6. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

6.2 Поверхневі інтеграли 2-го роду

Поверхневі інтеграли II роду є певним узагальненням криволінійних інтегралів II роду.

Для введення цих понять розглянемо спочатку означення *двосторонньої поверхні*.

Будемо розглядати гладкі скінченні поверхні σ, що обмежуються простими замкненими кусково-гладкими границями (контурами) без самоперетинів або замкнені гладкі поверхні. В кожній точці $M_0(x_{0,}y_{0,}z_0)$ такої поверхні існує дотична площина, а значить і нормаль $\bar{n}$ до цієї поверхні. Виберемо один з двох можливих напрямків цієї нормалі. Зрозуміло, що можна будувати різні замкнені контури, які проходять через точку M_0, лежать на поверхні σ і не перетинають границь σ.

Означення 1. Якщо при обході по довільному замкненому контуру, що не перетинає межі поверхні σ, ми повертаємося в точу M_0 з тим самим напрямком нормалі $\bar{n}$, то поверхня σ називається *двосторонньою*.

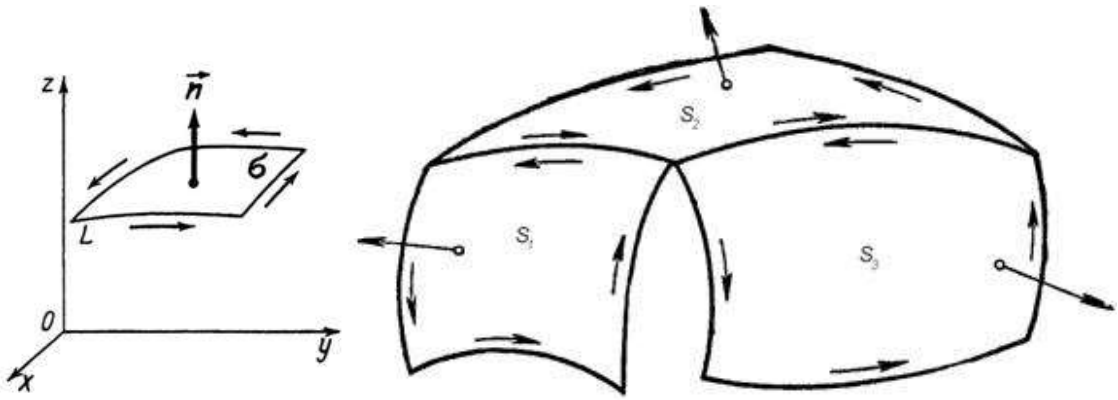

Рис. 1

Прикладами двосторонніх поверхонь можуть бути: **а)** площина, **б)** сфера, **в)** поверхня, яка однозначно задається рівнянням $z = f(x, y)$ при умові, що $f(x, y), f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ неперервні в деякій області D_{xy} з координатної площини XOY та інші.

Означення 2. Якщо існує такий замкнений контур на поверхні σ, при обході по якому нормаль $\bar{n}$ повертається в точку M_0 з протилежним напрямком $(-\bar{n})$, то поверхня зветься *односторонньою.*

Найпростішим прикладом односторонньої поверхні є *лист Мебіуса*. Цю поверхню можна отримати, коли прямокутний лист паперу $ABCD$ (Рис. 2) один раз повернути та склеїти, сумістивши точки A з C та B з D.

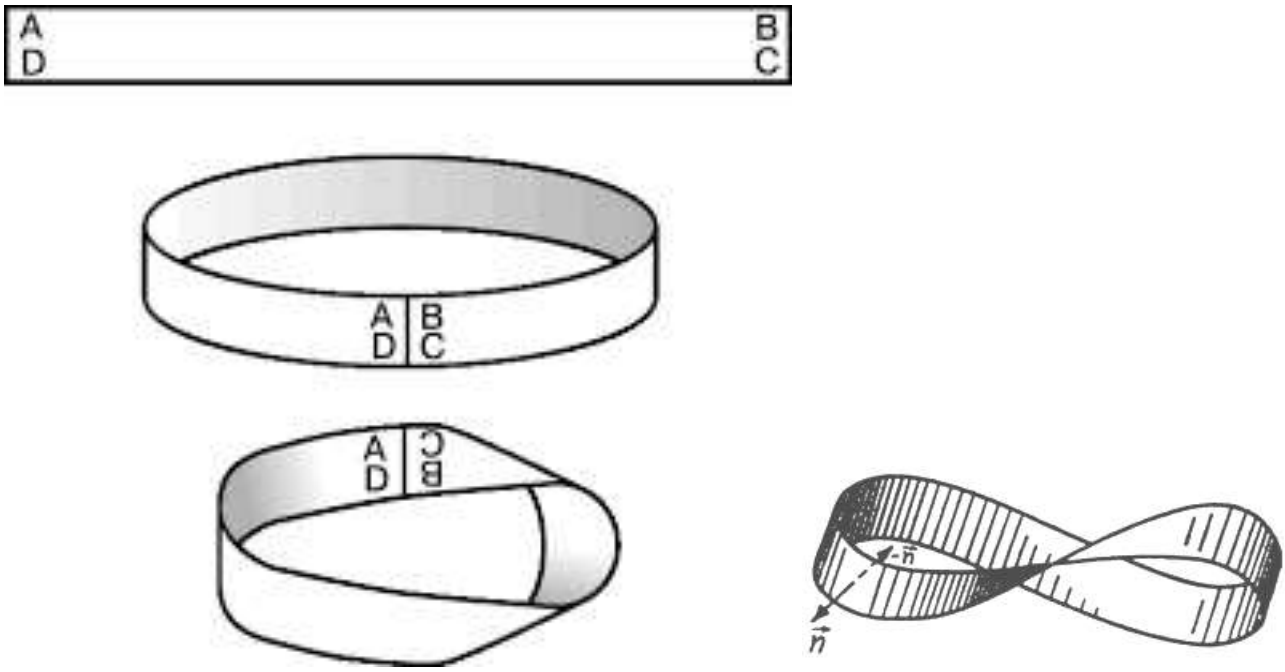

Рис. 2.

