Контрольні завдання

Завдання 5. Застосовуючи поверхневі інтеграли першого роду, розв'язати задачі. Зробити схематичний рисунок поверхні σ та області, по якій проводиться інтегрування у відповідному подвійному інтегралі.

5.1. Обчислити $\iint_\sigma (x-2y+3z)d\sigma$, якщо σ: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \geq 0$;

5.2. Обчислити $\iint_\sigma x^2 d\sigma$, коли σ: $y=x^2+y^2$ при $0 \leq y \leq 2$;

5.3. Знайти площу поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$;

5.4. Обчислити $\iint_\sigma yz d\sigma$, коли σ: $x=y^2$, $0 \leq x \leq 9, 0 \leq z \leq h$;

5.5. Знайти площу частини сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, $0 < h \leq z \leq R$
h, R – постійні (площа сферичного сегмента);

5.6. Обчислити $\iint_\sigma z^3 d\sigma$, якщо σ: $y^2=x^2+z^2$, $0 \leq y \leq 4$;

5.7. Знайти площу частини сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, $0 < h \leq z \leq H < R$,
h, H – постійні (площа сферичного пояса);

5.8. Обчислити площу бокової поверхні прямого кругового конуса з висотою H і радіусом основи R, розглянувши частину поверхні σ:
$z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$;

5.9. Обчислити площу поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$ при $0 \leq z \leq h$, $h=const$;

5.10. Обчислити $\iint_\sigma (y^2+2z^2)d\sigma$, якщо σ: $y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}$;

5.11. Обчислити $\iint_\sigma xy d\sigma$, коли σ: $z=3\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}$,
$0 \leq z \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$;

5.12. Обчислити $\iint_\sigma (3x+y+2z)d\sigma$, коли σ: $x^2+y^2+z^2=R^2$ при $z \geq 0$;

5.13. Обчислити $\iint_\sigma x d\sigma$, якщо σ: $z=\sqrt{x^2+{y^2}/{9}}$, $0 \leq z \leq 4$, $x \geq 0$;

5.14. Обчислити $\iint_\sigma xyz d\sigma$, де σ – частина поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$,

розміщена між площинами $z = 1$ і $z = 4$;

5.15. Обчислити $\iint_\sigma (y^2 - x^2)d\sigma$, якщо σ: $y = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

5.16. Обчислити $\iint_\sigma (x - y^2 + z^2)d\sigma$, де $\sigma -$ частина поверхні конуса
$x^2 = y^2 + z^2$, $0 \le x \le a$, $a -$ постійна;

5.17. Обчислити $\iint_\sigma (4z^2 + y)d\sigma$, якщо σ: $-3x + 6y + 2z = 6$,
$-2 \le x \le 0$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 3$;

5.18. Обчислити $\iint_\sigma (3x^2 + y - z^3)d\sigma$, де $\sigma -$ поверхня конуса $y^2 = x^2 + z^2$
при $4 \le y \le 9$;

5.19. Обчислити $\iint_\sigma z^2 d\sigma$, коли σ: $y = x^2 + z^2$, $0 \le y \le 3$;

5.20. Обчислити $\iint_\sigma \left(\sqrt{y} - z^2\right)d\sigma$, де $\sigma -$ частина циліндричної поверхні
$y = x^2$ при $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le 3$;

5.21. Обчислити $\iint_\sigma x^2 d\sigma$, коли σ: $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $0 \le y \le 2$;

5.22. Обчислити $\iint_\sigma (x^2 y - xz + yz^2)d\sigma$,
якщо $\sigma -$ повна бокова поверхня циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ при
$0 \le z \le h$, $R, h -$ постійні;

5.23. Обчислити $\iint_\sigma x^2 yz d\sigma$, коли σ: $2x + 2y - z + 4 = 0, x \le 0, y \le 0$,
$0 \le z \le 4$;

5.24. Обчислити $\iint_\sigma (xy^2 z^2 + zy^4)d\sigma$, якщо $\sigma -$
частина поверхні циліндра
$x^2 + z^2 = R^2$ при $-h \le y \le h$, $x \ge 0$, $R, h -$ постійні;

