ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Заняття 1: Скалярне поле

Поверхні рівня скалярного поля

Основною геометричною характеристикою скалярного поля є *поверхня рівня*.

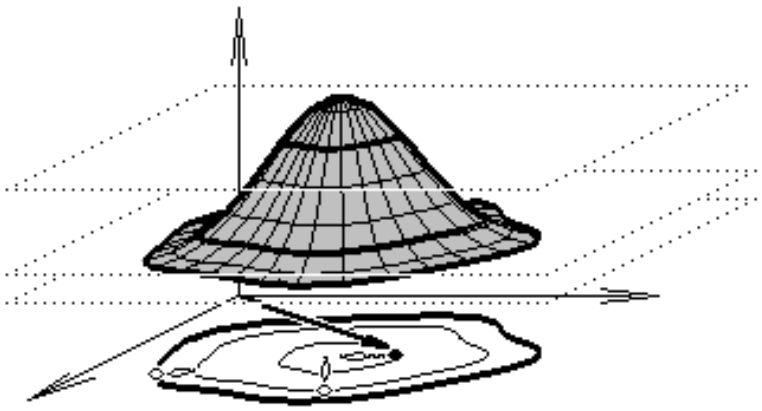
Нехай в області D тривимірного простору задано скалярне поле $U(M)=U(x,y,z)$.

Означення. *Геометричне місце точок області D, в яких функція $U(x,y,z)$ має одне і те ж значення, утворює деяку поверхню, яка називається поверхнею рівня (або еквіпотенційною поверхнею) розглянутого скалярного поля.*

Звідси випливає, що рівняння поверхні рівня має вигляд $U(x,y,z)=C$, де $C \equiv \text{const}$, причому кожному значенню константи C відповідає своя поверхня рівня. Таким чином, через кожну точку (x_0,y_0,z_0) даної області проходить, причому тільки одна, поверхня рівня, що відповідає значенню константи $C_0=U(x_0,y_0,z_0)$. Тобто вся область D заповнена цими поверхнями і, очевидно, поверхні рівня не перетинаються.

У разі плоского поля поняття поверхні рівня замінюється поняттям *лінії рівня*. Прикладами таких ліній можуть служити ізобари, що наносяться на карти (лінії рівних тисків) і ізотерми (лінії рівних температур).

$u(x,y)=c.$



Приклад 1.1. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=x+y^2$.

Розв'язання. Рівняння ліній рівня має вигляд $x+y^2=C$ або $y^2=-x+C$.

Відповідь: лінії рівня – параболи $y^2=-x+C$.

Приклад 1.2. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=xy$.

Розв'язання. Рівняння ліній рівня має вигляд $xy=C$.

Відповідь: лінії рівня – гіперболи $xy=C$ (при $C=0$ – сукупність координатних осей).

Приклад 1.3. Знайти лінії рівня скалярного поля $U(x,y)=x+y$.

Розв'язання. Рівняння ліній рівня має вигляд $x+y=C$.

Відповідь: лінії рівня – прямі $x+y=C$.

Приклад 1.4. Знайти поверхні рівня скалярного поля $U(x,y,z)=z-x^2-y^2$.

Розв'язання. Рівняння поверхонь рівня має вигляд $z-x^2-y^2=C$ або $z=x^2+y^2+C$.

Відповідь: поверхні рівня – параболоїди обертання $z=x^2+y^2+C$.

Приклад 1.5. Знайти поверхні рівня скалярного поля $U(x,y,x)=x^2+y^2-z^2$.

Розв'язання. Рівняння поверхонь рівня має вигляд $x^2+y^2-z^2=C$.

Відповідь: поверхні рівня мають рівняння $x^2+y^2-z^2=C$. При $C>0$ – це однопорожнинні гіперболоїди, при $C<0$ – двопорожнинні гіперболоїди, при $C=0$ – конус $x^2+y^2-z^2=0$.

