Лекція 13 Вступ до Математичного Аналізу

Математичним аналізом називають систему дисциплін, предметом вивчення яких є *кількісні відношення* між величинами. Ці відношення виражаються за допомогою числових величин, як і в алгебрі (в арифметиці). Але в алгебрі розглядаються переважно *сталі величини*, які характеризують *стани*, у математичному аналізі ж розглядаються *змінні величини*, які характеризують *процеси* та *явища*.

Введення в математику понять *змінної величини* і *функції*, тобто математичних абстракцій відношень реального світу, дозволило перейти від розв'язання окремих розрізнених задач у різних науках як про природу (фізика, біалогія, хімія та інш.), так і у науках про суспільство, до створення загальних *методів математичного аналізу*. Останні базуються на дослідженню функцій *методами нескінченно малих*.

Зазвичай під назвою математичного аналізу об'єднують диференціальне та інтеґральне числення, теорію диференціальних рівнянь і теорію рядів. Основи *математичного аналізу* закладено у працях І. Ньютона, Г. Лейбніца, Л. Ейлера та інших математиків 17—18 ст. Обгрунтування математичного аналізу за допомогою поняття *границі* належить О. Л. Коші (кін. 18 ст. – поч. 19 ст.).

13.1. Квантори

Спочатку визначимо символи, які будемо використовувати на протязі усього курсу математичного аналізу:

$\forall$ - *квантор загальності*, вживається для заміни слів “для будь-якого”, “довільний”, “всякий”;

$\exists$ - *квантор існування*, вживається для заміни слів “існує”;

$\nexists$ - “не існує”

$\exists!$ – “існує єдиний”, “єдина”, “єдине” (в залежності від контексту),

$\Rightarrow$ - *символ імплікації*, вживається для заміни слів “слідує”, “випливає”; запис означає: “якщо A, то B”;

$\Leftrightarrow$ - *символ еквівалентності*, вживається для заміни слів “рівносильно ”; запис A $\Leftrightarrow$ B, означає одночасне виконання $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$, або для того, щоб A необхідно та достатньо, щоб B;

$\vee$- *символ диз’юнкції* (логічне додавання), запис $A \vee B$, означає A або B (операція вживається замість сполучника *або*);

$\wedge$ - *символ кон'юнкції* (логічне множення), запис $A \wedge B$ означає A і B (операція вживається замість сполучників *і, а, але, однак, хоча* тощо.);

$\neg$ - *логічне заперечення*. Запереченням висловлення p називають висловлення «не p», яке істинне, коли p хибне, і хибне, коли p істинне. (Також часто для заперечення вживають символ $\bar{p}$).

$\stackrel{\text{def}}{=}$ ($\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$) - дорівнює за означенням (визначається за означенням);

$\mathbb{N}$ - множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ - множина цілих чисел;

$\mathbb{Q}$ - множина раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ - множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ - множина комплексних чисел;

Приклади.

1. Нехай *P(x)* — «Трикутник *x* прямокутний», а *Q(x)* — «Трикутник x, у якого квадрат довжини найбільшої сторони c дорівнює сумі квадратів довжин менших його сторін a і b».

Тоді теорема *Піфагора* може бути записана у вигляді

$$\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Зауваження: P і Q - предикати. *Предикатом* називається твердження, в яке входять вільні змінні і яке при заміні їх конкретними значеннями стає висловленням. Предикати позначають великими буквами P, Q, R і т. д.

2. Твердження «Існує дійсне число x таке, що $x > 5$» можна записати таким чином:

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid (x > 5)$$

13.2. Поняття про теореми

Теорема — це математичне твердження, істинність якого з'ясовується доведенням (міркуваннями).

Формулювання будь-якої теореми складається з двох частин: умови і висновку, який випливає з даної умови. Якщо умову теореми позначити через $P(x)$, а висновок — через $Q\ (x)$, то теорему можна записати у вигляді

$$\forall x:\ P(x)\ \Rightarrow\ Q\ (x)$$

Якщо предикат тотожно істинний, то теорему називають *правильною*, в протилежному випадку — *неправильною*.

Для того щоб показати, що теорема

$$P(x)\ \Rightarrow\ Q\ (x)$$

неправильна, достатньо назвати хоча б одне таке x при якому теорема неправильна.

Таке значення x називається *контрприкладом* для даної теореми.

У математиці розглядають такі чотири типи теорем.

I. Пряма теорема: $P(x)\ \Rightarrow\ Q\ (x)$.

II. Обернена теорема: $Q(x)\ \Rightarrow\ P(x)$.

III. Протилежна теорема: $\bar{P}(x)\ \Rightarrow\ \bar{Q}\ (x)$.

IV. Обернена протилежній (протилежна оберненій) теорема: $\bar{Q}(x)\ \Rightarrow\ \bar{P}\ (x)$.

У математиці трапляються теореми з трьома різними умовами: *необхідна*, *достатня*, *необхідна і достатня*.

