ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку з довільними коефіцієнтами

Загальні властивості лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \qquad (5.62)$$

де $f(x) \neq 0$; a_1, ..., a_n — неперервні функції на $[a, b]$. Однорідне рівняння, що відповідає неоднорідному рівнянню, запишемо у вигляді

$$L(z) \equiv z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)z = 0. \qquad (5.63)$$

Теорема (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння):

Теорема 7. *Якщо відомими є будь-який частинний розв'язок $y^*(x)$ рівняння (5.62) і загальний розв'язок рівняння (5.63)*

$$z = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) + \ldots + C_n z_n(x), \qquad (5.64)$$

де C_1, C_2, ..., C_n — довільні сталі; $z_1(x)$, $z_2(x)$, ..., $z_n(x)$ — система лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (5.63), то загальний розв'язок y рівняння (5.62) дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язку однорідного рівняння

$$\boxed{y = y^* + z.} \qquad (5.65)$$

Доведення. Вираз (5.65) є розв'язком рівняння (5.62). Це випливає з таких міркувань:

$$L(z) = 0; \; L(y^*) = f(x);$$
$$L(y) = L(z + y^*) = L(z) + L(y^*) = f(x).$$

Тепер нам залишилося довести, що розв'язок рівняння (5.65)

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n + y^* \qquad (5.66)$$

є загальним. Останнє означає, що за будь-якими заданими початко-

вими умовами

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \qquad (5.67)$$

з (5.66) одночасно визначаються довільні сталі, що відповідають заданим початковим умовам (5.67).

Дійсно, здиференціюємо вираз (5.66) $(n-1)$ разів. В усіх здобутих у такий спосіб рівностях замінимо x на x_0, а y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ на y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$. У результаті дістанемо систему рівнянь відносно сталих C_1, C_2, ..., C_n:

$$\begin{cases} C_1 z_1(x_0) + C_2 z_2(x_0) + \ldots + C_n z_n(x_0) = -y_0 - y^*(x_0); \\ C_1 z'_1(x_0) + C_2 z'_2(x_0) + \ldots + C_n z'_n(x_0) = -y'_0 - y^{*'}(x_0); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 z_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 z_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n z_n^{(n-1)}(x_0) = -y_0^{(n-1)} - y^{*(n-1)}(x_0). \end{cases} \qquad (5.68)$$

Визначником системи (5.68) є визначник Вроньського $W(x_0)$. Він не дорівнює нулю, оскільки фундаментальна система функцій z_1, z_2, ..., z_n в (a,b) лінійно незалежна. Тому система (5.68) має єдиний розв'язок, що визначає C_1, C_2, ..., C_n, а отже, розв'язок (5.66) є загальним.

Дуже часто фундаментальну систему z_1, z_2, ..., z_n позначають y_1, y_2, ..., y_n, а загальний розв'язок рівняння (5.63)

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x). \qquad (5.69)$$

Принцип суперпозиції розв'язків:

Теорема 8. *Якщо права частина рівняння* (5.62) *є сумою кількох функцій, то частинний розв'язок рівняння дорівнює сумі частинних розв'язків, що відповідають кожній функції окремо.*

Доведення. Нехай

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

а частинними розв'язками рівнянь

$$L(y) = f_1(x);\ L(y) = f_2(x)$$

є відповідно $y_1^*(x)$ і $y_2^*(x)$, $y^* = y_1^* + y_2^*$. Тоді

$$L\left(y_1^*(x)\right) = f_1(x),\ L\left(y_2^*(x)\right) = f_2(x);$$

$$L\left(y^*\right) = L\left(y_1^* + y_2^*\right) + L\left(y_1^*\right) + L\left(y_2^*\right) = f_1(x) + f_2(x).$$

Ця теорема дає змогу спростити відшукання частинних розв'язків неоднорідних рівнянь.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + y = x - \sin 2x$.