Приклад 1.6. Знайти поверхні рівня скалярного поля

$$U(x,y,x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Розв'язання. Рівняння поверхонь рівня має вигляд

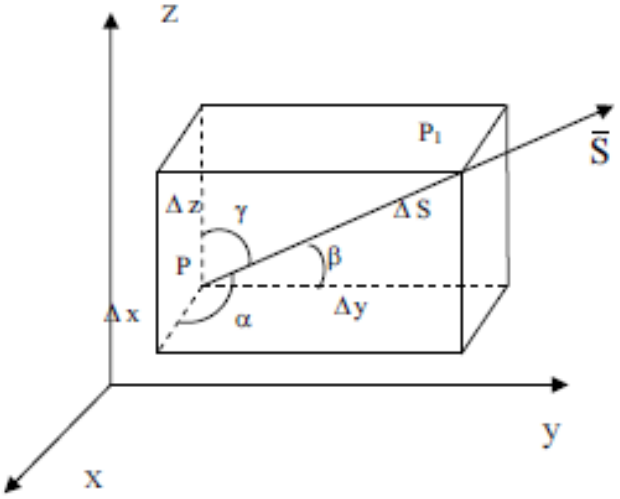
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=C,\ \ C>0,$$

або $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{C^2}$.

Відповідь: поверхні рівня – сфери $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{C^2}$.

2.2 Похідна за напрямком і градієнт скалярного поля

Нехай в області $D\subset\mathbb{R}^3$ задано скалярне поле $U=U(M)$. Візьмемо у просторі точку $P(x;y;z)$. Проведемо з точки P вектор $\vec{s}$, якого напрямні косинуси є відомими: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (Рис)



Формула для обчислення похідної за напрямом

$$\boxed{\left.\frac{\partial U(x;y;z)}{\partial\vec{s}}\right|_P=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta_{\vec{s}}U}{\Delta s}=\left.\frac{\partial U(P)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U(P)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U(P)}{\partial z}\cos\gamma\right|_P}$$

У випадку плоского поля $U=U(x;y)$ маємо:

$\cos\beta = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos\gamma = 0$, то

$$\boxed{\left.\frac{\partial U(x;y;z)}{\partial \vec{s}}\right|_P = \left.\frac{\partial U(P)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(P)}{\partial y}\sin\alpha\right|_P}$$

де α - кут, утворений напрямком $\vec{s}$ з віссю Ох.

1 Матеріал для <u>Задання 1</u> з ІДЗ за темою <u>Теорія Поля</u>

Приклад 1.7. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)=2xy+xz+y^2$ в точці $M(1,-1,3)$ у напрямку до точки $N(2,1,-2)$.

Розв'язання. Напрямок $\vec{s}$, по якому шукаємо похідну, це напрямок вектора $\overline{MN}=(1,2,-5)$. Обчислимо напрямні косинуси вектора $\vec{s}$.

$$|\vec{s}| = |\overline{MN}| = \sqrt{30},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{|\vec{s}|} = \frac{1}{\sqrt{30}},\quad \cos\beta = \frac{2}{|\vec{s}|} = \frac{2}{\sqrt{30}},\quad \cos\gamma = \frac{-5}{|\vec{s}|} = -\frac{5}{\sqrt{30}}.$$

Далі знайдемо частинні похідні функції $U(x,y,z)$ в точці $M(1,-1,3)$:

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial x}\right|_{(1,-1,3)} = (2y+z)\big|_{(1,-1,3)} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial y}\right|_{(1,-1,3)} = (2x+2y)\big|_{(1,-1,3)} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial z}\right|_{(1,-1,3)} = x\big|_{(1,-1,3)} = 1.$$

Остаточно отримуємо

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(1,-1,3)} = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{30}} + 0\cdot\frac{2}{\sqrt{30}} - 1\cdot\frac{5}{\sqrt{30}} = -\frac{4}{\sqrt{30}}.$$

Відповідь: $\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{M} = -\frac{4}{\sqrt{30}}$.

