Контрольні завдання

Завдання 1. Обчислити криволінійний інтеграл I-го роду за вказаними кривими

1.1. $\int\limits_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dl$; L - дуга синусоїди $y = \sin x, (0 \le x \le \pi)$;

1.2. $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dl; L: y = \cos x, (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$;

1.3. $\int\limits_L \sqrt{1+\cos^4 x} dl; L: y = \operatorname{tg} x, (0 \le x \le \frac{\pi}{4})$;

1.4. $\int\limits_L \sin x \sqrt{1+\sin^4 x} dl; L = \operatorname{ctg} x, (\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2})$;

1.5. $\int\limits_L \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x} dl; L: y = \sin x, (0 \le x \le \frac{\pi}{4})$;

1.6. $\int\limits_L \sin^4 x \cos x dl; L: y = \ln \sin x, (\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3})$;

1.7. $\int\limits_L \sin^2 x \cos^3 x dl; L: y = \ln \cos x, (0 \le x \le \frac{\pi}{4})$;

1.8. $\int\limits_L \sin^4 x \cos^2 x dl; L: y = \ln \operatorname{cosec} x, (\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3})$;

1.9. $\int\limits_L \cos^4 x \sin^2 x dl; L: y = \ln \sec x, (0 \le x \le \frac{\pi}{6})$;

1.10. $\int\limits_L x dl$; L -дуга кола $\rho = R, (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$;

1.11. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+a^2} dl$; L - дуга спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ от $A(0,0)$ до $B(a^2, a)$;

1.12. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2} dl$; L - верхня половина кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi)$;

1.13. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2} dl$; L - дуга лемніскати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$;

1.14. $\int\limits_L (x^2+y^2)^{3/2} dl$; L - дуга лемніскати $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}, (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$;

1.15. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$; L - дуга лемніскати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$;

1.16. $\int\limits_L \sqrt{\frac{a^2}{b^2}y^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}dl$; L - дуга еліпса $x=a\cos t, y=b\sin t, (0\le t\le \frac{\pi}{2})$;

1.17. $\int\limits_L ydl$; L - перша арка циклоїди $x=3(t-\sin t), y=3(1-\cos t)$;

1.18. $\int\limits_L (x+2y-3z)dl$; L - відрізок прямий між точками

$A(1,3,-1), B(3,5,-1)$;

1.19. $\int\limits_L (3x-5y+z+2)dl$; L - відрізок прямий між точками

$A(4,1,6), B(5,3,8)$;

1.20. $\int\limits_L \sqrt{1+\frac{x}{R}}dl$; L - дуга кривої

$x=R\sin^2 t, y=R\sin t\cos t, z=R\cos t, (0\le t\le \frac{\pi}{2})$;

1.21. $\int\limits_L \sqrt{1+4y+9xz}dl$; L - дуга кривої $x=t, y=t^2, z=t^3, (0\le t\le 1)$;

1.22. $\int\limits_L ye^{-x}dl$; L - дуга кривої $x=\ln(1+t^2), y=2\operatorname{arctg} t-t+8, (0\le t\le 1)$;

1.23. $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$; $L: x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t), (0\le t\le 2\pi)$;

1.24. $\int\limits_L xyzdl$; $L: x=\frac{1}{2}t^2, y=t, z=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, (0\le t\le 1)$;

1.25. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$; L - дуга гвинтової лінії

$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, (0\le t\le 2\pi)$

1.26. $\int\limits_L xydl$; L - дуга еліпса $x=a\cos t, y=b\sin t, (0\le t\le \frac{\pi}{2})$;

1.27. $\int\limits_L zdl$; L - дуга конічної гвинтової лінії

$x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, (0\le t\le \pi)$;

1.28. $\int\limits_L \frac{dl}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; L - дуга гіперболічної спіралі

$\rho\varphi=1, \varphi_1=\sqrt{3}, \varphi_2=2\sqrt{2}$;

1.29. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$; L - коло $x^2+y^2=Rx$

1.30. $\int\limits_L \sqrt{2x^2+y^2}dl$; L - коло $x^2+y^2+z^2=a^2, z=x$;

Завдання 2. Застосування криволінійних інтегралів І-го роду

2.1. Обчислити статичний момент першого витка конічної гвинтової лінії $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t$ відносно площини XOY, якщо густина пропорційна квадрату відстані точки до цієї площини.