Розв'язання. Розглянемо два допоміжних рівняння:

$$y'' + y = x,\ y'' + y = -\sin 2x,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = -\sin 2x.$$

Розв'яжемо однорідне рівняння:

$$z'' + z = 0,\ k^2 + 1 = 0,\ k_{1,2} = \pm j,$$

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що частинним розв'язком для першого рівняння буде $y_1^* = x$, а для другого $y_2^* = \frac{1}{3}\sin 2x$. На підставі теореми маємо

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

Метод варіації сталих. Як випливає з рівняння (5.66), задача про відшукання загального розв'язку неоднорідного рівняння (5.62) зводиться до відшукання загального розв'язку однорідного рівняння (5.63) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння y^*. Тут викладемо метод, що дає змогу визначити загальний розв'язок неоднорідного рівняння за загальним розв'язком однорідного рівняння.

Теорема 9. *Якщо відомою є фундаментальна система для однорідного рівняння, то загальний розв'язок неоднорідного рівняння визначається за загальним розв'язком однорідного рівняння з визначенням у розв'язку невідомих функцій замість довільних сталих. Причому ці функії знаходяться інтегруванням.*

Доведення. Для доведення теореми скористаємося методом варіації (у формі Лагранжа) довільних сталих. Це метод відшукання загального розв'язку неоднорідного рівняння (5.62), який було використано при розв'язуванні лінійного неоднорідного рівняння першого порядку (п. 2.5). За умовою теореми відомою є фундаментальна сис-

тема y_1, y_2, ..., y_n; $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$.

Шукатимемо загальний розв'язок у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i , \tag{5.70}$$

де $C_i(x)$ — невідомі функції.

Для визначення невідомих функцій $C_i(x)$ маємо систему n рівнянь що складається з

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{5.74}$$

Визначник цієї системи є $W(x)$. Він не дорівнює нулю. Тому система має єдиний розв'язок

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \ i = \overline{1, n} .$$

Інтегруючи, маємо

$$C_i(x) = \int \psi_i(x) dx + \tilde{C}_i = \gamma_i(x) + \tilde{C}_i ,$$

де $\tilde{C}_i$ — довільні сталі.

Повертаючись до (5.70), маємо

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \gamma_i(x) = \overline{y} + y^* ;$$

при цьому перша сума збігається із загальним розв'язком однорідного рівняння, а друга є частинним розв'язком неоднорідного рівняння.

Отже, для розв'язання неоднорідного диференціального рівняння методом варіації довільних сталих необхідно:

1) розв'язати однорідне рівняння і записати його загальний розв'язок;

2) записати загальний розв'язок неоднорідного рівняння у формі загального розв'язку однорідного рівняння, але зі змінними коефіцієнтами;

3) побудувати систему (5.74) і розв'язати її;

4) здобутий розв'язок підставити в (5.70).

Приклад. Розв'язати рівняння $y''' + y' = \dfrac{1}{\sin x}$.

Розв'язання. Рівняння має єдиний розв'язок у будь-якому інтервалі (a, b), що не містить точок, в яких $\sin x = 0$:

$$x = n\pi \quad (n = 0; \pm 1; \ldots).$$

Розв'язуємо однорідне рівняння

$$y''' + y' = 0\,;\ k^3 + k = 0\,;\ k_1 = 0\,;\ k_{2,3} = \pm j\,.$$

Система $y_1 = 1$; $y_2 = \cos x$; $y_3 = \sin x$ є фундаментальною, тому

$$\overline{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x\,.$$

Запишемо (5.70) у вигляді

$$y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x\,. \tag{5.75}$$

Знайдемо похідні:

$$y' = -C_2(x)\sin x + C_3(x)\cos x\,;$$
$$y'' = -C_2(x)\cos x - C_3(x)\sin x\,;$$
$$y''' = C_2(x)\sin x - C_3(x)\cos x - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x\,.$$

Складемо систему (5.74):

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0; \\ \quad - C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0; \\ \quad - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \dfrac{1}{\sin x}; \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1\,;$$

