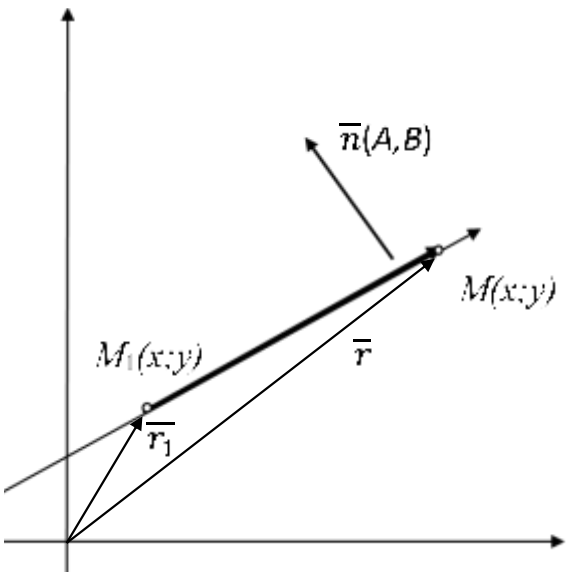
Лекція 10 Пряма на площині.

10.1 Різні види рівнянь прямої на площині

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої; двома точками; тощо. Різним способам задання прямої відповідають різні види її рівнянь.

10.1.1 Загальне рівняння прямої

Розглянемо у прямокутній системі координат рівняння прямої, яка проходить через задану точку M_1 $(x_1;\ y_1)$ перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\overline{n} = (A;\ B)$.



Візьмемо на прямій довільну точку $M(x;\ y)$ – поточна точка прямої і введемо вектор $\overline{\mathrm{M_1M}} = (x - x_1;\ y - y_1)$. Оскільки вектори $\overline{n}$ і $\overline{\mathrm{M_1M}}$ перпендикулярні то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\overline{n} \cdot \overline{\mathrm{M_1M}} = 0 \Rightarrow$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \qquad (1)$$

Означення Рівняння (1) називається *рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.*

Означення Вектор $\overline{n} = (\mathrm{A};\ \mathrm{B})$ називається *нормальним вектором прямої.* (Пряма має безліч нормальних векторів)

Розкриваючи дужки, одержемо рівняння першого степеня відносно змінних *x* і *y,* тобто *лінійними рівняннями*. Отже, рівняння будь-якої прямої, яка лежить в площині *Oxy,* є лінійним рівняннями відносно *x* і *y.*

$$\mathrm{A}x + By + \mathrm{C} = 0 \qquad (2)$$

де $C = -Ax_1 - By_1$

Покажемо, що правильним буде й обернене твердження: кожне лінійне рівняння (2) з двома змінними x і y визначає на площині в прямокутній системі координат пряму лінію.

Дійсно, якщо (x_1, y_1) — будь-який розв'язок рівняння (2), то

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \qquad (*)$$

Віднімаючи почленно від рівняння (2) рівність (*), отримуємо

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

Згідно з формулою (1) воно визначає на площині Oxy пряму, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n} = (A; B)$, тобто рівняння (2) визначає пряму.

Означення Рівняння (2) називається *загальним рівнянням прямої.* Коефіцієнти A і B при невідомих x і y загального рівняння є координатами її нормального вектора.

Це означає, що кожна пряма — лінія першого порядку, і навпаки, кожна лінія першого порядку є пряма.

10.1.2 Неповні рівняння прямої на площині

Рівняння (2) називається *повним*, якщо коефіцієнти A, B і C нерівні нулю одночасно, і *неповним*, якщо хоча б одне з цих чисел дорівнює нулю. Розглянемо можливі види неповних рівнянь прямої.

1) $C = 0$ - пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат.

2) $B = 0$ - пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy (так як нормаль до прямої $\{A, 0\}$ перпендикулярна осі Oy).

3) $A = 0$ - пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox.