Необхідна умова — це умова, без виконання якої дане твердження неправильне.

Якщо теорема правильна, тобто імплікація істинна:

$$P(x)\ \Rightarrow\ Q\ (x)$$

то Q називають необхідною умовою для P.

Приклад. «Щоб чотирикутник був квадратом, необхідно, щоб його діагоналі були взаємно перпендикулярні» Наведена умова є тільки *необхідною*, але не

достатньою: якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то він не обов'язково є квадратом.

Достатня умова — це умова, з якої випливає, що дане твердження істинне.

Якщо теорема правильна, тобто імплікація істинна:

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

то P називається достатньою умовою для Q.

Приклад. «Якщо сторони чотирикутника рівні між собою, то чотирикутник — паралелограм».

Очевидно, що наведена умова тільки достатня, але не необхідна: якщо чотирикутник паралелограм, то його всі сторони не обов'язково рівні між собою.

Якщо теореми правильні,

$$P(x) \Rightarrow Q(x) \text{ і } Q(x) \Rightarrow P(x),$$

то P є необхідною і достатньою умовою для Q, і навпаки, Q є необхідною і достатньою умовою для P.

13.3. Множини. Логічні символи

Поняття множини є одним з фундаментальних у математиці. Воно належить до понять, яким не можна дати строге означення, тобто до так знаних, які не можна виразити через простіші поняття.

Означення. Інтуїтивно *множину* розуміють як сукупність (сімейство, набір, зібрання) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою, характеристикою чи властивістю.

Прикладами множин може бути множина деталей, з яких складається даний механізм, множина шкіл даного міста, множина зірок певного сузір’я, множина розв’язків даного рівняння, множина всіх цілих чисел тощо.

Означення. Об'єкти, з яких складається множина, називаються її *елементами*.

Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи – малими. Той факт, що множина X вміщує елементи x_1, x_2, x_3, ..., x_n записують так:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$$

Якщо елемент x належить множині X, то пишуть x $\in X$, а x $\notin X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Означення. Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною*. Запис $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ означає, що множина A скінченна і містить s елементів. Множина $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, яка містить нескінченну кількість елементів, називається *нескінченною*.

Так, множина слухачів в даній аудиторії — скінченна, а множина трикутників, які можна вписати в дане коло — нескінченна.

Означення. Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається символом $\emptyset$.

Прикладом порожньої множини є множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Задати множину — це означає вказати те спільне, що відрізняє її елементи від решти об'єктів - *характеристична властивість* її елементів. Якщо характеристичну властивість множини A, елементом якої є x, позначити через $P(x)$, то множину A записують так:

$$A = \{x|\ P(x)\} \text{ або } A = \{x: P(x)\} \text{ або } \{x\ \in A|P(x)\}$$

Операції над множинами

Нехай задано дві множини A і B.

Означення. Множину B називають *підмножиною* множини A, якщо кожний елемент множини B належить множині A, і записують

$$\forall a\ \in B \Rightarrow a\ \in A$$

Якщо множина B називають *підмножиною* множини A і пишуть $B \subset A$ або $A \supset B$ і читають «B міститься в A», або «A вміщує B». Знак $\subset$ називається *символом включення*.

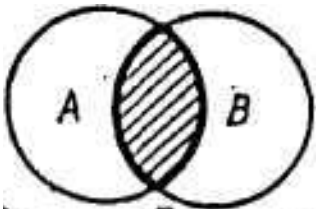
Означення. Якщо множини A і B містять одні і тіж самі елементи, тобто $A \subset B$ і $B \subset A$, то їх називають *рівними* і пишуть $A = B$

Означення. *Перетином* двох множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині A і множині B. Перетин множин позначають $\cap$ і записують

$$C = A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Отже, $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ і $x \in B$

Перетин можна визначити також як спільну частину двох множин A і B. Для ілюстрації властивостей множин використовують графічне зображення множин у вигляді діаграм, *кругів Ейлера* (рис.).



$$C = A \cap B$$

Властивості перетину:

1°. $A \cap A = A$

2°. $A \cap \emptyset = \emptyset$

3°. $A \cap B = B \cap A$

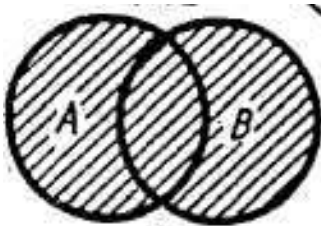
4°. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

5°. Якщо $A \subset B$, то $A \cap B = A$

Означення. *Об'єднанням* двох множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з даних множин (рис.). Об'єднання множин позначають знаком $\cup$ і записують так:

$$C = A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Отже, $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ або $x \in B$