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \dfrac{1}{\sin x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin x}\,;$$

$$C_2'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \frac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\mathrm{ctg}x\ ;$$

$$C_3'(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = -1\ ;$$

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + \bar{C}_1\ ;$$

$$C_2(x) = -\int \mathrm{ctg}x dx = -\ln|\sin x| + \bar{C}_2\ ;$$

$$C_3(x) = -\int dx = -x + \bar{C}_3\ ;$$

$$y = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \cos x + \bar{C}_3 \sin x + \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| - \cos x \cdot \ln|\sin x| - x \sin x\ .$$

Зауваження. Нехай у рівнянні (5.62) коефіцієнти $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ сталі. Тоді розв'язок однорідного рівняння відомий. Користуючись методом варіації сталих, можна легко знайти розв'язок неоднорідного рівняння з будь-якою правою частиною $f(x)$. Ілюстрацією цього є розглянутий вище приклад.

Приклад. Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.\quad (1)$$

1) Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + 4y = 0$$

$$k^2 + 4 = 0$$

$$k^2 = -4$$

$$k_{1,2} = \pm 2i = \alpha \pm \beta i \Rightarrow \alpha = 0,\ \ \beta = 2$$

$$y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.\quad (3)$$

2) Знаходимо частинний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$\tilde{y} = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x.$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & \cos 2x \end{vmatrix} = -tg\,2x;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1.$$

$$C_1'(x) = -\frac{tg\,2x}{2}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{2}.$$

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int tg\,2x dx = -\frac{1}{4}\int tg\,2x d(2x) = -\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|$$

табличний

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x.$$

Частинний розв'язок: $\tilde{y} = -\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| \cdot \cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x$.

3) Загальний розв'язок:

$$y = y^* + \tilde{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| \cdot \cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x.$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВПРАВИ. Застосовуючи метод варіації довільних сталих, розв'язати рівняння:

а) $y'' + y = \mathrm{tg}x$. *Відповідь.* $y = -\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x$;

б) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$. *Відповідь.* $y = x\sin x + \cos x\ln|\cos x| + C_1\cos x + C_2\sin x$;

в) $y'' - 2y' + y = x^{-1}e^x$. *Відповідь.* $y = x(\ln|x| - 1)e^x + (C_1 + C_2x)e^x$.

5.1 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальной правою частиною. Метод невизначених коефіцієнтів

Нехай дано рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x). \qquad (5.91)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (5.91), згідно з (5.65), має вигляд

$$y = z + y^*, \qquad (5.92)$$

де z — розв'язок рівняння $L(z) = 0$.

Якщо $f(x)$ має спеціальний вигляд, то, користуючись методом варіації довільної сталої, можна довести, що частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів (за аналогією з рівнянням другого порядку). При цьому можливі такі випадки.

$$M(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0. \qquad (5.48)$$

1. Нехай $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, тоді, якщо α не є коренем характеристичного рівняння (5.48), то частинний розв'язок (5.91) шукають у формі

$$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}, \qquad (5.93)$$

де $Q_n(x)$ — поліном з невизначеними коефіцієнтами степеня n, що дорівнює степеню полінома $P_n(x)$. Якщо α є коренем характеристичного рівняння (5.48) кратності r, то

$$y^* = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}. \qquad (5.94)$$

У формулі (5.93) α називається *частотою зовнішнього збурення*, а корень характеристичного рівняння – *власною чатотою*. Умову (5.94) можно сформулювати як наступну: якщо *частотою зовнішнього збурення збігається з власною чатотою, то розв'язок шукаємо у формі (5.90).* Такий збіг частот $k = \alpha$ зветься *резонансом.*

Приклад. *Розв'язати диференціальне рівняння:*

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}.$$

Розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y(x) = y_{\text{з.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x).$$

Проінтегруємо відповідне однорідне диференціальне рівняння:

$$y'' - 5y' + 4y = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4,$$

$$y_{\text{з.о.}}(x) = c_1e^x + c_2e^{4x}.$$

Побудуємо тепер частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

Для правої частини $f(x) = 4x^2e^{2x}$ в (5.94) маємо, $n = 2$, $\alpha = 2$, $r = 0$, тобто

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x},$$

де A, B, C невизначені коефіцієнти.