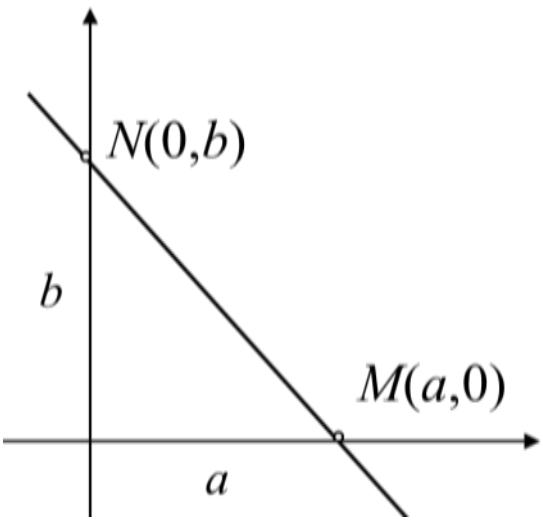
4) $B = C = 0$ - рівняння $Ax = 0$ визначає вісь Oy.

5) $\mathrm{A} = \mathrm{C} = 0$ - рівняння $\mathrm{B}y = 0$ визначає вісь Ox.

Таким чином, пряма, що задається повним рівнянням, не проходить через початок координат і не паралельна координатним осях.

10.1.3 Рівняння прямої на площині в відрізках

Якщо пряма задається повним рівнянням, тобто A, B і C нерівні нулю $A \cdot B \cdot C \neq 0$, то вона перетинає віссі координат.



Нехай пряма проходить через точки M *(a;* 0) та N *(*0; *b),* тобто відтинає на вісях координат відрізки a та b, то з рівняння (2) маємо

для M *(a;* 0): $\mathrm{A}a + B0 + \mathrm{C} = 0, A = -\frac{C}{a}$,

для N *(*0; *b)*: $\mathrm{A}0 + Bb + \mathrm{C} = 0, B = -\frac{C}{b}$

Перетворимо повне рівняння прямої (2) в такий спосіб:

$$-\frac{C}{a}\mathrm{x} + -\frac{C}{b}y + C = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3)$$

Означення Рівняння (3) називається *рівнянням прямої у відрізках на вісях.*

Можемо вивести рівняння прямої у відрізках на вісях з загального рівняння прямої

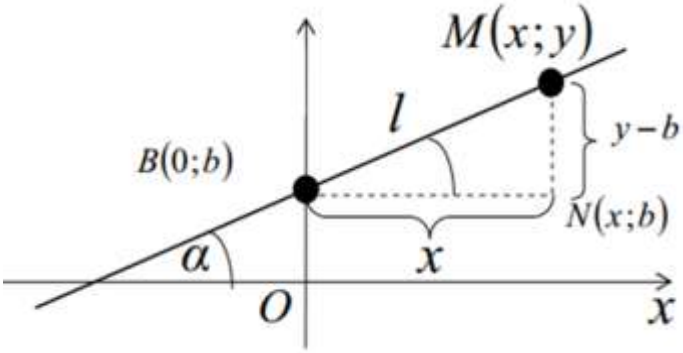
$$\mathrm{A}\mathrm{x} + By + \mathrm{C} = 0 \Rightarrow \mathrm{A}\mathrm{x} + By = -\mathrm{C} \Rightarrow -\frac{A}{C}\mathrm{x} + -\frac{B}{C}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

де $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

10.1.4 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай на площині Oxy задана пряма, не паралельна осі Oy. Її положення на площині однозначно визначається двома параметрами: *ординатою точки* $B(0, b)$ *перетину* з віссю Oy та *кутом* α між віссю Ox та прямою.

Означення *Кутом нахилу* прямої до осі *Ox* називається кут α, на який потрібно повернути в додатному напрямку (*проти годинникової стрілки*) вісь *Ox* до тих пір, доки вона не співпаде або не стане паралельною до даної прямої.



