Заняття 6: Ряди Фур'є

Означення. *Тригонометричним рядом* називається функціональний ряд вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \qquad (1)$$

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

де дійсні числа $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, 3, \ldots$, називаються *коефіцієнтами ряда*.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad (3)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (4)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (5)$$

Теорема Діріхле (*достатня умова розвинення функції в ряд Фур'є*). Нехай $f(x) -$ 2π-періодична функція та на відрізку [-π; π] задовольняє умови:

а) $f(x) -$ *кусково-неперервна* функція(тобто неперервна або має на відрізку [-π; π] скінченне число точок розриву першого роду);

б) $f(x) -$ кусково-монотонна на відрізку [-π; π] (тобто монотонна на всьому відрізку або відрізок [-π; π] можна розбити на скінченне число інтервалів так, що на кожному $f(x) -$ монотонна).

Тоді функції $f(x)$ на відрізку [-π; π] відповідає ряду Фур'є, коефіцієнти якого обчислюються за формулами (3)-(5), при цьому

1) в точках неперервності $f(x)$ сума ряда $S(x)$ збігається з функцією $f(x)$;
2) в кожній точці розриву $x = x_0$ функції сума ряда дорівнює середньому арифметичному правої та лівої границь:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

3) в точках $x = -\pi$ та $x = \pi$ (тобто на кінцях відрізка) сума ряда обчислюється так:

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$$

Приклад 1. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом 2π, визначену виразом

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 2, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

Розв'язання. Подамо дану функцію графічно (рис. 1).

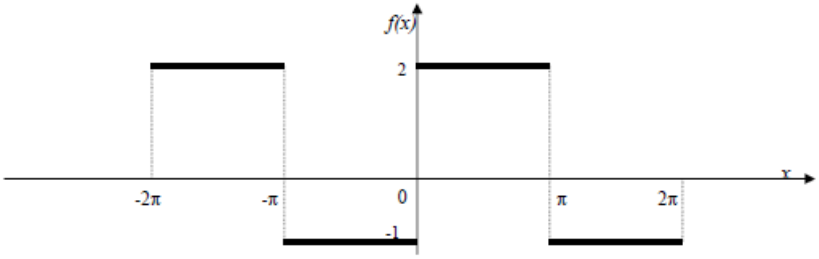


Рисунок 1

Дана функція є кусково-монотонною й обмеженою. Отже, за теоремою Діріхле вона припускає подання в вигляді ряду Фур'є.

Визначимо коефіцієнти Ейлера-Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}2dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[-x\Big|_{-\pi}^{0}+2x\Big|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-(0+\pi)+2(\pi-0)\right]=\frac{1}{\pi}(-\pi+2\pi)=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-1\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}2\cos nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right]=0,$$

($\sin 0=0$, $\sin n\pi=0$).

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-1\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}2\sin nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left[\cos 0-\cos(-n\pi)-2\cos n\pi+2\cos 0\right]=\frac{1}{\pi n}\left[3-3(-1)^n\right]=\frac{3}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right]$$

($\cos 0=1$, $\cos n\pi=(-1)^n$).

Таким чином, ряд Фур'є можна записати у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right]\sin nx.$$

При парному n вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, а при непарному n дорівнює 2. Тому ряд Фур'є можна записати так:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x.$$

У точках розриву функції $f(x)$, якими є точки 0; ±π; ±2π,... сума ряду дорівнює середньому арифметичному її лівосторонньої і правосторонньої границь в даних точках. Наприклад, у точці $x = 0$ матимемо

$$\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ з періодом 2π, визначену на відрізку $[-\pi;\ \pi]$

Розв'язання. Дана функція є монотонною й обмеженою на інтервалі $-\pi<x<\pi$ (рис. 2), задовольняє умовам теореми Діріхле, тому її можна розвинути в ряд Фур'є.