Двосторонні поверхні називають *орієнтовними*, а вибір певної сторони поверхні (отже, вибір напрямку нормалі $\bar{n}$) називають *орієнтацією* поверхні. Односторонні поверхні – неорієнтовні.

Розглянемо орієнтовну гладку поверхню σ, вважаючи напрям нормалі $\bar{n}$ до σ уже вибраним. Нехай поверхня σ обмежена кусково – гладким контуром (межею) L. Як уже зазначалося раніше (для криволінійних інтегралів II роду, обхід замкнутого контура L вважатимемо додатнім і позначатимемо L^+, коли при обході поверхні σ по контуру, сама поверхня залишається зліва, якщо дивитися з кінця нормалі $\bar{n}$. Для "зовнішньої" (верхньої) сторони поверхні σ обхід L^+ означає рух "проти годинникової стрілки" (рис. 3). Протилежний обхід

контура позначається L^-. Для “внутрішньої” (нижньої) сторони поверхні σ обходи контура L^+ і L^- міняються місцями.

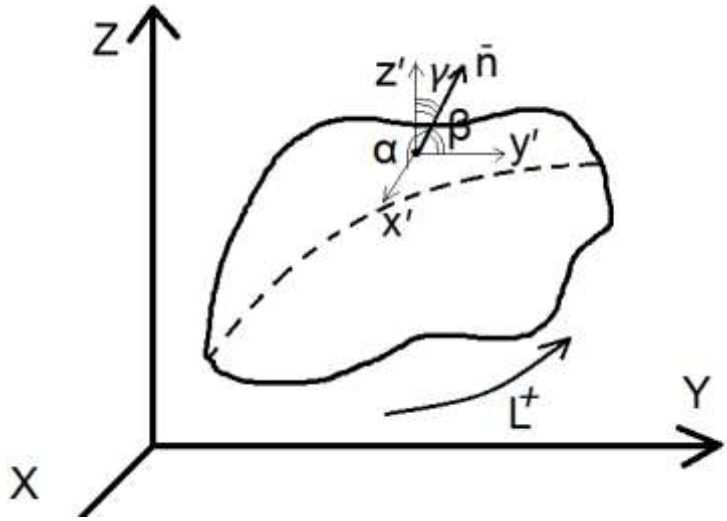

Рис. 3.

Для введення загального означення поверхневого інтеграла II роду розглянемо *три частинні випадки*.

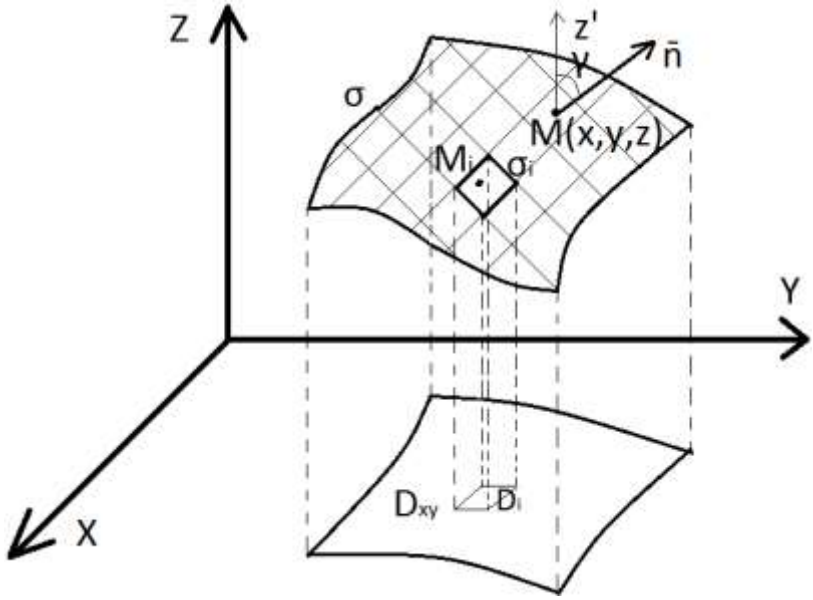

Рис. 4.

1. Нехай гладка орієнтовна поверхня σ задається однозначною функцією $z = z(x, y)$ і на цій поверхні визначена неперервна функція $R(x, y, z)$. Розіб’ємо поверхню σ на m елементарних частинок σ_i $(i = 1; 2; 3; \dots; m)$; це можна зробити координатними площинами $x = const, y = const$. Орієнтація кожної частинки σ_i буде збігатися з орієнтацією (вибором напрямку нормалі $\bar{n}$) всієї поверхні σ. Позначимо через D_i проекцію σ_i на координатну площину XOY, а

через ΔS_i - площу D_i (рис. 4). При цьому (увага!) перед ΔS_i ставимо знак “+”, коли вибрана “зовнішня” (верхня) сторона поверхні σ $\equiv \sigma^+$ ($\cos\gamma > 0$, де $\gamma -$ кут між нормаллю $\bar{n}$ до “зовнішньої” частини поверхні σ і додатним напрямком осі OZ) та ставимо перед ΔS_i знак"--" (мінус), коли розглядається “внутрішня” (нижняя) сторона поверхні σ $\equiv \sigma^-$ ($cos\gamma < 0$, тобто вказаний вище кут γ є тупим).