Означення Тангенс кута нахилу називається *кутовим коефіцієнтом* прямої і позначається k, тобто

$$tg\ \alpha = k$$

Нехай похила пряма утворює кут α з віссю *Ox* і перетинає вісь *Oy* у точці $B(0;b)$, b - — ордината точки перетину прямої з віссю *Oy*. Нехай $M(x;\ y)$ – довільна точка прямої. У прямокутному ΔBNM кут $\angle MBN = \alpha$. Тоді

$$\tan\alpha = \frac{NM}{BM}, \Rightarrow \tan\alpha = \frac{y-b}{x}, \Rightarrow k = \frac{y-b}{x}, \Rightarrow kx = y - b, \Rightarrow y = kx + b$$

Звідси маємо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

$$y = kx + b \qquad (4)$$

1) Якщо $k > 0$ то кут нахилу прямої до осі *Ox* гострий, якщо $k < 0$ то кут нахилу прямої до осі *Ox* тупий. Якщо $k = 0$, то пряма $y = b$ паралельна осі *Ox*.

2) Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат *O*(0;0).

3) Якщо пряма паралельна осі *Oy* (α=90º), то її кутовий коефіцієнт не існує ($k = tg\ 90º = \infty$), і її рівняння не можна подати у відповідному вигляді. Рівняння вертикальної прямої має вигляд $x = a$, де a – абсциса точки перетину прямої з віссю *Ox*.

Виведемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом з загального рівняння прямої, якщо пряма не перпендикулярна до осі *Ox,* то рівняння (2) можна записати у вигляді

$$\text{Ax} + By + \text{C} = 0 : B \neq 0$$

або

$$y = kx + b,$$

де $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$

У ряді випадків виникає необхідність скласти рівняння прямої, знаючи одну її точку і кутовий коефіцієнт k. Запишемо рівняння прямої у виді (4), де b — поки не відоме число. Так як пряма проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$, то координати цієї точки задовольняють рівнянню (4):

$$y_0 = kx_0 + b$$

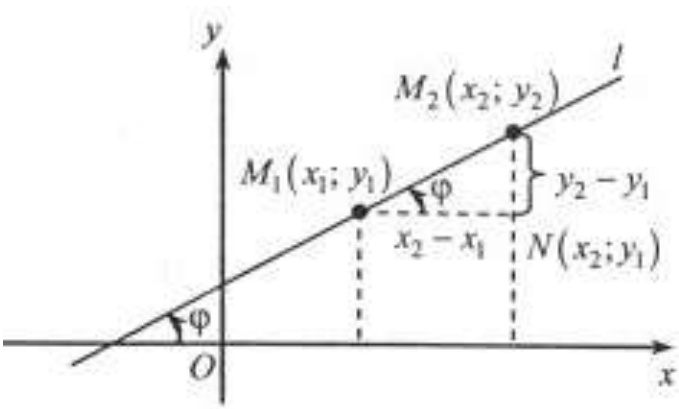
Виразивши з цієї рівності b і підставивши його в рівняння (4), отримаємо шукане рівняння:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (5)$$

Означення Рівняння (5) називається *рівнянням прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт*.

10.1.5 Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, дістанемо з рівняння прямої, що проходить через точку та має заданий кутовий коефіцієнт.



Виконаємо побудову згідно з малюнком і позначимо кут нахилу прямої із додатним напрямком осі через φ. З ΔM_1NM_2 маємо

$$\tan\varphi = \frac{NM_2}{M_1N}, \Rightarrow k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \Rightarrow$$

$$y - y_1 = k(x - x_1), \Rightarrow$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Отже