Підставимо тепер функцію $y_{\text{ч.н.}}(x)$ у лінійне неоднорідне диференціальне рівняння:

$$y'_{\text{ч.н.}}(x) = (2Ax + B)e^{2x} + 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C),$$

$$y''_{\text{ч.н.}}(x) = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + B)e^{2x} + 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B),$$

$$(2A + 4Ax + 2B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C + 4Ax + 2B)e^{2x} -$$

$$-5(2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C)e^{2x} + 4(Ax^2 + Bx + C)e^{2x} = 4x^2e^{2x}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x^2, x та x^0:

$$x^2 : 4A - 10A + 4A = 4 \Rightarrow A = -2,$$

$$x|4A + 4B + 4A - 10A - 10B + 4B = 0 \Rightarrow -2B - 2A = 0 \Rightarrow B = 2,$$

$$x^0|2A + 2B + 4C + 2B - 5B - 10C + 4C = 0 \Rightarrow 2A - B - 2C = 0 \Rightarrow C = -3.$$

Тоді

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = (-2x^2 + 2x - 3)e^{2x},$$

а

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}$$

загальний розв'язок рівняння.

Приклад. *Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови (задача Коші)*

$y'' - 2y' = 2x + 3$

$y = y^* + \tilde{y}$.

1) Знаходимо y^* - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$y'' - 2y' = 0$

$k^2 - 2k = 0$, $k(k-2) = 0$. $\underline{k_1 = 0}$, $k - 2 = 0 \Rightarrow \underline{k_2 = 2}$.

Ф.С.Р.: $y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$, $y_2 = e^{2x}$.

Загальний розв'язок: $y^* = C_1 + C_2 e^{2x}$.

2) Знаходемо частинний розв'язок, $\tilde{y}$:

$\tilde{y} = x^r Q_n(x) e^{\alpha x} \Rightarrow n = 1 \quad Q_1(x) = Ax + B$; $\alpha = 0 = k_1 \neq k_2 \Rightarrow r = 1$

$\underline{\tilde{y} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx}$.

Знаходимо: $\tilde{y}' = 2Ax + B$

$\tilde{y}'' = 2A$.

Підставимо в диференціальне рівняння:

$2A - 2(2Ax + B) = 2x + 3$

$2A - 2B - 4Ax = 2x + 3$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x.

$$x \quad \Big| -4A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$x^0 \quad \Big| 2A - 2B = 3 \Rightarrow 2B = 2A - 3 \Rightarrow B = \frac{2A-3}{2} = A - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2.$$

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -2$$

$$\tilde{y} = x\left(-\frac{1}{2}x - 2\right) = -x\left(\frac{1}{2}x + 2\right).$$

3) Знаходимо y.

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 2\right).$$

2. Нехай

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right]. \qquad (5.98)$$

У цьому разі розв'язок рівняння (5.91) шукаємо у формі

$$y^* = x^r e^{\alpha x}\left[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x\right], \qquad (5.99)$$

де r показує, скільки разів $\alpha + j\beta$ є коренем характеристичного рівняння (5.48), а степені поліномів M і N дорівнюють максимальним степеням поліномів P_n і R_m. Дійсно, замінимо в (5.98) $\cos\beta x$ і $\sin\beta x$ за формулами Ейлера. Дістанемо

$$e^{\alpha x}P_n(x)\frac{e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}}{2} + e^{\alpha x}R_m(x)\frac{e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}}{2} =$$

$$= e^{(\alpha + j\beta)x}\left[\frac{P_n(x)}{2} + \frac{R_m(x)}{2j}\right] + e^{(\alpha - j\beta)x}\left[\frac{P_n(x)}{2} - \frac{R_m(x)}{2j}\right].$$