Виберемо по довільній точці $M_i(x_{i,}y_{i,}z_i)$ на кожній елементарній поверхні σ_i ($i = 1; 2; 3; \dots; m$) та складемо інтегральну суму для “зовнішньої” сторони поверхні σ ($\cos\gamma > 0 <=> \gamma -$ гострий):

$$+ \sum_{i=1}^{m} R(x_{i,}y_{i,}z_i)\Delta S_i.$$

Нехай $\lambda = \max\limits_{1\le i\le m} diam\,(\sigma_i)$ - найбільший діаметр утворених елементарних (гладких) поверхонь σ_i.

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{m} R(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i = I \quad (I\text{- скінченне число}),$$

що не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частини σ_i, ні від вибору точок $M_i(x_{i,}y_{i,}z_i)$є σ_i, то число I називається *поверхневим інтегралом II роду* функції $R(x, y, z)$ по верхній стороні поверхні σ і позначається

$$\iint_\sigma R(x, y, z)dxdy. \tag{1}$$

Тобто

$$\iint_\sigma R(x, y, z)dxdy = \lim_{\substack{m\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{m} R(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i \equiv I. \tag{2}$$

Зауваження. При заміні сторони поверхні σ на протилежну σ^-, величина I змінюється на протележну $(-1)I$. Добуток $dxdy$ - проєкція елемента поверхні σ на площину XOY

Із способу побудови інтегральних сум і властивостей границь легко отримати таку властивість введених поверхневих інтегралів II роду (2):

$$\iint_{\sigma_1+\sigma_2} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\sigma_1} R(x,y,z)dxdy + \iint_{\sigma_2} R(x,y,z)dxdy.$$

Звідси маємо

Наслідок: нехай в кусково-гладкій поверхні $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ частина гладкої поверхні σ_2 є циліндричною поверхнею з твірною, паралельною осі OZ; площа проекції такої поверхні σ_2 на координатну площину XOY дорівнює нулю і, отже,

$$\iint_{\sigma_2} R(x,y,z)dxdy = 0.$$

Обчислення введених поверхневих інтегралів II роду (2) зводиться до обчислення подвійних інтегралів по області D_{xy} з координатної площини XOY (Рис. 4), в яку однозначно проектується поверхня σ, і в залежності від вибраної сторони поверхні σ маємо два випадки:

а. $$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = +\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy \qquad (3)$$

при виборі верхньої сторони поверхні $z = z(x,y)$

$$(\angle\gamma \equiv \angle(\bar{n}, \wedge\, OZ) \text{ – гострий} <=> \cos\gamma > 0);$$

б. $$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy \qquad (4)$$

при виборі нижньої сторони поверхні $z = z(x,y)$

$$(\angle\gamma \equiv \angle(\bar{n}, \wedge\, OZ) \text{ – тупий} <=> \cos\gamma < 0).$$

2. Поверхню σ можна проектувати і на координатні площини YOZ та XOZ. Розглянемо спочатку випадок, коли поверхня σ задається функцією $x = x(y,z)$, однозначно проектується в область D_{yz} координатної площини YOZ, а функція $P(x,y,z)$ визначена і неперервна на поверхні σ.

Тоді, після розбиття поверхні σ на елементарні частини σ_i $(i = 1; 2; \dots; m)$, вибору точок $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \sigma_i$, побудови відповідних інтегральних сум для

функції $P(x,y,z)$ та переходу до границі, як у (2), ми одержимо *поверхневий інтеграл II роду*

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dy\,dz. \tag{5}$$

Обчислення інтеграла (5), аналогічно попередньому випадку, зводиться до подвійного інтеграла по області D_{yz} з координатної площини YOZ в залежності від вибраної сторони поверхні σ:

а. $$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz = +\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \tag{6}$$

при виборі верхньої, по відношенню до додатного напрямку осі OX, сторони поверхні σ ($\angle \propto \equiv \angle(\bar{n}, \wedge OX)$ – гострий $<=> \cos \propto > 0$);

б. $$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz = -\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \tag{7}$$

при виборі протилежної до випадку а) сторони поверхні σ ($\angle \propto$ – тупий $<=> \cos \propto < 0$).

3. Якщо гладка поверхня σ задається однозначною функцією $y = y(x,z)$, проектується на координатну площину XOZ в областьD_{xz}, а функція $Q(x,y,z)$ визначена і неперервна на поверхні σ, то можна розглядати такий *поверхневий інтеграл II роду*:

$$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz. \tag{8}$$

Зведення цього інтеграла до подвійного по області D_{xz} відбувається, як і в попередніх випадках, з врахуванням сторони поверхні σ, по якій ведеться інтегрування:

а. $$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz = +\iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \tag{9}$$

при умові, що $\angle\beta \equiv \angle(\bar{n}, \wedge OY)$ – гострий $<=> \cos\beta > 0$;

б. $$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz = -\iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \tag{10}$$

при виборі протилежної до випадку а) сторони поверхні σ, тобто, якщо $\angle\beta$– тупий $<=> \cos\beta < 0$.

Нагадаємо, що кути $\alpha, \beta, \gamma -$ це кути, які утворює нормаль $\bar{n}$ до вибраної сторони поверхні σ з додатними напрямками координатних осей OX, OY, OZ.