Приклад 1.8. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z) = x^2y + 2y^2z - xyz$ в точці $M(2,-1,1)$ у напрямку, що утворює з осями координат кути $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

Розв'язання. скористаємося формулою

$$\frac{\partial U(M)}{\partial s} = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U(M)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Знайдемо частинні похідні $U(x,y,z)$ функції в точці $M(2,-1,1)$:

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)} = \left.(2xy - yz)\right|_{(2,-1,1)} = -3,$$

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial y}\right|_{(2,-1,1)} = \left.\left(x^2 + 4yz - xz\right)\right|_{(2,-1,1)} = -2,$$

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial z}\right|_{(2,-1,1)} = \left.\left(2y^2 - xy\right)\right|_{(2,-1,1)} = 4.$$

Далі

$$\cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Звідси отримуємо

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(2,-1,1)} = -3\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{2}.$$

Відповідь: $\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(2,-1,1)} = \frac{1}{2} - \sqrt{2}.$

Подібно до того як частинні похідні $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна $\frac{\partial U(x;y;z)}{\partial \vec{s}}$ знайдена для заданої точки простору P і для заданого напрямку $\vec{s}$, визначає швидкість зміни скалярного поля $U(M)$ в цій точці P по цьому напрямку. При цьому, абсолютна величина похідної $\left|\frac{\partial U(x;y;z)}{\partial \vec{s}}\right|$ відповідає значенню швидкості, а знак похідної визначає характер зміни функції $U(x;y;z)$ в напрямі(зростання чи спадання), тобто, обчислена в одній і тій же точці, але за різними напрямками, вона має, взагалі кажучи, різні значення.

Поряд із поняттям похідної скалярного поля за напрямком існує інше важливе поняття - *градієнт* скалярного поля.

Нехай задано скалярне поле $U = U(x;y;z)$, причому функція має частинні похідні $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$

Означення. Вектор $grad\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ називається градієнтом скалярного поля u.

або

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} \quad |grad\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Градієнт скалярного поля визначають, використовуючи *оператор Гамільтона*, що має вигляд

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k.$$

Тоді

$$grad\, u = \nabla u\ .$$

При розв'язанні задач на *геометричні та механічні застосування* градієнта використовують наведені властивості градієнта та наслідки з них:

1) для будь-якої *поверхні* $F(x,y,z) = 0$ *вектор нормалі* в заданій точці M(x,y,z) має вигляд: $\vec{n}^0 = \pm\frac{\vec{\nabla} F}{\left|\vec{\nabla} F\right|} = \pm\frac{gradF(x,y,z)}{\left|gradF(x,y,z)\right|}$;

2) *найбільша крутість підйому поверхні* $z = \varphi(x,y)$ у заданій точці - це тангенс кута нахилу градієнта поля $\varphi(x,y)$ до площини XOY у заданій точці, тобто: $tg\alpha = \left|gradz\right|$.

2 Матеріал для <u>Задання 2</u> з ІДЗ за темою <u>Теорія Поля</u>

Приклад. Знайти орт градієнта скалярного поля $u = ln(1 + x^2 + y^4 + z^7)$ в точці $M_0(2;\ 1; -1)$.

► Знайдемо потрібні частинні похідні заданого поля та їх значення в точці $M_0(2;\ 1; -1)$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^4+z^7}$, $u'_x(M_0) = \frac{2\cdot 2}{1+4+1-1} = \frac{4}{5}$;

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4y^3}{1+x^2+y^4+z^7}$, $u'_y(M_0) = \frac{4}{5}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{7z^6}{1+x^2+y^4+z^7}$, $u'_z(M_0) = \frac{7}{5}$.

Виходячи з формули градієнта, будемо мати

$\bar{g} \equiv grad\ u(M_0) = \frac{4}{5}\bar{\imath} + \frac{4}{5}\bar{\jmath} + \frac{7}{5}\bar{k}.$

Знайдемо орт цього вектора :

$\overline{g_0} = \frac{\bar{g}}{|\bar{g}|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16+16+49}{25}}} = \frac{5}{9}\cdot\left(\frac{4}{5};\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right) \equiv \frac{4}{9}\bar{\imath} + \frac{4}{9}\bar{\jmath} + \frac{7}{9}\bar{k}$.