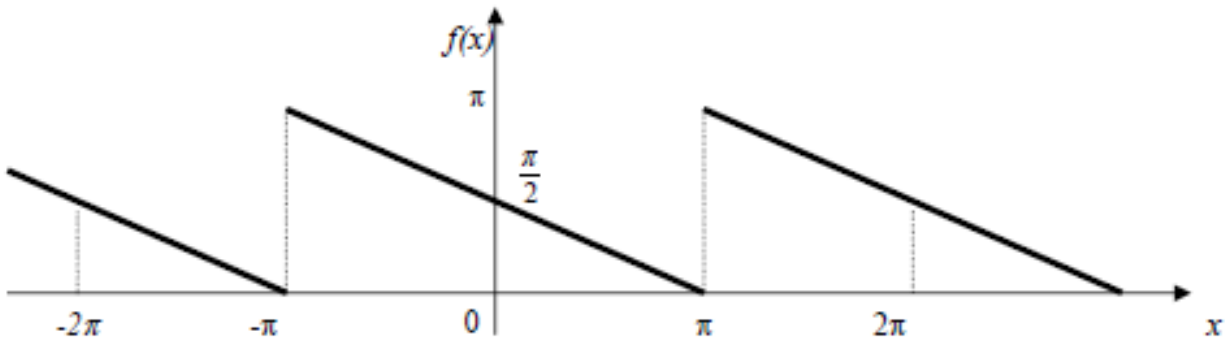


Рисунок 2

Визначимо коефіцієнти Ейлера - Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left[\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)-\left(-\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi^2=\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx dx=\left|\begin{matrix} u=\pi-x, & du=-dx \\ dv=\cos nx dx, & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\ (\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}(-dx)\ \right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=\frac{1}{2\pi n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{2\pi n^2}(\cos n\pi-\cos n\pi)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx dx=\left|\begin{matrix} u=\pi-x, & du=-dx \\ dv=\sin nx dx, & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[(\pi-x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)(-dx)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[(\pi-\pi)\left(-\frac{\cos n\pi}{n}\right)-(\pi+\pi)\left(-\frac{\cos n\pi}{n}\right)-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{n}(-1)^n-\frac{1}{n}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right]=(-1)^n\frac{1}{n}.$$

Таким чином, ряд Фур'є для даної функції має вигляд

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin nx.$$

Приклад 3. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)=\frac{x}{3}$ з періодом 2π, визначену на відрізку $[-\pi;\ \pi]$

Розв'язання. Подамо функцію графічно (рис. 3).

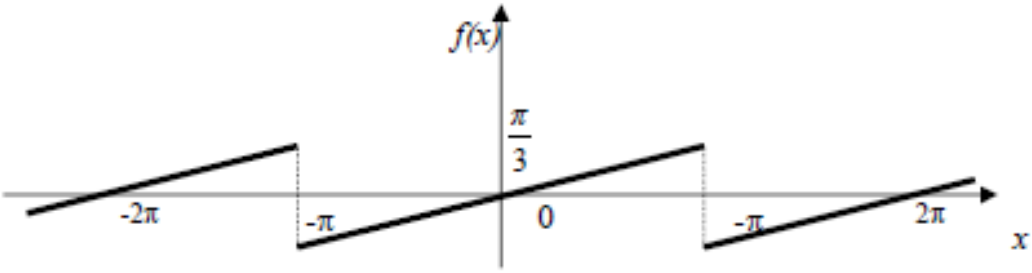


Рисунок 3

Дана функція є монотонною й обмеженою на інтервалі $-\pi < x < \pi$. Крім того, функція $f(x)=\frac{x}{3}$ є непарною на даному інтервалі. Тому ряд Фур'є для даної функції міститиме тільки синуси, а коефіцієнти при косинусах дорівнюватимуть нулю.

Визначимо коефіцієнти b_n:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{3}\sin nx dx=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=\sin nx dx, & v=-\frac{\cos nx}{n}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{3\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right]=\frac{2}{3\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{3\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right]=\frac{2}{3n}(-1)^{n+1}.$$

Таким чином, ряд Фур'є для даної функції має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Приклад 4. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = 1 + |x|$ з періодом 2π, визначену на відрізку $[-\pi;\ \pi]$

Розв'язання. Подамо функцію графічно (рис. 4).