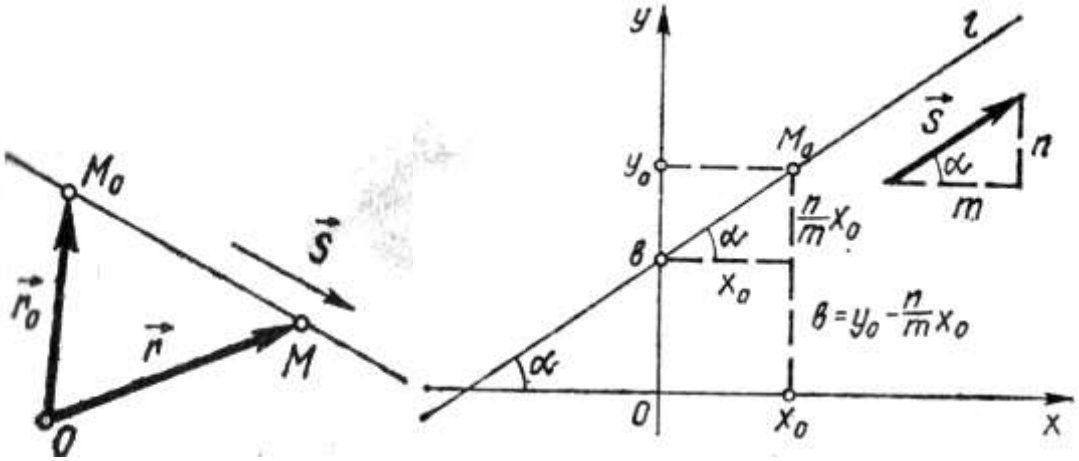
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (6)$$

Означення Рівняння (6) називається рівнянням *прямої, яка проходить через дві задані точки*.

10.1.6 Рівняння прямої, яка проходить через точку і паралельна вектору до даної прямої

Нехай пряма на площині проходить через задану точку M_0 паралельно заданому ненульовому вектору $\overline{s}$, який називається *напрямним вектором прямої*. Пряма має безліч напрямних векторів, їхні відповідні координати пропорційні.

Точка M_0 і її напрямний вектор цілком визначають пряму, тому що через точку M_0 можна провести лише одну пряму, паралельну вектору $\overline{s}$. Складемо рівняння цієї прямої. Позначимо через M (рис.) довільну точку прямої і розглянемо радіуси-вектори $\overline{r_0}$ = $\overline{\mathrm{OM_0}}$ та $\overline{r}$= $\overline{\mathrm{OM}}$ точок M_0 та M і вектор $\overline{\mathrm{M_0M}}$, що лежить на даній прямій.



Оскільки вектори $\overline{\mathrm{M_0M}}$ = $\overline{r}$—$\overline{r_0}$ і $\overline{s}$ колінеарні, то $\overline{r}$—$\overline{r_0}=\overline{s}t$, звідки

$$\overline{r}=\overline{r_0}+\overline{s}t \qquad (7)$$

Змінна t у формулі (7) може набувати довільних дійсних значень і називається *параметром,* а рівняння (7) називається *векторним*

параметричним рівнянням прямої.

Якщо пряма розглядається на площині і задається точкою $M_0(x_0;y_0)$ та напрямним вектором $\overline{s}$ = *(m; n),* то, прирівнюючи відповідні координати векторів $\overline{r}$ та $\overline{r_0}$ +$\overline{s}t$ за формулою (7) маємо

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \tag{8}$$

Звідки

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} \tag{9}$$

Означення Рівняння (8) називаються *параметричними рівняннями прямої,* а рівняння (9) - *канонічним рівнянням.*

Зокрема, якщо пряма проходить через точку M_0 $(x_0; y_0)$ паралельно осі *Ox,* то її напрямний вектор $\overline{s}$ = *(m;* 0), тому рівняння (9) набирає вигляду

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{0}$$

Як відомо, добуток середніх членів пропорції дорівнює добутку крайніх членів. Тому маємо $(y - y_0)\ m = (x - x_0)\ 0$, звідки $y = y_0$. Це і є рівняння прямої, яка *паралельна* осі *Ox.*