Позначимо

$$\frac{P_n(x)}{2} + \frac{R_m(x)}{2j} = M(x); \quad \frac{P_n(x)}{2} - \frac{R_m(x)}{2j} = N(x).$$

Виразу $M(x)e^{(\alpha + j\beta)x}$ відповідає $x^r e^{\alpha x}M(x)\cos\beta x$, а $N(x)e^{(\alpha - j\beta)x}$ відповідає $x^r e^{\alpha x}N(x)\sin\beta x$, тобто y^* обчислюється за формулою (5.99).

***Приклади.* 1.** Розв'язати рівняння $y'' + y = x\cos x + \sin x$.

Розв'язання. $k^2 + 1 = 0$; $k_1 = +j$; $k_2 = -j$; $\overline{z} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$;

$$\begin{array}{r|l}
1 & y^* = x\left[(Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x\right] = \left(Ax^2 + Bx\right)\sin x + \left(Cx^2 + Dx\right)\cos x; \\
0 & \left(y^*\right)' = (2Ax+B)\sin x + (2Cx+D)\cos x + \left(Ax^2 + Bx\right)\cos x - \left(Cx^2 + Dx\right)\sin x; \\
1 & \left(y^*\right)'' = 2A\sin x + 2C\cos x + (2Ax+B)\cos x - (2Cx+D)\sin x + (2Ax+B)\cos x - \\
 & -(2Cx+D)\sin x - \left(Ax^2 + Bx\right)\sin x - \left(Cx^2 + Dx\right)\cos x;
\end{array}$$

$$\begin{cases}
B + 2C = 0; & A = \frac{1}{4}; \\
2B + 2C = 0; & B = 0; \\
4A = 1; & C = 0; \\
2A - 2D = 1; & D = -\frac{1}{4};
\end{cases}$$

$$y^* = \frac{1}{4}x^2 \sin x - \frac{1}{4}x\cos x;$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{4}x^2 \sin x - \frac{1}{4}x\cos x.$$

У випадку сталих

$$f(x) = A_0 \cos\beta x + B_0 \sin\beta x. \tag{5.95}$$

Якщо $j\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то

$$y^* = M_0 \cos\beta x + N_0 \sin\beta x, \tag{5.96}$$

де M_0, N_0 — невизначені коефіцієнти.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y''' - y'' + 9y' - 9y = 15\sin 2x + 20\cos 2x.$$

Розв'язання.

$$k^3 - k^2 + 9k - 9 = 0;\ k_1 = 1;\ k_2 = 3j;\ k_3 = -3j;$$

$$z = C_1 e^x + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x;$$

$$\begin{array}{r|l}
-9 & y^* = A\sin 2x + B\cos 2x; \\
9 & \left(y^*\right)' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x; \\
-1 & \left(y^*\right)'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x; \\
1 & \left(y^*\right)''' = -8A\cos 2x + 8B\sin 2x;
\end{array}$$

$$A = 1;\ B = -2;\ y^* = \sin 2x - 2\cos 2x;\ y = z + y^*.$$

Загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x + \sin 2x - 2\cos 2x.$$

Якщо $j\beta$ — корінь характеристичного рівняння кратності r, то

$$y^* = x^r\left[M_0 \cos\beta x + N_0 \sin\beta x\right]. \qquad (5.97)$$

Зазначимо, що тут можна говорити про явище резонансу.

Зауваження. Навіть тоді, коли права частина виразів (5.95), (5.98) містить лише $\sin\beta x$ або лише $\cos\beta x$, частинний розв'язок потрібно шукати у формі (5.96) або (5.99).

2. Розв'язати рівняння $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$.

Розв'язання. $k^4 + 5k^2 + 4 = 0$; $k_1 = j$; $k_2 = -j$; $k_3 = 2j$; $k_4 = -2j$.