5.25. Обчислити $\iint_\sigma x d\sigma$, коли σ: $x = y^2 + z^2$, $0 \le x \le 2$;

5.26. Обчислити $\iint_\sigma x^2 yz(xy + z)d\sigma$, якщо $\sigma -$ повна бокова поверхня
циліндра $y^2 + z^2 = R^2$ при $0 \le x \le h$, $R, h -$ постійні;

5.27. Обчислити $\iint_\sigma yz d\sigma$, коли σ: $x = y^2 + z^2$, $1 \le x \le 4$;

5.28. Обчислити $\iint_\sigma (z^3 + xy)d\sigma$, якщо $\sigma -$
частина циліндричної поверхні
$x = y^2$ при $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le h$, $h -$ стала;

5.29. Обчислити $\iint_\sigma (x+y)d\sigma$, коли σ: $y^2+z^2=9$, $-1 \le x \le 2$, $z \ge 0$;

5.30. Обчислити $\iint_\sigma (y^3 - x(z-y) + z^2)d\sigma$, якщо $\sigma -$ поверхня конуса $x^2 = y^2 + z^2$ при $1 \le x \le 5$.

Завдання 6. Застосовуючи поверхневі інтеграли другого роду, розв'язати задачі. В кожному завданні зробити схематичний рисунок поверхні σ з виділенням вказаної сторони поверхні нормаллю n¯ та зображенням областей D, по яких проводиться інтегрування у відповідних подвійних інтегралах.

6.1. $\iint_\sigma \sqrt{1+y}dydz + zydxdz + xz^2dxdy$,
σ: внутрішня частина циліндричної поверхні $y = x^2$ при
$-1 \le x \le 2$, $0 \le z \le h$, $h = const$;

6.2. $\iint_\sigma xzdydz + xydxdz - zydxdy$, σ: верхня частина площини
$x + y + z = 2$ при $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

6.3. $\iint_\sigma y^2xzdydz + (x+z)dxdz + dxdy$, σ: внутрішня частина циліндричної поверхні $x = y^2$ при $-2 \le y \le 2$, $0 \le z \le 1$;

6.4. $\iint_\sigma ydydz - zdxdz + xdxdy$, σ: зовнішня частина конуса
$z^2 = x^2 + y^2$ при $-h \le z \le 0$, $h > 0$;

6.5. $\iint_\sigma 3xzdydz + yz^2dxdz + ydxdy$, σ: зовнішня частина поверхні
$y = x^2$ при $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 3$;

6.6. $\iint_\sigma xdydz + (2+3y)dxdz + zdxdy$, σ: зовнішня частина параболоїда
$z = x^2 + y^2$ при $0 \le z \le a^2$;

7. $\iint_\sigma \frac{x^2z^2}{y^2}dydz + \frac{z}{1+y^2}dxdz + dxdy$, σ: зовнішня сторона циліндричної поверхні $x = y^2$ при $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le h$;

6.8. $\iint_\sigma (x+2y)dydz + (y-z)dxdz + (x+z)dxdy$, якщо $\sigma -$ частина внутрішньої сторони поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$ при
$0 \le z \le h$, $x \ge 0$, $h = const$;

6.9. $\iint_\sigma xydydz + (y+z)\,dxdz - xzdxdy$, σ: верхня частина площини

$6x - 4y + 3z = 12$ при $x \geq 0,\ y \leq 0,\ z \geq 0$;

6.10. $\iint_\sigma \frac{x^2y^2}{z^2} dxdy$, коли $\sigma -$ внутрішня сторона поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$ при $0 \leq z \leq a,\ a = const$;

6.11. $\iint_\sigma (x+y)dydz + (x-z)dxdz + yzdxdy$, якщо $\sigma -$ нижня сторона площини $4x - 12y - 3z = 12$ при $x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0$;