На практиці, як правило, інтеграли (1), (5), (8) зустрічаються одночасно, тобто потрібно розглядати *поверхневі інтеграли II роду вигляду*

$$\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + \iint_\sigma Q(x,y,z)dxdz + \iint_\sigma R(x,y,z)dxdy \equiv$$

$$\equiv \iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy. \qquad (11)$$

При обчисленні загального поверхневого інтеграла II роду (11) за приведеними формулами (1) – (4), (5) – (7), (8) – (10) вимагається представлення поверхні σ в трьох потрібних виглядах: $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, $z = z(x,y)$ і однозначних проектувань поверхні σ на координатні площини в області D_{yz}, D_{xz}, D_{xy}.

В практичних задачах часто цього досягти важко. Тому зручними на практиці є переходи до подвійних інтегралів, які залежать від наступних властивостей поверхні σ:

1. Нехай, наприклад, гладка поверхня σ задається однозначною функцією $z = z(x,y)$ і однозначно проектується в область D_{xy} координатної площини XOY.

В формулі для координат орта $\bar{n}_0$ нормалі до верхньої сторони поверхні σ:

$$\bar{n}_0 = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\},$$

де

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}, \ \cos\beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} > 0\ . \qquad (12)$$

Для протилежної сторони поверхні σ знаки направних косинусів нормалі міняються на протилежні.

Тобто проєція елементарної поверхні розбиття на площину XOY складає:

$$dxdy = d\sigma \cos\gamma. \tag{13}$$

Легко отримати й інші аналогічні рівності:

$$dxdz = d\sigma \cos\beta,\ dydz = d\sigma \cos\alpha. \tag{14}$$

Підставивши добутки диференціалів координат з формул (13), (14) та значення напрямних косинусів (12) у вираз загального поверхневого інтеграла II роду (11), одержимо:

$$\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_\sigma [P(x,y,z)(-z'_x) + Q(x,y,z)(-z'_y) + +R(x,y,z)\cdot 1]\frac{d\sigma}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} =$$
$$= \iint_{D_{xy}} [P(x,y,z(x,y))(-z'_x) + Q(x,y,z(x,y))(-z'_y) +$$
$$+R(x,y,z(x,y))]dxdy \tag{15}$$

для верхньої сторони поверхні σ.

Для нижньої сторони поверхні σ одержаний подвійний інтеграл потрібно помножити на (-1).

2. Розглянемо випадок, коли рівняння гладкої поверхні σ зручно задати функцією $x = x(y,z)$ і поверхня σ однозначно проектується в область D_{yz} координатної площини YOZ. З розділу вищої математики “функції багатьох змінних” випливає, що нормаль $\bar{n}$ до поверхні $x = x(y,z)$ в цьому випадку має напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}},\ \cos\beta = \frac{\mp x'_y}{\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{\mp x'_z}{\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}}, \tag{16}$$

де верхні знаки “+” і “-” відносяться до сторони поверхні σ, яку видно з додатного напрямку координатної осі OX (позначимо її $\sigma+$, там $\cos\alpha > 0$), а

нижні знаки – до протилежної сторони поверхні σ (позначимо її $\sigma-$, там $\cos\alpha < 0$).

Підставляючи вирази з формул (13), (14), які залишаються без змін, та вирази напрямних косинусів з (16) в інтеграл (11), для сторони поверхні σ^+ будемо мати:

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_{\sigma+}[P(x,y,z)\cdot 1 - (x'_y)Q(x,y,z) - (x'_z)R(x,y,z)]\frac{d\sigma}{\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}} =$$
$$= + \iint_{D_{yz}}[P(x(y,z),y,z) - (x'_y)Q(x(y,z),y,z) -$$
$$-(x'_z)R(x(y,z),y,z)]dydz. \qquad (17)$$

Для протилежної сторони поверхні $(\sigma-)$ одержаний в (16) подвійний інтеграл потрібно помножити на (-1).

3. Якщо гладка поверхня σ задається функцією $y = y(x,z)$, поверхня σ однозначно проектується в область D_{xz} координатної площини XOZ, то, по аналогії з попередніми випадками, загальний поверхневий інтеграл II роду (11) зводиться до таких подвійних інтегралів:

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \pm \iint_{D_{xz}}[P(x,y(x,z),z)(-y'_x) + Q(x,y(x,z),z)\cdot 1 +$$
$$+R(x,y(x,z),z)(-y'_z)]dxdz, \qquad (18)$$

де знак “+” береться, коли інтегрування ведеться по стороні поверхні σ, яку видно з додатного напрямку осі OY $(\cos\beta > 0)$ і знак “-”, коли інтегрування відбувається по протилежній стороні поверхні σ $(\cos\beta < 0)$.

Зв’язок між поверхневими інтегралами I та II родів

Підставивши залежності (13) і (14) у вираз загального поверхневого інтеграла II роду (11), будемо мати зв'язок між поверхневими інтегралами I та II родів:

$$\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_\sigma [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]d\sigma, \qquad (19)$$

де вирази напрямних косинусів можна виразити через координати поверхні σ, наприклад, за формулами (12) або (16).

Фізична інтерпретація поверхневих інтегралів II роду

Нехай в околі поверхні σ задано вектор

$\vec{V} = P(x,y,z)\bar{\imath} + Q(x,y,z)\bar{\jmath} + R(x,y,z)\bar{k},$

що описує швидкість рідини або газу.

