1. *Спеціальні типи векторних полей*

Приклад 1. Чи є дане векторне поле

$$\vec{\mathbf{a}}(M)=x\left(z^2-y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}+y\left(x^2-z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+z\left(y^2-x^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$$

соленоїдальним?

Розв'язання: Скористаємося критерієм соленоїдальності.

Обчислимо $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=z^2-y^2+x^2-z^2+y^2-x^2\equiv 0.$$

Так, насправді, поле є соленоїдальним.

Приклад 2. Чи є дане векторне поле

$$\vec{\mathbf{a}}(M)=3z\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{\mathbf{i}}-2y\left(x^2+z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}+4x\left(y^2+z^2\right)\cdot\vec{\mathbf{k}}$$

соленоїдальним?

Розв'язання: Скористаємося критерієм соленоїдальності.

Обчислимо $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)=6xz-2\left(z^2+x^2\right)+8xz\neq 0.$$

Поле не є соленоїдальним.

Приклад 3. Чи є дане векторне поле

$$\vec{\mathbf{a}}(M)=2xy\cdot\vec{\mathbf{i}}+\left(x^2-2yz\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}-y^2\cdot\vec{\mathbf{k}}$$

потенціальним?

Розв'язання: Скористаємося критерієм потенціальності.

Обчислимо $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy & x^2-2yz & -y^2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{\mathbf{i}}(-2y+2y)-\vec{\mathbf{j}}(0-0)+\vec{\mathbf{k}}(2x-2x)\equiv 0.$$

Так, дане векторне поле є потенціальним.

<u>Приклад 4.</u> Чи є дане векторне поле $\vec{\mathbf{a}}(M)=yz\cdot\vec{\mathbf{i}}+zx\cdot\vec{\mathbf{j}}+yx\cdot\vec{\mathbf{k}}$ гармонійним?

<u>Розв'язання:</u> Скористаємося критерієм гармонійності векторного поля. Обчислимо $\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)$ і $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{a}}(M)=0+0+0\equiv 0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{a}}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ zy & xz & xy\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{\mathbf{i}}(x-x)-\vec{\mathbf{j}}(y-y)+\vec{\mathbf{k}}(z-z)\equiv 0.$$

Дане векторне поле є гармонійним.

5. *Потенціал скалярного поля*

Умова потенціального скалярного поля:

$$\bar{a}=grad\ u(x,y,z)$$

Критерії потенціальності векторного поля:

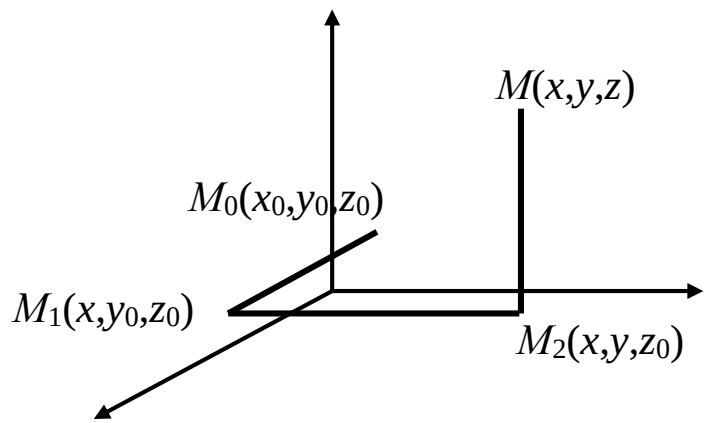
1) $du(x,y,z)=a_x(x,y,z)dx+a_y(x,y,z)dy+a_z(x,y,z)dz$
2) $rot\ \bar{a}=0$

3) Ц $= \oint_L (\vec{a}(M) \cdot \vec{\tau}^0(M))dl = \oint_L \vec{a}(M) \cdot d\vec{l} = 0$

4) П $= \iint_\sigma (rot\bar{a} \cdot \overline{n_0})d\sigma = \iint_\sigma rot\bar{a} \cdot d\vec{\sigma} = 0$

Обчислення потенціалу скалярного поля:

$$u(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(\xi,\eta,\mu)d\xi + Q(\xi,\eta,\mu)d\eta + R(\xi,\eta,\mu)d\mu$$



Нехай шлях M_0M складається з відрізків $M_0M_1 \parallel OX$, $M_1M_2 \parallel OY$ і $M_2M \parallel OZ$. Тоді $M_1(x,y_0,z_0), M_2(x,y,z_0)$ і обчислення криволінійного інтеграла зведеться до обчислення наступних визначених інтегралів:

$$= \int_{x_0}^{x} P(\xi,y_0,z_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x,\eta,z_0)d\eta + \int_{z_0}^{z} R(x,y,\mu)d\mu \ .$$

Якщо початок системи координат, точка O(0,0,0), належить області G і не є особливою, то її зручно взяти за $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Приклад 3. Чи є дане векторне поле

$\vec{\mathbf{a}}(M) = 2xy \cdot \vec{\mathbf{i}} + \left(x^2 - 2yz\right) \cdot \vec{\mathbf{j}} - y^2 \cdot \vec{\mathbf{k}}$

потенціальним?

Розв'язання: Скористаємося критерієм потенціальності.

Обчислимо $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$:

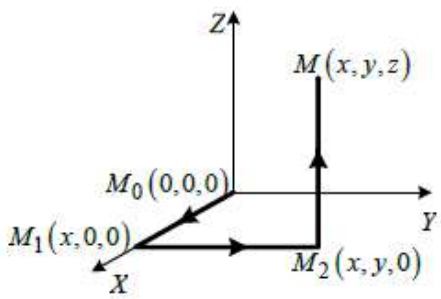
$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy & x^2-2yz & -y^2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{\mathbf{i}}(-2y+2y)-\vec{\mathbf{j}}(0-0)+\vec{\mathbf{k}}(2x-2x)\equiv 0.$$

Так, дане векторне поле є потенціальним.

Обчислити потенціал

Розв'язання: Координати векторного поля $P(x,y,z)=2yx$, $Q(x,y,z)=x^2-2yz$, $R(x,y,z)=-y^2$.



Розглянемо ламану $M_0M_1M_2M$, де $M_0(\,0,0,0)$. Потенціал векторного потенціального поля:

$$u(x,y,z)=C+\int\limits_{M_0M_1M_2M}2yx\cdot dx+\left(x^2-2yz\right)dy-y^2dz\,.$$

Розглянемо окремі ланки ламаної:

$$M_0M_1:0\le x\le x,y=0,z=0;$$

$$M_1M_2:x=\text{const},0\le y\le y,z=0;$$

$$M_2M:x=\text{const},y=\text{const},0\le z\le z\,.$$

Продовжимо обчислення потенціалу

$$u(x,y,z)=C+\int_0^x 0dx+\int_0^y x^2dy+\int_0^z\left(-y^2\right)dz=C+x^2y-y^2z\,.$$

Можна перевірити результат за допомогою означення $\vec{\mathbf{a}}(M)=\overline{\mathbf{grad}\,u(M)}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2yx=P(x,y,z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-2yz=Q(x,y,z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-y^2=R(x,y,z).$$

<u>Відповідь:</u> $u(x,y,z)=C+x^2y-y^2z$.