6.12. $\iint_\sigma (z^3 + x^2y)dydz + x(xz+1)dxdz - xyzdxdy$, коли $\sigma -$ внутрішня бокова поверхня циліндра $x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \leq z \leq h,\ a, h - const$;

6.13. $\iint_\sigma xyz^2dydz + xydxdz + xzdxdy$, σ: зовнішня частина поверхні параболоїда $y = x^2 + z^2$ при $0 \leq y \leq 2$;

6.14. $\iint_\sigma xydydz - yzdxdz + xzdxdy$, якщо $\sigma -$ нижня частина площини $x + y + z = 3$ при $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$;

6.15. $\iint_\sigma (y+z)dydz + (x+y)dxdz + x^2zdxdy$, σ: внутрішня частина поверхні параболоїда $y = x^2 + z^2,\ 0 \leq y \leq 3$;

6.16. $\iint\limits_\sigma (5x^2 + 5y^2 + z^2)dxdy$, σ - верхня сторона поверхні $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, яка вирізана поверхнею $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6.17. $\iint\limits_\sigma (x^2 + y^2 + 3z^2)dxdy$, σ $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, z = 2$; (верхня сторона конуса)

6.18. $\iint\limits_\sigma \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\right)dxdy$, $\sigma: z = 4 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}, z = 0$; (нижня сторона параболоїда)

6.19. $\iint\limits_\sigma (x^2 - 2y^2 + 6z)dxdy$, $\sigma: y^2 = 6z, z = 6, x = 0, x = 3$; (зовнішня сторона циліндра)

6.20. $\iint\limits_\sigma (2x + 3y + 4z)dxdy$, $\sigma: x + y + z - 6 = 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; (верхня сторона площини, яка вирізана циліндром)

6.21. $\iint\limits_\sigma (x^2 + z^2)dydz$, $\sigma: x = \sqrt{9 - y^2}, z = 0, z = 2$; (зовнішня сторона циліндра, відтятого площинами)

6.22. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)dxdy, \quad \sigma: y=\sqrt{1-x^2-z^2}, y=\sqrt{x^2+z^2}$; (зовнішня сторона півсфери, яка вирізана конусом)

6.23. $\iint\limits_{\sigma}(2x^2+y^4+z^4)dydz, \quad \sigma: x=yz, y\geq 0, z\geq 0, (y^2+z^2)^2=2b^2yz$; (зовнішня сторона поверхні, яка вирізана циліндром)

6.24. $\iint_{\sigma} ydydz+xz^2dxdz+x^2dxdy$, коли $\sigma -$ внутрішня бокова поверхня циліндра $y^2+z^2=R^2$, $y\geq 0$, $0\leq x\leq 4$;

6.25. $\iint_{\sigma}(z^2-y^2)dydz-xy(y+z)dxdz+xz^2dxdy$, де $\sigma -$ зовнішня поверхня півсфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ при $x\leq 0$;

6.26. $\iint_{\sigma} yz^2dydz+y^2zdxdz+xzdxdy$, якщо $\sigma -$ внутрішня бокова поверхня циліндра $x^2+z^2=R^2$ при $x\geq 0$, $0\leq y\leq 2$;

6.27. $\iint_{\sigma}(y^2-z^2)dydz+xydxdz+xzdxdy$, коли $\sigma -$ зовнішня поверхня еліпсоїда $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ при $z\geq 0$;

6.28. $\iint_{\sigma} xydydz+xz^2dxdz-y^3dxdy$, коли $\sigma -$ зовнішня частина півсфери $y=-\sqrt{R^2-x^2-z^2}$;

6.29. $\iint_{\sigma} y(z-x)dydz+x^2dxdz+y(x+z)dxdy$, де $\sigma -$ зовнішня частина поверхні еліпсоїда $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1$ при $y\leq 0$;

6.30. $\iint_{\sigma} z(x+y)dydz+z^3dxdz+(x^2-y^2)dxdy$, якщо $\sigma -$ нижня внутрішня частина поверхні еліпсоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$ $(z\leq 0)$.