, дістанемо (2.51).

Доведемо *достатність*. Дана система диференціальних рівнянь (2.50) з умовою (2.51), із якої треба знайти функцію $u(x, y)$. Якщо у першому рівнянні системи (2.50) зафіксувати і зінтегрувати рівняння по x, то дістанемо

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \varphi(y). \qquad (2.52)$$

Тут довільна стала $C = \varphi(y)$ залежить від y. У розв'язку (2.52) не відома лише $\varphi(y)$. Для визначення $\varphi(y)$ здиференціюємо (2.52) по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y). \qquad (2.53)$$

Використовуючи друге рівняння (2.50) і рівняння (2.51), (2.53) можна записати у вигляді

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y),$$

але

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x, y)\Big|_{x_0}^{x} = Q(x, y) - Q(x_0, y),$$

тому

$$Q(x, y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y) \quad \text{або} \quad \varphi'(y) = Q(x_0, y).$$

Це диференціальне рівняння відносно невідомої функції $\varphi(y)$. Розв'язавши його, знайдемо одне значення функції

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy.$$

Отже,

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy. \qquad (2.54)$$

Тут x_0, y_0 — координати довільної точки області визначення $u(x, y)$. Із (2.54) випливає, що $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, тобто доведено достатність умови (2.51). Вираз (2.54) з урахуванням (2.49) дає

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C\,. \qquad (2.55)$$

При розв'язуванні диференціальних рівнянь вигляду (2.48) спочатку перевіряють виконання умови (2.51). Потім із будь-якого рівняння (2.50) визначають $u(x,y)$. Диференціюючи знайдений для $u(x,y)$ вираз і використовуючи друге рівняння (2.50), визначають функцію $\varphi(y)$ $(\varphi(x))$, а з нею і функцію $u(x,y)$. Розв'язок одержують у вигляді

$$u(x,y)=C\,.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0\,.$$

Розв'язання.

$$P(x,y)=3x^2+6xy^2\,;\ \frac{\partial P}{\partial y}=12xy\,;$$

$$Q(x,y)=6x^2y+4y^3\,;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy\,;\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,;$$

$$u(x,y)=\int\left(3x^2+6xy^2\right)dx=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+\varphi'(y)\,;\ 6x^2y+\varphi'(y)=6x^2y+4y^3\,;$$

$$\varphi'(y)=4y^3\,;\ \varphi(y)=y^4\,;\ u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4\,.$$

Розв'язком рівняння є

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C\,.$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВПРАВИ. Розв'язати рівняння.

1. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$. Відповідь. $\frac{x^2}{2}+xy+y^2=C$.

2. $xdx+ydy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. *Відповідь.* $\frac{x^2+y^2}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C$.

3. $\left(x^2+y^2-2x\right)dx+2xydy=0$. *Відповідь.* $\frac{x^3}{3}+y^2x-x^2=C$.

ПОСИЛАННЯ ДО ЛЕКЦІЇ:

https://www.youtube.com/watch?v=Y7U9ZpXZ1uo

https://www.youtube.com/watch?v=epv668OWtLI

https://www.youtube.com/watch?v=FqNLonLr0i8