Тоді, використовуючи запис одиничного вектора нормалі до поверхні σ $\bar{n}_0 = \cos\alpha\,\bar{\imath} + \cos\beta\,\bar{\jmath} + \cos\gamma\,\bar{k}$ і формулу (18), одержимо:

$$\Pi = \iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_\sigma [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]d\sigma =$$
$$\iint_\sigma \left(\vec{V}\cdot\vec{n}_0\right)d\sigma = \iint_\sigma \text{пр}_{\vec{n}}\vec{V}d\sigma \qquad (20)$$

це кількість (об'єм) рідини (газу), що протікає через поверхню σ за одиницю часу в напрямку нормалі $\bar{n}$ (Рис. 5). Інакше величину П ще називають *потоком вектора $\vec{V}$ через орієнтовану поверхню σ у вказаному напрямку.*

Зрозуміло, що на потік П працює складова $\bar{V}_n$ вектора V, де $\bar{V} = \bar{V}_n + \bar{V}_{\text{дот}}$, $\bar{V}_n \perp \sigma$, $\bar{V}_{\text{дот}}$ – дотичний до σ в точці M вектор ($\bar{V}_n \perp \bar{V}_{\text{дот}}$).

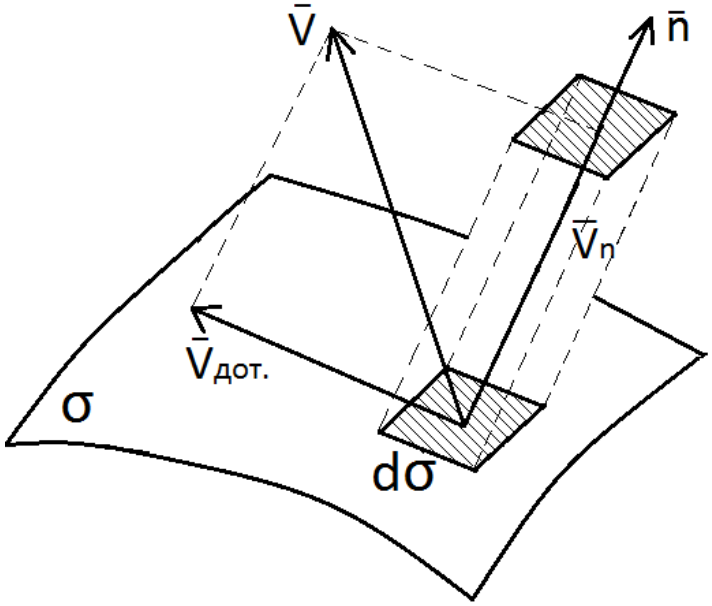

Рис. 5.

Приклад 1. Обчислити $\iint_{\sigma} xz(x-y)\,dydz + z^2ydxdz + z(y^2-x^2)dxdy$, якщо поверхня σ – верхня частина площини $x-y+z=1$, обмежена умовами $x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0$.

► Поверхнею σ є площина трикутника ABC (Рис. 6), який однозначно проектується на всі три координатні площини XOY, XOZ, YOZ. Виберемо одну з них, наприклад, площину XOY. Тоді областю D_{xy} буде ΔAOC, де $A(0;-1)$, $O(0;0)$, $C(1;0)$.

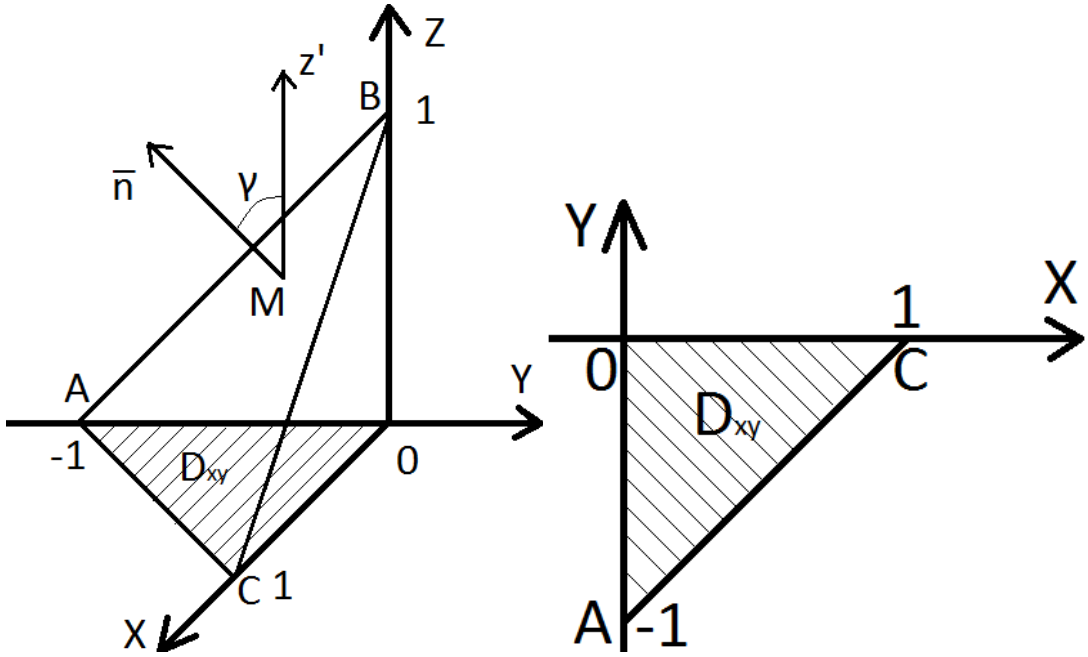

Рис. 6.