2.2. Знайти координати центру ваги дуги гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, (0 \le t \le \pi)$, якщо в кожній її точці лінійна щільність пропорційна аплікаті цієї точки.

2.3. Знайти координати центру ваги однорідної дуги кривої $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, (-\infty \le t \le 0)$.

2.4. Знайти координати центру ваги однорідної дуги гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, (0 \le t \le \beta)$.

2.5. Знайти координати центру ваги однорідної дуги циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (0 \le t \le 2\pi)$.

Обчислити довжини дуг у задачах 6-15

2.6. $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}$, між точками перетину з віссю OX.

2.7. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, (1 \le x \le 4)$.

2.8. $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t), (0 \le t \le \beta)$.

2.9. $x = t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t, y = 2\operatorname{ch} t, (0 \le t \le 2)$.

2.10. $y = \ln\sin x, (\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2})$.

2.11. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a\cos\frac{t}{2}, (0 \le t \le 2\pi)$.

2.12. $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$

2.13. $x = a \cdot cht, y = a \cdot sht, z = at, \qquad (0 \le t \le \beta)$

2.14. $x = at, y = a\sqrt{2}\ln t, z = \frac{a}{t}, \qquad (1 \le t \le 10)$

2.15. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$

Знайти масу матеріальної дуги у задачах 16 – 26

2.16. $L: xy = 1, \qquad \gamma(x, y) = \frac{k \cdot y^3}{x^2}, \qquad (1 \le y \le 2)$

2.17. $L: y = \frac{1}{3}x^3, \qquad \gamma(x, y) = kx^3, \qquad (0 \le x \le 1)$

2.18. $L: y = x^4, \qquad \gamma(x,y) = kx^5 \qquad (0 \le x \le 1)$

2.19. $L: x = \ln y, \qquad \gamma(x,y) = y^3\sqrt{1+y^2}, \qquad (1 \le y \le 2)$

2.20. $L: y = \ln\sin x, \qquad \gamma(x,y) = k\sin^3 x, \qquad \left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

2.21. $L: y = \ln\cos x, \qquad \gamma(x,y) = k\sin x \cdot \cos^2 x, \qquad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{6}\right)$

2.22. $L: y = \ln\operatorname{cosec} x, \qquad \gamma(x,y) = k\sin^3 x\cos x, \qquad \left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$

2.23. $L: y = \ln\sec x, \qquad \gamma(x,y) = k\sin^2 x\cos^2 x, \qquad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$

2.24. $L: x = t^3, \quad y = t, \quad z = t^2, \qquad \gamma(x,y,z) = k\sqrt{1+4z+9xy}, \quad (0 \le t \le 1)$

2.25. $L: x = R\cos t, y = R\sin^2 t, z = R\sin t\cos t, \quad \gamma(x,y,z) = k\sqrt{1+\frac{y}{2}}, \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

2.26. $x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad \gamma(x,y) = y \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

Обчислити значення криволінійного інтегралу I-го роду

2.27. $\int\limits_L \sqrt{1+x^4}\,dl, \quad L: \quad y = \frac{1}{3}x^4 \qquad (1 \le x \le 2)$;

2.28. $\int\limits_L \sqrt{1+x^2}\,dl, \quad L: \quad 2y - x^2 = 0 \qquad (1 \le x \le 3)$;

2.29. $\int\limits_L (x+y+z)dl$, L - відрізок прямий між точками $A(0,0,0)$ и $B(1,1,1)$;

2.30. $\int\limits_L (x+y)dl$, L - контур трикутника ABO, $A(1,0), B(0,1), O(0,0)$.

Завдання 3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду вздовж заданої лінії L. Зробити відповідний рисунок.