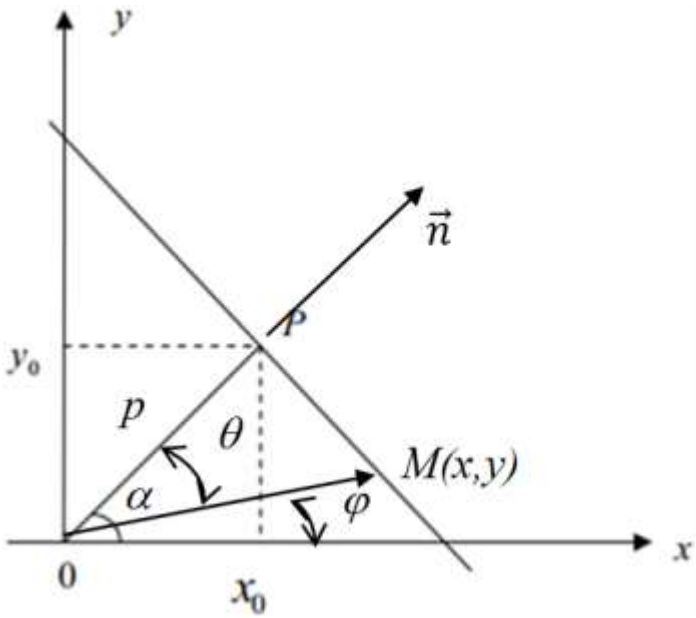
Аналогічно, якщо пряма проходить через точку M_0 $(x_0; y_0)$ паралельно осі *Oy,* то її рівнянням є $x = x_0$.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки M_1 $(x_1; y_1)$, M_2 $(x_2; y_2)$, дістанемо з рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\overline{s} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

10.1.7 Нормальне рівняння прямої

Означення. Нормаль це перпендикуляр, який проведено з початку координат на пряму.



Нехай OP – нормаль прямої, p - довжина нормалі, α - це кут, який утворює нормаль з додатним напрямком осі *OX*. Позначимо координати основи перпендикуляра $P(x_0; y_0)$.

Для виведення рівняння прямої використовуємо поняття проєкції радіус-вектору поточної точки прямої $\overrightarrow{OM}$ на задану нормаль:

$$\text{Пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = p = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\theta =$$

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| \cos(\alpha - \varphi) = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\alpha \cos\varphi + \left|\overrightarrow{OM}\right| \sin\alpha \sin\varphi$$

де

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\varphi = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM} = x$$

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| \sin\varphi = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos(90 - \varphi) = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM} = y$$

звідки

$$\text{Пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = p = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

Отже,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (10)$$

Означення Рівняння прямої називається *нормальним рівнянням прямої*.

Розглянемо, як із загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ можна перейти до її нормального рівняння:

Помножимо рівняння $Ax + By + C = 0$ на множник μ такий що

якщо $C < 0$, то $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$

якщо $C > 0$, то $\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Покладаючи $\mu C = -p$, отримаємо рівняння

$$(\mu A)x + (\mu B)y - p = 0,$$

де $p > 0$. Покладемо

$$\mu A = \cos\alpha \text{ і } \mu B = \sin\alpha$$

Тоді рівняння прямої набуває вигляду:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

Підкреслимо, що множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ називається *нормуючим множиником*.

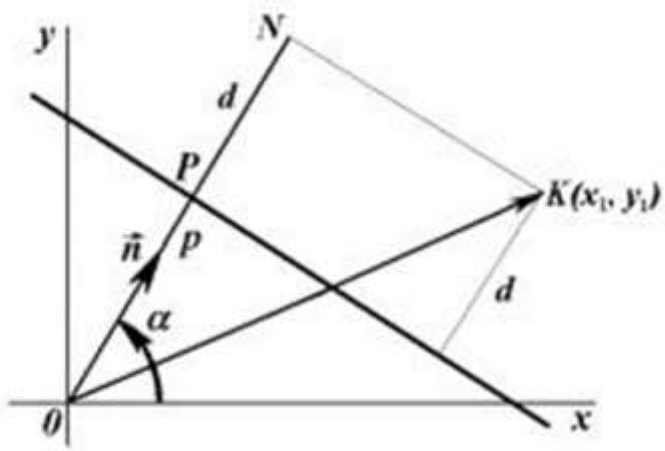
Кожне з рівнянь що було розглянуте зводиться до рівняння (10), отже, кожна пряма лінія задається рівнянням (10), і навпаки, кожне рівняння (10) визначає на площині *Oxy* пряму.