Нормаль $\bar{n}$ до поверхні σ (верхня площина ΔABC) утворює гострий кут γ з додатним напрямком осі OZ $(\cos\gamma > 0)$. Для обчислення заданого інтеграла вибираємо формулу (3) із знаком "+" перед подвійним інтегралом.

Тоді

$z = 1 - x + y,\ z'_x = -1,\ z'_y = 1$, рівняння сторони AC області D_{xy} буде $y = x - 1$.

Отже,

$$\iint_\sigma xz(x-y)\,dydz + z^2 ydxdz + z(y^2 - x^2)dxdy =$$

$$= + \iint_{D_{xy}} [1 \cdot x(1-x+y)(x-y) - (1-x+y)^2 y +$$

$$+(1-x+y)(y^2-x^2)]dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (xy - y - y^2)dxdy = \int_{-1}^{0} \mathrm{ydy} \int_{0}^{\mathrm{y}+1} (x - 1 - y)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} y(y^2 + 2y + 1)\,dy = \frac{1}{24}.◄$$

Приклад 2. Обчислити поверхневий інтеграл II роду $\iint_\sigma x^2 dydz - y^2 dxdz + z^2 dxdy$, якщо поверхня σ – зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ при $x \geq 0$.

► Поверхня σ задається функцією $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$ і однозначно проектується в круг $z^2 + y^2 \leq R^2$ координатної площини YOZ. Це область D_{yz} (Рис. 7). На рисунку використана правостороння система координат, але, для кращої наглядності, просто повернута.

Нормаль $\bar{n}$ до зовнішньої сторони поверхні σ утворює гострий кут α з додатнім напрямком осі OX $(\cos\alpha \geq 0)$.

Для обчислення заданого інтеграла скористаємося формулою (17).

Отже, маємо

$$x'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}},\ x'_z = \frac{-z}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}};$$

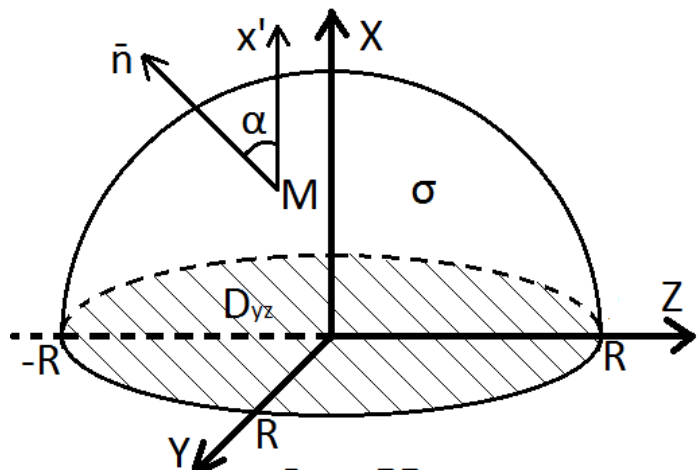

Рис. 7.

$$\iint_\sigma x^2dydz - y^2dxdz + z^2dxdy = +\iint_{D_{yz}}(R^2 - y^2 - z^2 + \frac{y^2y - z^2z}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}})\,dydz =$$

$$\left|\begin{matrix} y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \end{matrix} J = \rho\right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R [R^2 - \rho^2 + \frac{\rho^3(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi)}{\sqrt{R^2-\rho^2}}]\rho d\rho =$$

$$= R^2 2\pi \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^R - 2\pi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R + \int_0^R \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \cdot \int_0^{2\pi}(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \pi R^4 - \frac{\pi R^4}{2} + 0 = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Ми використали тут очевидні факти, що

$\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi} sin^3\varphi\,d\varphi = 0$, а $\int_0^R \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$ – обмежений:

$$0 < \int_0^R \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \left|\begin{matrix} \rho = R\sin t \\ d\rho = R\cos t\,dt \end{matrix}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4\sin^4 t R\cos t dt}{R\cos t} =$$

$$= R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,Rdt < R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt < \frac{\pi R^4}{2}.◄$$

Приклад 3. Обчислити поверхневий інтеграл $I = \iint_\sigma (x + 2y)dydz + (y - z)dxdz + (x + z)dxdy$, якщо σ – зовнішня сторона замкнутої поверхні, утвореної конусом $z^2 = x^2 + 4y^2$ і площинами $z = \frac{h}{2},\ z = h\ \ (h = const > 0)$.

► Кусково – гладка поверхня σ складається з трьох гладких поверхонь σ_1, σ_2 і σ_3 $(\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, де σ_1- зовнішня (нижня) сторона поверхні

зрізаного конуса $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$, $\frac{h}{2} \le z \le h$, σ_2 - частина площини $z = h$, обмежена еліпсом $x^2 + 4y^2 = h^2$, σ_3 – частина площини $z = \frac{h}{2}$, обмежена еліпсом $x^2 + 4y^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2$ (Рис. 8).

Розглянемо заданий інтеграл I окремо по поверхнях σ_1, σ_2 , σ_3:

1. Поверхня σ_1 задається функцією $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$,

$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$, $z'_y = \frac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$.