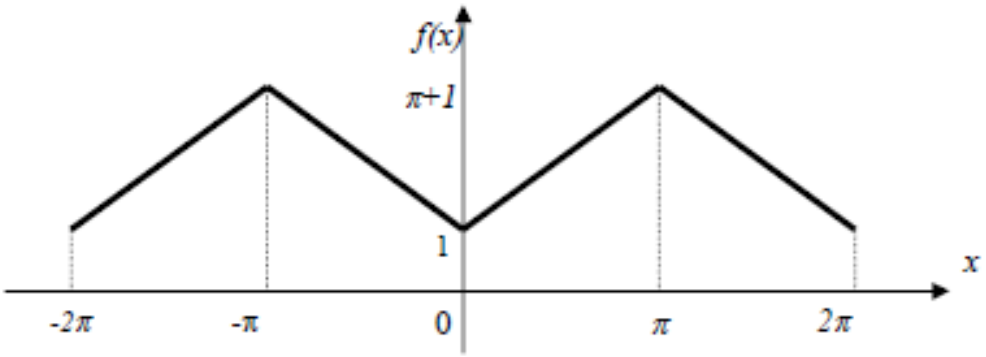


Рисунок 4

Дана функція задовольняє теоремі Діріхле, тому її можна розвинути в ряд Фур'є. На відрізку $[-\pi;\pi]$ функція $f(x) = 1 + |x|$ є парною, тому ряд Фур'є для цієї функції міститиме тільки косинуси, а коефіцієнти при синусах дорівнюватимуть нулю.

Знаходимо коефіцієнти a_0 і a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)dx = \frac{2}{\pi}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\pi + \frac{\pi^2}{2}\right) = 2 + \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\cos nx dx = \begin{vmatrix} u = 1 + x, & du = dx \\ dv = \cos nx dx, & v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(1+x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right] = \frac{2}{\pi n}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

При парних n вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, а при непарних n дорівнює (-2).

Тому $a_n = -\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}$ і ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{2+\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

Ряд Фур'є для $2l$ - періодичної функції на відрізку [-l,l]

Функція $f\ (x)$ може бути задана на довільному відрізку $[-l, l]$ і періодична з

періодом $2l$. Якщо функція задовольняє умовам теореми Діріхле на цьому відрізку, то ряд Фур'є для такої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (6)$$

де коефіцієнти обчислюються за формулами

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Для *парних функцій* формули мають вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\ a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

а для *непарних*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Приклад 5. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y=\begin{cases}2x-1, x\in(-3;0)\\ 3; x\in(0;3)\end{cases}$; $y(x+6)=y(x)$

Функція є періодичною з періодом $2l=6$, отже, $l=3$. Очевидно, що функція є ні парною, ні непарною, отже,

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)dx+\int_{0}^{3}3\cdot dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{0}-x\Big|_{-3}^{0}=0-9-(0+3)=-12,$$

$$I_2=\int_{0}^{3}3dx=3x\Big|_{0}^{3}=9-0=0,$$

$$a_0=\frac{1}{3}(-12+9)=-1;$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{0}3\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=2x-1 & du=2\cdot dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(2x-1)\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}-\frac{3}{n\pi}\cdot 2\int_{-3}^{0}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{3}{n\pi}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}-\frac{6}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}-(-7)\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos 0-\cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}\right)=$$

$$=\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\cos 0}_{1}-\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\right)=\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right),$$

$$I_2=\int_{0}^{3}3\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx=3\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{0}^{3}=\frac{9}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi\cdot 3}{3}-\sin 0\right)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right)+0\right]=\frac{6}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right);$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{0}3\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=2x-1 & du=2\cdot dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(2x-1)\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}-\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot 2\int_{-3}^{0}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}+\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1\cdot\cos 0-(-7)\cdot\cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\sin 0}_{0}-\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}\right)=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1+7\cdot\underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n}\right)=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(1-7\cdot(-1)^n\right),$$

$$I_2=\int_{0}^{3}3\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx=3\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{0}^{3}=-\frac{9}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi\cdot 3}{3}-\cos 0\right)=$$