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x;$$

$$\begin{array}{r|l}
4 & y^* = x(A\sin x + B\cos x) = Ax\sin x + Bx\cos x; \\
0 & (y^*)' = A\sin x + B\cos x + x(A\cos x - B\sin x); \\
5 & (y^*)'' = A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x); \\
0 & (y^*)''' = -2A\sin x - 2B\cos x - A\sin x - B\cos x + x(-A\cos x + B\sin x); \\
1 & (y^*)^{IV} = -3A\cos x + 3B\sin x - A\cos x + B\sin x + x(A\sin x + B\cos x). \\
\hline
 & 6A\cos x - 6B\sin x = 3\sin x;
\end{array}$$

$$\begin{cases} 6A = 0; \quad A = 0; \\ -6B = 3; \; B = -\frac{1}{2}; \; y^* = -\frac{1}{2}x\cos x. \end{cases}$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

Зауваження. Якщо права частина рівняння (5.91) є сталою величиною, то рівняння завжди можна звести до однорідного. Дійсно, нехай в (5.91) $f(x) = Q_0 = \text{const}$. Введемо нову функцію $Y(x)$, пов'язану із старою $y(x)$ співвідношенням $y(x) = Y(x) + Q_0$. Тоді

$$y^{(i)}(x) = Y^{(i)}(x), \; i = \overline{1,n}.$$

Рівняння (5.91) перепишемо у вигляді

$$Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \ldots + a_n\left(Y + \frac{Q_0}{a_n}\right) = Q_0,$$

або

$$Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \ldots + a_n Y = 0. \qquad (5.100)$$

Зауваження: *Якщо права частина рівняння (5.91) є сумою функцій, то можна використовувати принцип суперпозиції розв'язків.*

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + 9y = x + e^x. \quad (1)$$

1) Знаходимо y^* - загальний розв'язок однорідного рівняння (2)

$$y'' + 9y = 0 \quad (2)$$

$$k^2 + 9 = 0 \quad k^2 = -9 \quad \underline{k_{1,2} = \pm 3i} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 3.$$

$$y^* = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

2) Знаходимо частинний розв'язок диференціального рівняння (1)

$f(x) = x + e^x$

$$\tilde{y} = y_1 + y_2 = \underbrace{Ax + B}_{\alpha=0\neq k_{1,2}} + \underbrace{Ce^x}_{\alpha=1\neq k_{1,2}}$$

$$\tilde{y}' = A + Ce^x$$

$$\tilde{y}'' = Ce^x.$$

Підставляємо $\tilde{y}, \tilde{y}''$ в (1)

$$Ce^x + 9\left(Ax + B + Ce^x\right) = x + e^x$$

$$9Ax + 9B + 10Ce^x = x + e^x$$

$$\begin{array}{c|l} x & 9A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{9} \\ x^0 & \qquad\qquad B = 0 \\ e^x & 10C = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{10} \end{array}$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{9}x + \frac{1}{10}e^x.$$

3) Знаходимо загальний розв'язок

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{10}e^x.$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВПРАВИ. Знайти загальний розв'язок рівнянь методом невизначених коефіцієнтів:

а) $y^{IV} + y''' = \cos 4x$. *Відповідь.* $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + \frac{1}{1088}\left(4\cos 4x - \sin 4x\right)$;

б) $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^x$. *Відповідь.* $y = C_1 + C_2 x + \left(C_3 + C_4 x\right)e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$;

в) $y''' - y = 3x - 1$. *Відповідь.* $y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - 3x + 1$.

ПОСИЛАННЯ ДО ЛЕКЦІЇ:

https://www.youtube.com/watch?v=rZnVI5iYDUA

https://www.youtube.com/watch?v=mm7cdScbNdo

https://www.youtube.com/watch?v=LaYHePVRB2o

https://www.youtube.com/watch?v=5-Ts9LgQ1dk

https://www.youtube.com/watch?v=uL1SizcqDmk