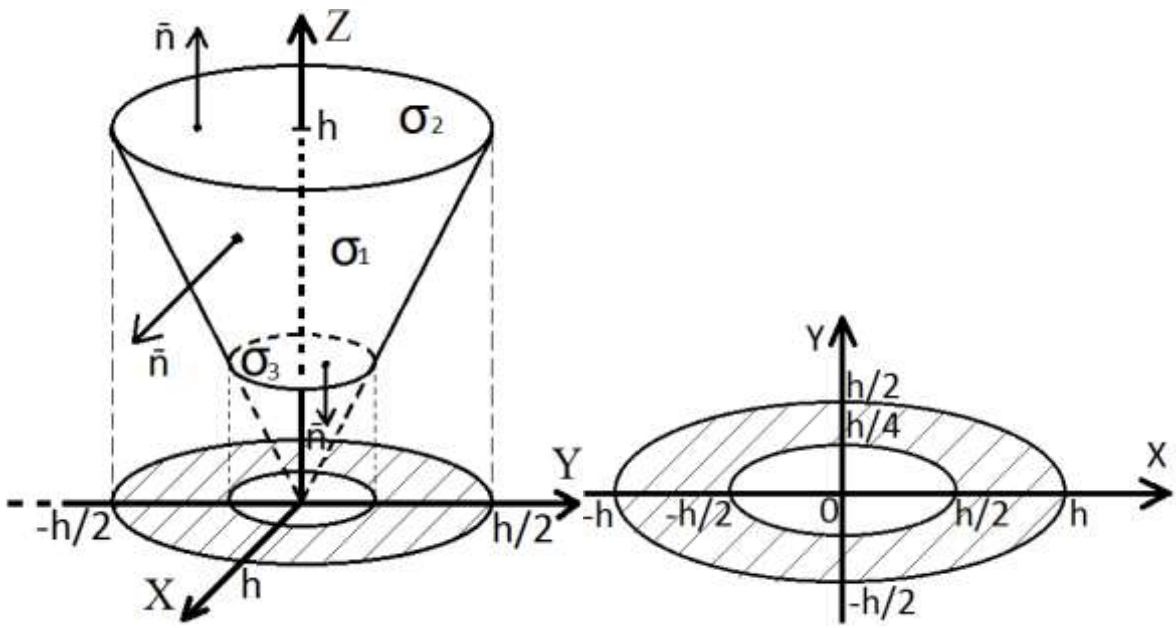

Рис. 8.

Поверхня σ_1 однозначно проектується (Рис. 8) в еліптичне кільце $\frac{h^2}{4} \le x^2 + 4y^2 \le h^2$ (область D_{xy}), а нормаль $\bar{n}$ до поверхні σ_1 утворює тупий кут γ з додатнім напрямком осі OZ $(\cos\gamma < 0)$. Для обчислення заданого інтеграла по поверхні σ_1 скористаємось формулою (15) та ставимо множник (-1) перед подвійним інтегралом по області D_{xy}:

$$I_1 = \iint_{\sigma_1} (x + 2y)dydz + (y - z)dxdz + (x + z)dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left[\frac{-(x+2y)x-(y-\sqrt{x^2+4y^2})9y}{\sqrt{x^2+4y^2}} + x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right]dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{2xy}{\sqrt{x^2+4y^2}} - 4y - x \right) dxdy = \left| \begin{matrix} x = \frac{h}{2}\rho\cos\varphi\,, \\ y = \frac{h}{4}\rho\sin\varphi\,, \end{matrix} \quad I = \frac{h^2}{8}\rho \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 (\frac{h}{4}\rho\sin 2\varphi - h\rho\sin\varphi - \frac{h}{2}\rho\cos\varphi)\ \frac{h^2}{8}\rho d\rho = 0\ ,$$

оскільки $\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} cos\,\varphi\, d\varphi = 0.$

2. Поверхня σ_2 задається умовами: $z = h,\ \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{(\frac{h}{2})^2} \leq 1.$ Ця частина поверхні σ проектується однозначно на площину XOY в область D_{xy}:

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{(\frac{h}{2})^2} \leq 1.$$

На Рис. 8 – це внутрішня частина більшого еліпса. Нормаль $\bar{n}$ до поверхні σ_2 паралельна осі OZ ($\gamma = 0°$ - гострий кут). Скористаємося формулою (15) із знаком “+” перед подвійним інтегралом; при цьому $z'_x = z'_y = 0$. Отже, маємо

$$I_2 = \iint_{\sigma_2} (x + 2y)dydz + (y - z)dxdz + (x + z)dxdy =$$

$$= + \iint_{D_{xy}} [(x + 2y) \cdot 0 + (y - z)0 + x + h]dxdy = \iint_{D_{xy}} (x + h)dxdy =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = h\rho\cos\varphi\,, \\ y = \frac{h}{2}\rho\sin\varphi\,, \end{matrix} \quad \mathrm{J} = \frac{h^2}{2}\rho \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\,h\rho\cos\varphi + h)\ \frac{h^2}{2}\rho d\rho =$$

$$= \frac{h^3}{2}\int_0^{2\pi} \cos\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho + \frac{h^3}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho = 0 + \frac{\pi h^3}{2} = \frac{\pi h^3}{2}.$$

3. Поверхня σ_3 задається умовами: $z = \frac{h}{2},\ \frac{x^2}{(\frac{h}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{h}{4})^2} \leq 1.$ Як і в попередньому випадку, поверхня σ_3 проектується без деформації в область D_{xy} координатної площини XOY: $\frac{x^2}{(\frac{h}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{h}{4})^2} \leq 1.$

На Рис. 8 область D_{xy} представлена внутрішньою частиною меншого еліпса. Нормаль $\bar{n}$ до поверхні σ_3 (нижня поверхня площини $z = \frac{h}{2}$)паралельна осі OZ, але $\angle\gamma = 180°$ -тупий ($\cos\gamma = -1$). Використовуючи формулу (15) із