10.2 Відстань від точки до прямої

Означення *Відхиленням* точки $K(x_1, y_1)$ від прямої, що задана нормальним рівнянням називається параметр що обчислюється за формулою

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p \qquad (11)$$

Якщо точка *K* й початок координат знаходяться з одного боку від прямої, то $\delta < 0$, а якщо по різні боки, то $\delta > 0$.



Відстань від точки $K(x_1, y_1)$ до прямої дорівнює модулю відхилення й обчислюється за формулою

$$d = |\delta| = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p| \qquad (12)$$

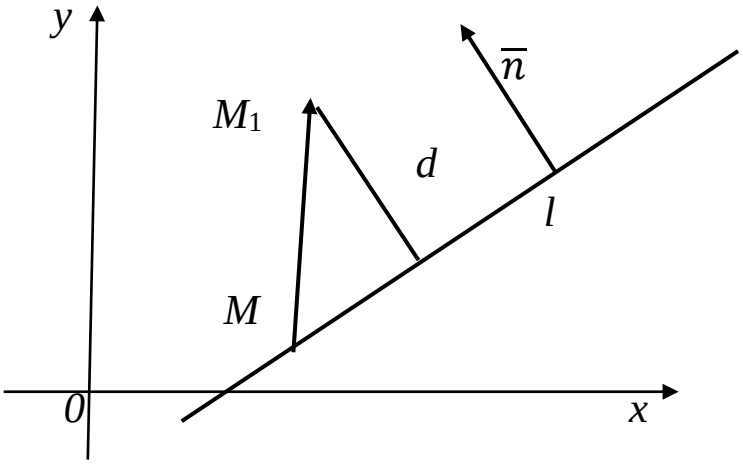
Для того щоб знайти відстань від точки до прямої, заданої рівнянням

(10), достатньо підставити координати точки $K(x_1, y_1)$, у нормальне рівняння прямої і знайти модуль здобутої величини. Або використати формулу зведення загального рівняння прямої до її нормального рівняння:

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \qquad (13)$$

Для отримання останьої формули (13) розглянемо наступну задачу:

Нехай задано пряму l рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точку $M_1(x_1; y_1)$. Відстань d (рис.) точки M_1 від прямої l дорівнює модулю проекції вектора $\overline{MM_1}$, де $M(x; y)$ - довільна точка прямої, на напрям нормального вектора $\overline{n} = (A; B)$.



Отже,

$$d = \left|\text{пр}_{\overline{n}}\overline{MM_1}\right| = \frac{\left|\overline{MM_1}\cdot\overline{n}\right|}{|\overline{n}|} = \frac{|Ax_1+By_1-Ax-By|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

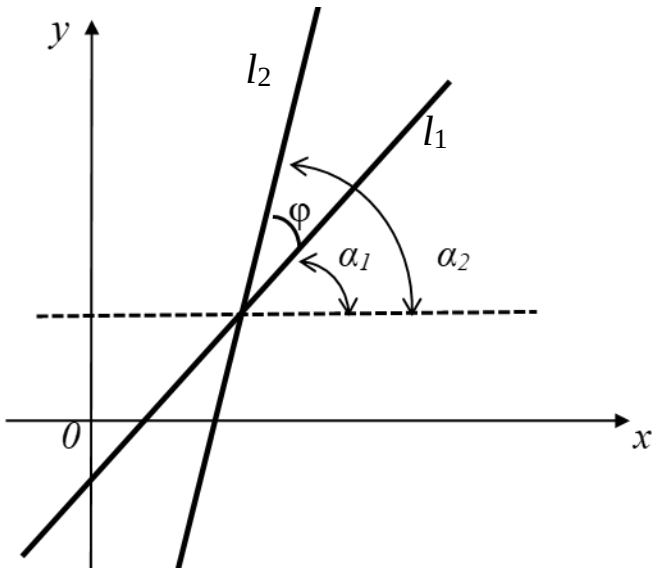
Оскільки $Ax + By + C = 0$, то — $Ax - By = C$, тому