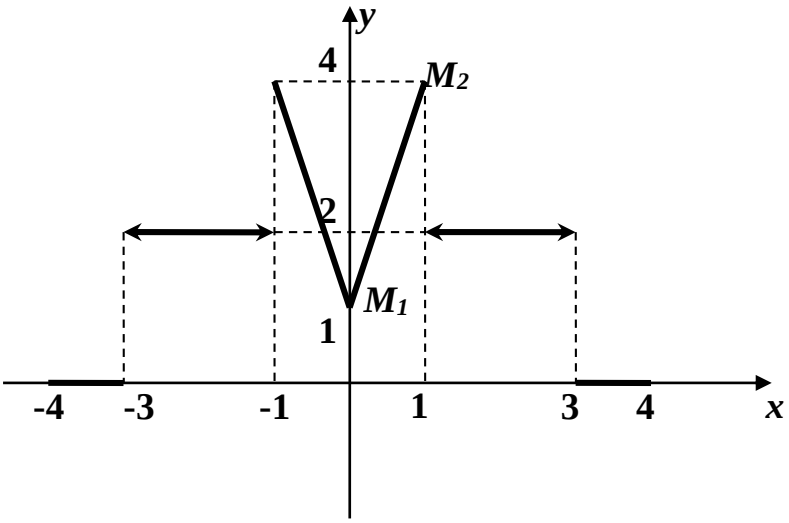
$$=-\frac{9}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\frac{9}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right),$$

$$b_n = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3}{n\pi}\cdot\left(1-7\cdot(-1)^n\right)+\frac{9}{n\pi}\cdot\left(1-(-1)^n\right)\right]=\frac{1}{n\pi}\cdot\left(4-10\cdot(-1)^n\right).$$

Таким чином, ряд має вигляд

$$y(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{1}{n\pi}\left(4-10\cdot(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi x}{3}\ .$$

Приклад 6. На проміжку $[-4;4]$ періодичну з періодом $T=8$ функцію ***y=f(x)*** задано графічно:



Розвинути періодичну функцію в ряд Фур'є.

Період функції **2*l*=8**, отже, півперіод ***l*=4**. Графік є симетричним відносно осі Oy, тому функція парна та розкладається в ряд Фур'є *за косинусами*:

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}.$$

Задамо функцію аналітично. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(0;1)$ та $M_2(1;4)$.

Користуючись рівнянням $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, маємо

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{4-1};\qquad x=\frac{y-1}{3};\qquad y-1=3x.$$

Таким чином, $y=3x+1$ для $x\in[0;1]$.

Якщо $x\in(1;3)$, то $y=2$; при $x\in[3;4]$ $y=0$.

Остаточно $y=\begin{cases}3x+1,\ x\in[0;1]\\ 2,\ x\in(1;3)\\ 0,\ x\in[3;4]\end{cases}$.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l y(x)dx=\frac{2}{4}\left(\int_0^1(3x+1)dx+\int_1^3 2dx+\int_3^4 0dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 3xdx+\int_0^1 dx+2x\Big|_1^3\right)=\frac{1}{2}\left(3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_0^1+2(3-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\left(1^2-0^2\right)+(1-0)+4\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{2}=\frac{13}{4};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l y(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{4}\left(\int_0^1(3x+1)\cos\frac{n\pi x}{4}dx+\int_1^3 2\cos\frac{n\pi x}{4}dx+\right.$$

$$\left.+\int_3^4 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}dx\right)=\left\{\begin{matrix}u=3x+1 & du=3dx\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{4}dx & v=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left((3x+1)\cdot\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\cdot 3\,dx+2\cdot\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_1^3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n\pi}\left((3\cdot1+1)\cdot\sin\frac{n\pi}{4}-1\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}\right)-\frac{12}{n\pi}\cdot\left(-\frac{4}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\Big|_0^1+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{n\pi}\left(\sin\frac{3n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{n\pi}\left(4\cdot\sin\frac{n\pi}{4}+\frac{12}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)+2\left(\sin\frac{3n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{6}{n\pi}\right).$$

$$y=\frac{13}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{6}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{4}.$$