знаком “-” перед подвійним інтегралом і враховуючи, що $z'_x = z'_y = 0$, будемо мати:

$$I_3 = \iint_{\sigma_3}(x+2y)dydz + (y-z)dxdz + (x+z)dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xy}}[(x+2y)\cdot 0 + (y-z)\cdot 0 + x + \frac{h}{2}]dxdy = -\iint_{D_{xy}}(x+\frac{h}{2})dxdy =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = \frac{h}{2}\rho\cos\varphi\,, \\ y = \frac{h}{4}\rho\sin\varphi\,, \end{matrix} \quad \mathrm{J} = \frac{h^2}{8}\rho \right| = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\frac{h}{2}\ \rho\cos\varphi + \frac{h}{2})\ \frac{h^2}{8}\rho d\rho =$$

$$= 0 - \frac{\pi h^3}{16} = -\frac{\pi h^3}{16}.$$

Отже, $I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + \frac{\pi h^3}{2} - \frac{\pi h^3}{16} = \frac{7\pi h^3}{16}$.◄

Приклад 4. Знайти потік вектора $\vec{V} = c \cdot \bar{j}$ через площину прямокутника $ABCD$ (поверхня σ), перпендикулярного до осі OY ($c = const,\ AB = \Delta z = const,\ BC = \Delta x = const$) (Рис. 9).

►З означення потоку вектора $\bar{V}$ через орієнтовану поверхню σ і представлення (20) маємо:

$$\Pi = \iint_{\sigma} 0\, dydz + c\, dxdz + 0\, dxdy = \iint_{\sigma} c\, dxdz =$$

$$= c \iint_{D_{xz}} dxdz = c\, S_{ABCD} = c\, \Delta x\, \Delta y.◄$$

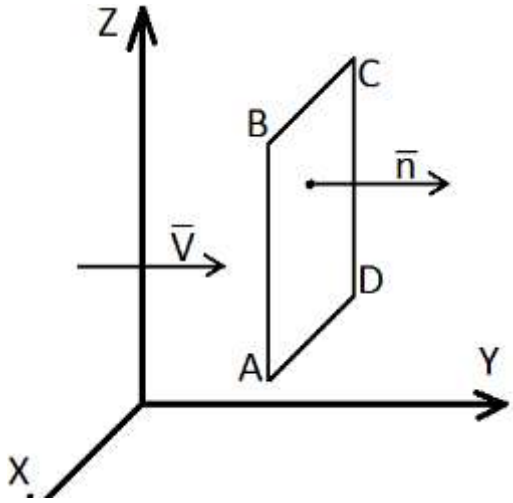

Рис. 9

Приклад 5. Знайти потік вектора $\bar{a} = (2x+z)\bar{\imath} + (2y+xz)\bar{\jmath} + (2z-x)\bar{k}$ через зовнішню поверхню параболоїда $y = x^2 + z^2$ при $0 \le y \le m^2$.

► Поверхнею σ є зовнішня частина параболоїда $y = x^2 + z^2$ від початку координат (точка $O(0;0)$) до площини $y = m^2$ (Рис. 10).

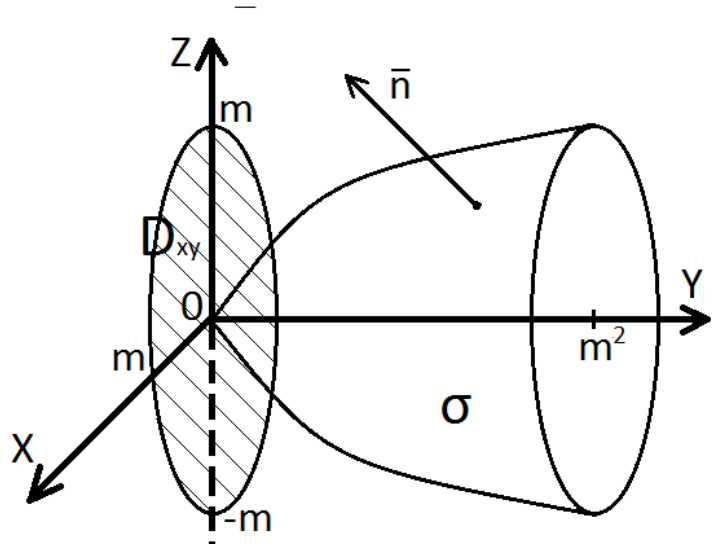

Рис. 10

Поверхня σ однозначно проектується на координатну площину XOZ в круг $x^2 + z^2 \le m^2$ (область D_{xz}).

Нормаль $\bar{n}$ до зовнішньої поверхні параболоїда утворює тупий кут β з віссю OY $(\cos\beta < 0)$.

Використовуючи представлення (20) потоку вектора через орієнтовну поверхню і формулу (18) із знаком "-" перед подвійним інтегралом, одержимо для $y = x^2 + z^2$, $y'_x = 2x$, $y'_z = 2z$:

$$\Pi = \iint_\sigma (2x + z)dydz + (2y + xz)dxdz + (2z - x)dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xz}} [(2x + z)(-2x) + 2(x^2 + z^2) + xz + (2z - x)(-2z)]\, dxdz =$$

$$= \iint_{D_{xz}} (2x^2 + 2z^2 - xz)\, dxdz = \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \end{matrix} \ \mathrm{J} = \rho \right| =$$

$$= \int_0^m \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} (2 - \sin\varphi\cos\varphi) d\varphi = \frac{m^4}{4}(4\pi - 0) = \pi m^4.$$