3.1. $\oint_L x^3ydx + y^3xdy$, L: контур Δ ABC, $A(-3;-1), B(0;2), C(3;-1)$;

3. 2. $\oint_L xdx + z^2dz$, L: $x^2 + z^2 = 4$;

3.3. $\int_L (x^2+4y)dx + (\sqrt{y} - x)dy$, L: $y = {x^4}/{4}$, $x\epsilon[-1;2]$;

3.4. $\oint_L y^2dy + zdz$, L: $y^2 + z^2 = 1$;

3.5. $\int_{OA} (2y - 6x^2)dx + (x + 4y^2)dy$, L: $y = \frac{1}{2}x^3$, $O(0;0)$, $A(2;4)$;

3.6. $\oint_L ydx - xdy$, L: $x = cost$, $y = sint$, $t\epsilon[0; 2\pi]$;

3.7. $\int_L \frac{ydx - xdy}{y^2}$, L: відрізок AB, $A(1; 2)$, $B(2; 1)$;

3.8. $\oint_{\Delta ABC}(3x^2 + y)dx + (x - 2y^2)dy, L: \Delta ABC, A(0; 0), B(1; 0), C(0; 1)$;

3.9. $\oint_L (x^3 - y^3)dx + (x^2 + y^2)dy$, L: контур прямокутника $ABCD$, $A(-1; -2)$, $B(3; -2)$, $C(3; 2)$, $D(-1; 2)$;

3.10. $\int_{AB}(y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, $L: x = t, y = t^2, z = t^3$, $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$;

3.11. $\int_L x^2dx - y^2dy$, $L: x = Rcost, y = Rsint$, $t\epsilon[0; \pi]$;

3.12. $\int_L (xy + 1)dx + (x + y)dy$, L: $y = cosx$, $x\epsilon\left[{}^{-\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\right]$;

3.13. $\oint_L xdy - ydx$, $L: x = acos^3t$, $y = sin^3t$;

3.14. $\int_L (x^2 + 1)dx + zdy + (y - 2)dz$, $L: x = cost, y = sint, z = t$, $t\epsilon[0; \pi]$;

3.15. $\int_{AB} y^2dx + x^2dy$, L: $x = cost, y = sint$, $A(1; 0), B(0; 1)$;

3.16. $\int_{OA} y^2dx + x\sqrt{x}dy$, L: $y = \sqrt{x}$, $O(0; 0)$, $A(4; 2)$;

3.17. $\int_L (y^2 - 20)dx + (x^2 - 25)dy$, L: ломана лінія ABC, A$(-2; 1)$, B$(1; 4)$, C$(5; 0)$;

3.18. $\oint_L (y^3 - x^2)dx + (y^2 + x)dy$, L: замкнений контур, утворений кривою $y = cosx$ та відрізком$y = 0$, $x \in \left[-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\right]$;

3.19. $\int_L xdy + ydx$, L: $x = 2cost, y = 3sint$, $t\epsilon[0; \pi]$;

3.20. $\int_{AB}(y^3 - 3x)dx + x\sqrt{x}dy$, L: $y^2 = x, y \leq 0, A(1; -1), B(4; -2)$;

3.21. $\int_L ydx$, L: $x = a(t - sint), y = a(1 - cost), t\epsilon[0; 2\pi]$;

3.22. $\int_L \left(x^2 + \sqrt[3]{y}\right)dx + (x - y)dy,\ L:\ y = x^3,\ x\epsilon[-1; 2];$

3.23. $\int_{AB} (x^2 - y^2)dx + 2xzdy - ydz\,, L: x = t, y = t^2, z = t^3,\ A(0; 0; 0),$
$B(1; 1; 1);$

3.24. $\int_L (1 + y^3)dx + (x^5 + y)dy,\ L:\ y = \sqrt[3]{2x^5}, x\epsilon[-2; 2];$

3.25. $\int_L (x^3 + 2y)dx + (y^2 - 2x)dy\,,\ L:\ {x^2}/{a^2} + {y^2}/{b^2} = 1, x \geq 0;$

3.26. $\int_L xydx + (x + y)dy\,,\ L:\ y\ =\ 2x + 1,\ x\epsilon[0; 2];$

3.27. $\int_{AB} y^2dx + 2xydy,\ L:\ y = \sqrt[3]{x},\ A(0; 0), B(1; 1);$

3.28. $\int_L (x^2 + y)dx + (y^2 - z)dy + (xy + z)dz,\ L:$ відрізок AB,
$\mathrm{A}(1; -2; -4), \mathrm{B}(5; 4; 6);$

3.29. $\int_L (x^2 + y)dx + (x^3 - 2y)dy\,, L: y = \sqrt{3x^3}, x\epsilon[0; 3];$

3.30. $\int_{AB} ydx + 2dy\,,\ L:\ y = x^2,\ A(0; 0),\ B(1; 1).$

Завдання 4. За допомогою криволінійного інтегралу другого роду обчислити:

Знайти роботу, яка виконона силою $\vec{F}(P,Q)$.