Приклад 1.16. Знайти поверхню рівня скалярного поля $U(x,y,z)=2x^2+3y^2-z$, що проходить через точку $M(1,1,-1)$, а також одиничний вектор напрямку найбільш швидкого зростання заданого поля в точці $M(1,1,-1)$.

Розв'язання. Рівняння поверхонь рівня заданого скалярного поля має вигляд $2x^2+3y^2-z=C$. Точці $M(1,1,-1)$ відповідає значення константи $C=2+3+1=6$.

Тобто через точку $M(1,1,-1)$ проходить параболоїд $z=2x^2+3y^2-6$. Напрямок найбільш швидкого зростання поля в точці M показує вектор $\operatorname{grad}U(M)$. Обчислимо

$$\operatorname{grad}U(M)=4x\vec{i}+6y\vec{j}-\vec{k},$$

тоді

$$\operatorname{grad}U(1,1,-1)=4\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k},\quad \left|\operatorname{grad}U(1,1,-1)\right|=\sqrt{53}.$$

Одиничний вектор дорівнює

$$\vec{s}^{\,0}=\left(\frac{4}{\sqrt{53}},\frac{6}{\sqrt{53}},-\frac{1}{\sqrt{53}}\right).$$

Відповідь: поверхня рівня, що проходить через точку $M(1,1,-1)$, – це параболоїд $z=2x^2+3y^2-6$. Одиничний вектор напрямку найбільш швидкого зростання заданого поля в точці $M(1,1,-1)$ дорівнює $\vec{s}^{\,0}=\left(\frac{4}{\sqrt{53}},\frac{6}{\sqrt{53}},-\frac{1}{\sqrt{53}}\right)$.

Безпосередньо з визначення випливає, що градієнт в даній точці скалярного поля $U(x,y,z)$ є спрямованим по нормалі до поверхні

рівня $U(x, y, z) = C$ розглянутого поля, що проходить через цю точку.

Нагадаємо, що якщо поверхня задана рівнянням $U(x, y, z) = C$ то вектор нормалі до неї в точці P має координати:

$$\vec{n}(P) = \left(\frac{\partial U(P)}{\partial x}, \frac{\partial U(P)}{\partial y}, \frac{\partial U(P)}{\partial z}\right) = \frac{\partial U(P)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(P)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U(P)}{\partial z}\vec{k}$$

що збігається з вектором

$$gradU(P) = \frac{\partial U(P)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(P)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U(P)}{\partial z}\vec{k}$$

Якщо скалярне поле плоске, то градієнт в даній точці спрямований, відповідно, по нормалі до лінії рівня поля, що проходить через цю точку.

Приклад 3. Записати вектор нормалі до поверхні $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ в точці $A(-2;-3;1)$.

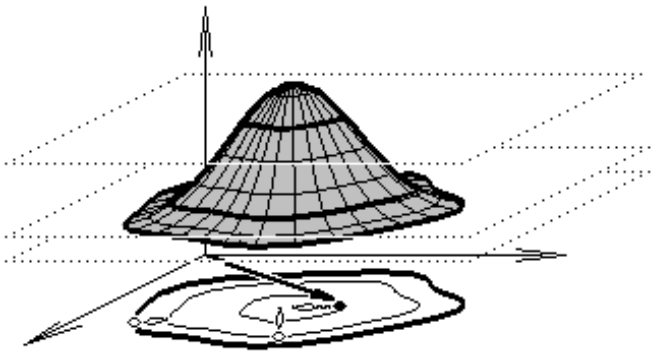
Розв'язання. Запишемо задане рівняння поверхні у вигляді $F(x,y,z) = 0$. Нормаль визначається за формулою $\vec{n}^0\Big|_A = \pm\frac{gradF(x,y,z)}{|gradF(x,y,z)|}\Big|_A$.