Ряд Фур'є для $2l$ *- періодичної функції на відрізку* $[0,l]$ *або на відрізку* $[-l,0]$

Якщо функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $[0;l]$, то її визначення можна доповнити для проміжку $[-l;0)$, та побудувати розвинення отриманої функції в ряд Фур'є аналогічне розвиненню в ряд Фур'є функцій, заданих на проміжку $[-l, l]$.

У випадку, коли функцію продовжено на проміжку $[-l;0)$ *парним чином*, отримують розвинення заданої на $[0;l]$ функції **за косинусами** тільки:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0;l] \ ,$$

де $$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx .$$

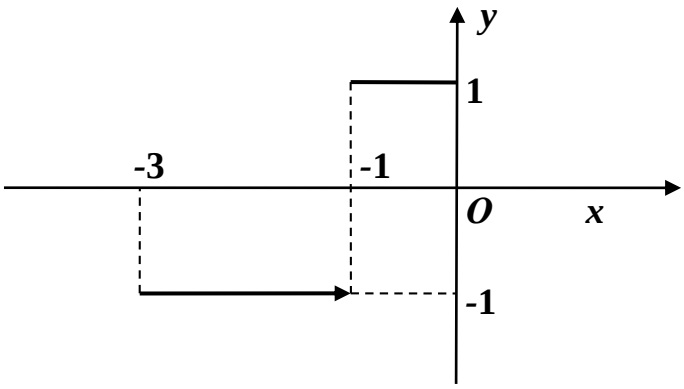
Якщо продовження є *непарним*, отримують розвинення заданої функції **за синусами**:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \ , \quad x \in [0;l] \ ,$$

де $$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx .$$

Аналогічно будується розвинення в ряд Фур'є функцій, заданих на проміжку $[-l;0]$.

Приклад 7. Побудувати ряди Фур'є за синусами та за косинусами функції, заданої графічно.

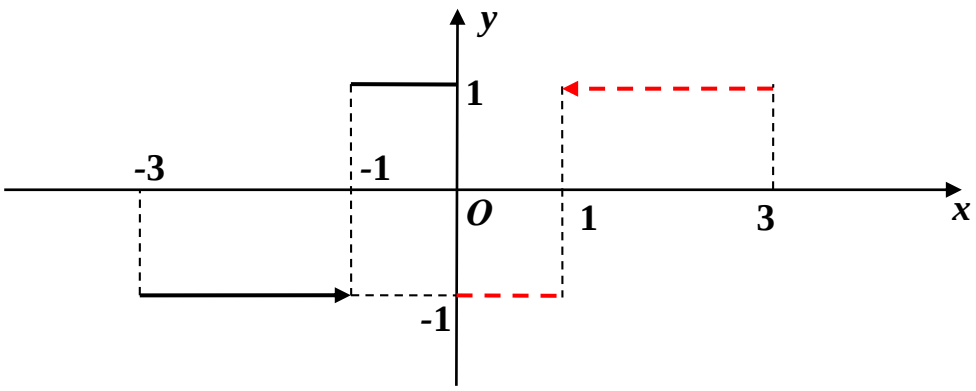


Задамо функцію аналітично. Очевидно, що, якщо $x \in [-3;-1)$, то $y = -1$, а для $x \in [-1;0]$ $y = 1$, отже,

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-3;-1) \\ 1, & x \in [-1;0] \end{cases} .$$

Функцію задано на проміжку $x \in [-3;0]$, тобто $l = 3$.