4.1. $F(x, y) = (2\,x^2 - 3y)\vec{\imath}\ + (2\,y^2 - 3x)\vec{\jmath}$ вздовж відрізка $y =\ 2x +$ 3 від $A(0,3)$ до $B(1,5)$

4.2. $F(x, y) = (2\,x^2 + 5y)\vec{\imath}\ + (2\,y^2 + 5x)\vec{\jmath}$ вздовж відрізка $3x +$ $2y^2 = 1$ від $A(-5, \sqrt{8})$ до $B(-1, \sqrt{2})$

4.3. $F(x, y) = (\,x^3)\vec{\imath} - (y^3)\vec{\jmath}$ вздовж відрізка $y = \sqrt{9 - x^2}$ від $A(0,3)$ до $B(3,0)$

4.4. $F(x, y) = (\,x^2 + y + z)\vec{\imath} + (z^2)\vec{\jmath} + (\,x + y^2)\vec{k}$ вздовж відрізка прямої від $A(2,1,0)$ до $B(4,3,1)$;

4.5. $F(x,y) = (x^2)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (xy)\vec{k}$ вздовж L: $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $z = \sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

4.6. $F(x,y) = (z)\vec{i} + (y)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$ вздовж L: $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $z = t$, $0 \le t \le 1$

4.7. $F(x,y) = (z)\vec{i} + (x)\vec{j} + \left(\frac{xy}{2}\right)\vec{k}$ вздовж L: $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

4.8. $F(x,y) = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ вздовж L: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

4.9. $F(x,y) = (y^2)\vec{i} + (xy)\vec{j}$ вздовж L: $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

4.10. $F(x,y) = (y)\vec{i} + (x^2)\vec{j} + (z)\vec{k}$ вздовж L: $x = t$, $y = t^3$, $z = t^5$, $0 \le t \le 1$

4.11. $\vec{F}(x;\frac{1}{y^2})$, вздовж дуги кривої $xy = 1$, $(1 \le x \le 4)$;

4.12. $\vec{F}(\sin^2 x;\ y^2)$, вздовж дуги кривої $y = \cos x$ $(0 \le x \le \pi)$;

4. $\vec{F}((x^2+y);(x+y^2))$, вздовж відрізка $A(-1,1)$ $B(0,2)$;

4.14. $\vec{F}(-y;x)$, вздовж дуги кривої $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$;

4.15. $\vec{F}((xy-x);\frac{x^2}{2})$, вздовж дуги кривої $y = 2\sqrt{x}$ від $A(0,0)$ до $B(1,2)$;

4.16. $\vec{F}((y^2-y);(2xy+x))$, вздовж дуги кривої $x^2+y^2=9$, від $A(3,0)$ до $B(-3,0)$;

Перевірити, що підінтегральний вираз є повним диференціалом функції $u(x,y)$, знайти цю функцію

4.17. $\int 3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy$;

4.18. $\int (xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2y - \frac{x^2}{y^3})dy$;

4.19. $\int \frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy$;

4.20. $\int [\sin 2x - 2\cos(x+y)]dx - 2\cos(x+y)dy$;

4.21. $\int \frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy$;

4.22. $\int (\sin y + y\sin x + \frac{1}{x})dx + (x\cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy$;

4.23. $\int e^y dx + (\cos y + xe^y)dy$;

4.24. $\int (y^2 + \frac{y}{\cos^2 x})dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy$;

4.25. $\int (3x^2 y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy$;

Застосувавши формулу Гріна обчислити інтеграл

4.26. $\oint\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy, \quad L: x^2 + y^2 = R^2$;

4.27. $\oint\limits_L (x+y)dx - (x-y)dy, \quad L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

4.28. $\oint\limits_L e^{-(x^2-y^2)}[\cos 2xydx + \sin 2xydy], \quad L: x^2 + y^2 = a^2$;

4.29. $\oint\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy, \quad L: x^2 + y^2 = ax$;

4.30. $\oint\limits_L (4x^3 - 3y^2 + 5y)dx + (5x - 6xy - 4y)dy, \quad L:$ контур трикутника $A(1,1), B(2,2), C(1,3)$.