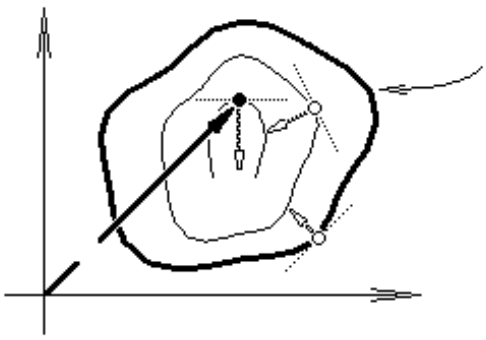
У нашому випадку $F(x,y,z) = 2z - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$.

Тоді $\vec{\nabla}F = -\frac{x}{2}\vec{i} - \frac{2y}{9}\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{\nabla}F(\mathrm{A}) = \vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + 2\vec{k}$, $|\vec{\nabla}F| = \frac{7}{3}$,

$\vec{n}^0\Big|_A = \frac{1}{7}(3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k})$.

Градієнт - вектор, що показує напрямок найшвидшого зростання деякої величини, значення якої змінюється від однієї точки простору в іншу (скалярного поля). Наприклад, якщо взяти в якості величини висоту поверхні Землі над рівнем моря, то її градієнт в кожній точці поверхні буде показувати "напрям самого крутого підйому". Величина (модуль) вектора градієнта дорівнює швидкості росту величини в цьому напрямку.





Приклад 4. В якому напрямку повинна рухатися точка $M(x,y,z)$, щоб при переході через точку $A(-1,2,-2)$ поле $\varphi = \dfrac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$ зростало з найбільшою швидкістю? Яка швидкість у цьому напрямку?

Розв'язання. Напрямок найбільшого зростання поля – напрямок градієнта, тобто $\ell^0_{\max} = \dfrac{\vec{\nabla}\varphi}{\left|\vec{\nabla}\varphi\right|}$; швидкість у цьому напрямку $V_{\max} = \left|\vec{\nabla}\varphi\right|$.

Тоді

$$\vec{\nabla}\varphi = -\frac{10}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2}\cdot\left(\vec{i}\cdot 2x + \vec{j}\cdot 2y + \vec{k}\cdot 2z\right);$$

$$\vec{\nabla}\varphi\big|_A = \frac{1}{5}\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right); \qquad \left|\vec{\nabla}\varphi\right|\Big|_A = \frac{\sqrt{1+4+4}}{5} = \frac{3}{5};$$

$$V_{\max} = \frac{3}{5}; \quad \vec{\ell}^0_{\max} = \frac{1}{3}\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right).$$

<u>Приклад</u>. Визначити напрямок найбільшого спадання та швидкість спадання функції $u = xyz$ в точці $P_0(1,2,2)$.

<u>Розв'язання:</u> Напрямок найбільшого спадання функції – $(-\mathbf{grad}\,u)$. Таким чином, $-\mathbf{grad}\,u = -\{yz; xz; xy\}$, а в точці P_0: $-\mathbf{grad}\,u\big|_{P_0} = \{-4;-2;-2\}$. Визначимо швидкість спадання:

$$\left|-\mathbf{grad}\,u\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Приклад 1.15. Знайти швидкість і напрямок найбільш швидкого зростання скалярного поля $U(x,y,z) = xy^3z^4$ в точці $M(1,1,1)$.

Розв'язання. Напрямок найбільш швидкого зростання скалярного поля $U(M)$ вказує вектор $\mathrm{grad}U(M)$.