а) Довизначемо функцію на проміжку (0,3] непарним чином:



Розвинення в ряд за синусами має вигляд

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$b_n = \frac{2}{3}\int_{-3}^{0} y(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{2}{3}\left(\int_{-3}^{-1}(-1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx + \int_{-1}^{0}1\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right) =$$

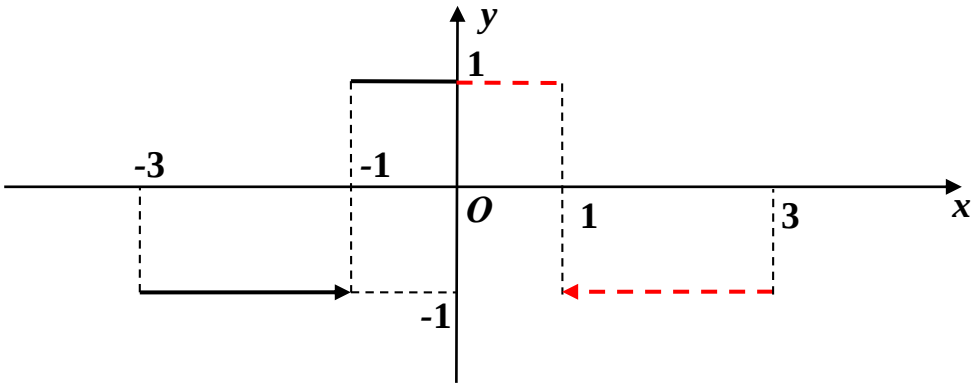
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{-1} - \frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-1}^{0}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi\cdot(-1)}{3} - \cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3} - \cos 0 + \cos\frac{n\pi\cdot(-1)}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(2\cos\frac{n\pi}{3} - \cos n\pi - 1\right) = \frac{2}{n\pi}\left(2\cos\frac{n\pi}{3} - (-1)^n - 1\right).$$

Тоді $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(2\cos\frac{n\pi}{3} - (-1)^n - 1\right)\sin\frac{n\pi x}{3}, \quad x \in [-3;0].$

б) Довизначемо функцію на проміжку (0,3] парним чином:



Побудуємо ряд за косинусами:

$$y(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}.$$

$$a_0=\frac{2}{3}\int_{-3}^{0}y(x)dx=\frac{2}{3}\left(\int_{-3}^{-1}(-1)dx+\int_{-1}^{0}1dx\right)=\frac{2}{3}\left(-x\Big|_{-3}^{-1}+x\Big|_{-1}^{0}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}(1-3+0+1)=-\frac{2}{3}.$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_{-3}^{0}y(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{2}{3}\left(\int_{-3}^{-1}(-1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-1}^{0}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{-1}+\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-1}^{0}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\left(-\sin\frac{n\pi\cdot(-1)}{3}+\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}+\underbrace{\sin 0}_{0}-\sin\frac{n\pi\cdot(-1)}{3}\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Отже,

$$y(x)=-\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\cdot\cos\frac{n\pi x}{3},\quad x\in[-3;0].$$

3. Розвинути функцію $y=|\sin x|$ у ряд Фур'є (рис. 3.16).

Р о з в ' я з а н н я . Графік такої функції дістають із графіка функції $y=\sin x$ на $(0;\pi)$ парним продовженням в $(-\pi;0)$. Тому

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]dx=$$

$$=-\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi(n^2-1)}\left[(-1)^n+1\right]=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{якщо } n \text{ непарне;}\\ -\dfrac{4}{\pi(n^2-1)}, & \text{якщо } n \text{ парне;}\end{cases}$$

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{15}\cos 4x+\ldots\right).$$

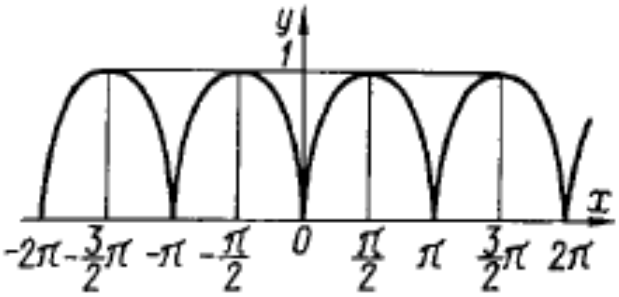


Рис. 3.16