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

10.3 Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

10.2.1 Кут між двома прямими через їхні кутові коефіцієнти

Нехай прямі l_1, та l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами:



$y = k_1x + b_1,\ y = k_2x + b_2,$

де $k_1 = tg\ \alpha_1,$

$k_2 = tg\ \alpha_2$ — кутові коефіцієнти,

то з рис. видно, що

$tg\ \varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_1 tg\ \alpha_2}$

$$tg\ \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (14)$$

Зауважимо, що формула (14) визначає кут, на який треба повернути пряму l_1, (проти годинникової стрілки), щоб вона збіглась з прямою l_2 .

Якщо прямі l_1, та l_2 <u>*паралельні*</u>, то $\varphi = 0$ і $tg\ \varphi = 0$, тому з формули маємо $k_2 - k_1 = 0$. Отже, *умовою паралельності* двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2 \qquad (15)$$

Якщо прямі l_1, та l_2 <u>*перпендикулярні*</u>, то $\varphi = 90°$ і $tg\ \varphi$ не існує, тому що знаменник дробу (11) дорівнює нулю. Таким чином, *умова перпендикулярності* прямих має вигляд

$$1 + k_1k_2 = 0, \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (16)$$

Формула (14) дає змогу визначити один із двох суміжних кутів, які утворюються при перетині двох прямих. Другий кут дорівнює $\pi - \varphi$. Іноді вирази справа в цих формулах записують по модулю, тоді визначається гострий кут між прямими.

10.2.2 Кут між двома прямими через їхні напрямні або нормальні вектори

Кут між двома прямими вимірюється кутом між *їхніми напрямними векторами*. При цьому слід зазначити, що, вибравши на одній із прямих напрямний вектор, напрямлений в протилежну сторону, дістанемо другий кут, який доповнює перший до π.

а) Нехай прямі l_1, та l_2, задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1};\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$$

і φ — кут між цими прямими: $\varphi=(\widehat{l_1,l_2})$, $0<\varphi<\pi$. Оскільки вектори $\overline{s_1}=(m_1;n_1)$ і $\overline{s_2}=(m_2;n_2)$ є напрямними векторами даних прямих (рис.) і $\varphi=(\widehat{\overline{s_1},\overline{s_2}})$, то за формулою скалярного добутку маємо

$$\cos\varphi=\frac{\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}}{|\overline{s_1}||\overline{s_2}|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}} \qquad (17)$$

Якщо прямі l_1, та l_2 паралельні, то вектори $\overline{s_1}$і $\overline{s_2}$ колінеарні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \qquad (18)$$

— *умова паралельності двох прямих.*

Якщо прямі l_1, та l_2 перпендикулярні, то вектори $\overline{s_1}$і $\overline{s_2}$ теж перпендикулярні $\vec{s}_1\perp\vec{s}_2$ і їхній скалярний добуток дорівнює нулю, $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0$, отже,

$$m_1m_2+n_1n_2=0 \qquad (19)$$

— *умова перпендикулярності двох прямих.*

б) Нехай тепер прямі l_1, та l_2 задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, тоді кут φ між ними дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\overline{n_1}=(A_1;B_1)$ *і* $\overline{n_2}=(A_2;B_2)$; тому аналогічно випадку (а) дістанемо:

1) формулу для кута φ між прямими l_1, та $l_2 \Leftrightarrow \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2}$:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{20}$$

2) умову паралельності прямих l_1, та $l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{21}$$

3)умову перпендикулярності прямих l_1, та $l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \tag{22}$$