Знайдемо $\mathrm{grad}U(1,1,1)$:

$$\mathrm{grad}U(M) = y^3z^4\vec{i} + 3xy^2z^4\vec{j} + 4xy^3z^3\vec{k},$$

Тоді

$$\mathrm{grad}U(1,1,1) = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Одиничний вектор напрямку найбільш швидкого зростання дорівнює

$$\vec{s}^0 = \frac{1}{\left|\operatorname{grad}U(1,1,1)\right|}\operatorname{grad}U(1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{26}}\left(\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{26}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{26}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{26}}\vec{k}.$$

Тоді маємо

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(1,1,1)} = \left|\operatorname{grad}U(1,1,1)\right| = \sqrt{26}.$$

Відповідь: напрямок найбільш швидкого зростання заданого скалярного поля в точці $(1,1,1)$ задається вектором

$$\vec{s}^0 = \frac{1}{\sqrt{26}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{26}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{26}}\vec{k},$$

а швидкість найбільш швидкого зростання дорівнює $\sqrt{26}$.

Приклад 1.10. Знайти кут між градієнтами скалярного поля $U(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $M_1(2,3,-1)$ і $M_2(1,-1,2)$.

Розв'язання. За формулою

$$\operatorname{grad}U(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U(M)}{\partial z}\vec{k}$$

обчислимо градієнти заданого скалярного поля в точках M_1 і M_2:

$$\operatorname{grad}U(M) = 2x\vec{i} + 4y\vec{j} - 2z\vec{k},$$

$$\operatorname{grad}U(M_1) = \operatorname{grad}U(2,3,-1) = 4\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$\operatorname{grad}U(M_2) = \operatorname{grad}U(1,-1,2) = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Позначимо кут між градієнтами через φ, тоді

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{grad}U(M_1)\cdot\operatorname{grad}U(M_2)}{\left|\operatorname{grad}U(M_1)\right|\left|\operatorname{grad}U(M_2)\right|} = \frac{8-48-8}{\sqrt{164}\sqrt{36}} = -\frac{4}{\sqrt{41}}.$$

Відповідь: $\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right)$.

Приклад 5. Знайти найбільшу крутість підіймання поверхні $z = x^y$ в точці $M(2;2;4)$.

Розв'язання. Найбільша крутість підіймання визначається за формулою $tg\alpha_{\max} = \left|\vec{\nabla}z\right|$,

де $\vec{\nabla}z = \vec{i}\cdot y\cdot x^{y-1} + \vec{j}\cdot x^y\cdot\ln x$; $\vec{\nabla}z\big|_M = 4\vec{i} + 4\ln 2\cdot\vec{j}$.

Тоді $tg\alpha_{\max} = \left|\vec{\nabla}z\right|\Big|_M = 4\sqrt{1+\ln^2 2} \approx 4{,}87$, звідки $\alpha_{\max} \approx 78^\circ 24'$.

Існує *зв'язок* між градієнтом та похідною за напрямком:

$$\left.\frac{\partial U(x;y;z)}{\partial\vec{s}}\right|_P = \left.\frac{\partial U(P)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(P)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U(P)}{\partial z}\cos\gamma\right|_P$$

$$\left.\frac{\partial U(x;y;z)}{\partial\vec{s}}\right|_P = (\operatorname{grad}U, \vec{s}^o) = (\nabla U, \vec{s}^o)$$

Орт-вектор, $\vec{s}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Приклад 1.11. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y) = \sqrt{12+x^2+y^2}$ в точці $M(2,3)$ у напрямку до точки $N(5,6)$.

Розв'язання. Для обчислення похідної скористаємося формулою

$$\frac{\partial U(M)}{\partial s} = \operatorname{grad}U(M)\cdot\vec{s}^0,$$

де $\vec{s}^0$ – орт вектора $\vec{s}$, в напрямі якого шукаємо похідну. $\vec{s} = \overrightarrow{MN} = (3,3)$. Обчислимо $\vec{s}^0$:

$$\vec{s}^0 = \overrightarrow{MN}^0 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3,3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Далі,

$$\operatorname{grad}U(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{12+x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{12+x^2+y^2}}\vec{j},$$

$$\operatorname{grad}U(2,3) = \frac{2}{\sqrt{12+2^2+3^2}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{12+2^2+3^2}}\vec{j} = \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}.$$

Звідси отримуємо

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(2,3)} = \left(\frac{2}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = \frac{2}{5\sqrt{2}} + \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Відповідь: $\left.\frac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(2,3)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Приклад 1.13. Знайти похідну скалярного поля

$$U(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} + z^2$$

в точці $M(1,-2,3)$ у напрямку радіуса-вектора цієї точки.

Розв'язання. Радіус-вектор точки $M(1,-2,3)$ – це вектор $\vec{r} = (1,-2,3)$, а його орт дорівнює

$$\vec{r}^0 = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3) = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k} = \vec{s}^0.$$

Обчислимо градієнт розглянутого поля в точці $M(1,-2,3)$:

$$\operatorname{grad}U(M)=\frac{x}{2}\vec{i}+\frac{y}{3}\vec{j}+2z\vec{k},\quad \operatorname{grad}U(1,-2,3)=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+6\vec{k}.$$

Звідси отримуємо $\left.\dfrac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(1,-2,3)}=$

$$=\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+6\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}\right)=\frac{119}{6\sqrt{14}}.$$

Відповідь: $\left.\dfrac{\partial U(M)}{\partial s}\right|_{(1,-2,3)}=\dfrac{119}{6\sqrt{14}}$.

Додатковий матеріал:

Приклад. Знайдіть дотичну площину і нормаль до поверхні $x^2+y^2+z^2=4$ у точці $(1,1,\sqrt{2})$.

(а) Якщо фукція задана явно $z=f(x,y)$, то рівняння дотичної площини і нормалі у точці (x_0,y_0,z_0) задани рівняннями:

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

та

$$\frac{(x-x_0)}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{(y-y_0)}{f_y{}'(x_0,y_0)}=\frac{(z-z_0)}{-1}$$

відповідно.

Так як точка $(1,1,\sqrt{2})$. знаходиться у верхній півкулі, тому ми можемо використовувати запис щодо поверхні $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Тоді

$$f'_x(x,y)=-x(4-x^2-y^2)^{-1/2} \text{ та}$$
$$f'_y(x,y)=-y(4-x^2-y^2)^{-1/2},$$

Звідки

$$f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = -1/\sqrt{2}$$

А рівняння дотичної площини

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1) + \sqrt{2}.$$

Рівняння нормалі

$$\frac{(x-1)}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{(y-1)}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z-\sqrt{2}}{-1}$$

де $\vec{n} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right\}$.

(б) Алтернативно, розв'язок можно виконати за допомогою неявно зададаного представлення поверхні:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

Тоді,

$$f'_x(x,y,z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, f'_y(x,y,z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2-4) = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2-4) = 2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2-4) = 2z$$

Звідки,

$$f'_x(x,y,z) = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, f'_x\left(1,1,\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

та

$$f'_y(x,y,z) = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}, f'_y\left(1,1,\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Рівняння дотичної площини,

$$z - \sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + -\frac{1}{\sqrt{2}}(y-1)$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1) + \sqrt{2}.$$

Рівняння нормалі

$$\frac{(x-1)}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{(y-1)}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z-\sqrt{2}}{-1}$$

де $\vec{n} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right\}$.

(в) Також, для отримання рівняння нормалі можна використати неявно зададане представлення поверхні $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

$$\vec{n} = \left\{F'_x, F'_y, F'_z\right\} \equiv \operatorname{grad} F$$

Тоді,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2 - 4) = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2 - 4) = 2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2 - 4) = 2z$$

Звідки,

$$F'_x\left(1,1,\sqrt{2}\right) = 2$$

$$F'_y\left(1,1,\sqrt{2}\right) = 2$$

$$F'_z\left(1,1,\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Таким чином,

$$\vec{n} \equiv \operatorname{grad} F = \left\{2,2,2\sqrt{2}\right\}$$

або

$$\vec{n} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right\}$$