$C = A \cup B$

Властивості об'єднання:

1°. $A \cup A = A$

2°. $A \cup \emptyset = A$

3°. Якщо $A \supset B$, то $A \cup B = A$

4°. $A \cup B = B \cup A$

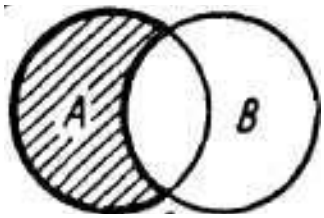
5°. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

6°. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

7°. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Означення. *Різницею* множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів множини A, яких немає в B (рис.). Різницю множин позначають знаком \ і записують

$$C = A \backslash B = \{x \in \mathrm{C} : x \in A \wedge x \notin B\}$$



$C = A \setminus B$ $\qquad$ $C_A B = \mathrm{A} \backslash \mathrm{B}$

Якщо $B \subset A$, то різницю A\B називають *доповненням* множини B до множини A і записують

$$C_A B = \mathrm{A} \backslash \mathrm{B}$$

13.4 Числові проміжки. Окіл точки

Ряд множин має загальноприйняті позначення:

1) множина натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ \ldots;\ n;\ \ldots\}$;

2) множина цілих невід'ємних цілих чисел $\mathbb{Z}_0 = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n; \ldots\}$;

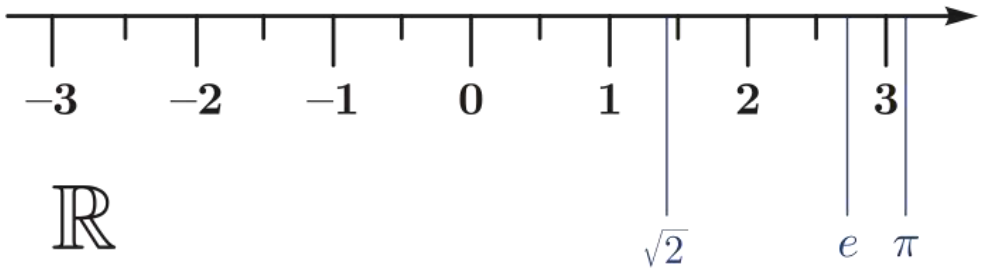
3) множина цілих чисел $\mathbb{Z} = \{0;\ \pm 1,\ \pm 2;\ \ldots;\ \pm n;\ \ldots\}$;

4) множина раціональних чисел $\mathbb{Q} = \{\frac{\mathrm{p}}{q} \mid \mathrm{p} \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$;

5) множина дійсних чисел $\mathbb{R} = \{x \mid \mathrm{x} = a.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\}$, де $a \in \mathbb{Z}$, α_i – цифри десяткової системи числення: $x \in (-\infty;\ +\infty)$

Між цими множинами існує зв'язок: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Дійсні числа зображають точками на координатній осі або числовій прямій. Таким чином, між множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$ і множиною всіх *точок прямої* можна встановити взаємно однозначну відповідність. Це означає, що кожному числу $x \in \mathbb{R}$ відповідає певна точка прямої і, навпаки, кожній точці прямої відповідає певне число.



Означення. *Числовий проміжок* — у математичному аналізі, множина (сукупність) дійсних чисел, що містяться між двома числами (точками на осі координат).

Проміжок може включати або не включати кінці проміжку. Цим проміжок відрізняється від інтервалу в класичному розумінні — тобто, відкритого проміжку, в який не включено його кінці. Проте терміни «*проміжок*» та «*інтервал*» нерідко використовують як синоніми.

Класифікація числових проміжків

Нехай a і b –дійсні числа, причому $\mathrm{a} < b$. Розглянемо числові множини:

$$[a;b]=\{x|a\le x\le b\};\ (a;+\infty)=\{x|a<x\};$$
$$(a;b]=\{x|a<x\le b\};(-\infty;b)=\{x|x<b\};$$
$$(a;b)=\{x|a<x<b\};\ [a;+\infty)=\{x|a\le x\};$$
$$[a;b)=\{x|a\le x<b\};(-\infty;b]=\{x|x\le b\};$$
$$(-\infty;+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}.$$

Усі ці множини називаються числовими *проміжками*, причому

$[a;b]$ – *відрізок* (*сегмент*),

$(a;\ b)$, $(a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ b)$, $(-\infty;\ +\infty)$ – *інтервали*,

$(a;b]$, $[a;\ b)$, $[a;\ +\infty)$, $(-\infty,\ b]$ – *півінтервали;*

точки a і b називають відповідно *лівою* і *правою* межею цих проміжків.

Нехай x_0– довільне дійсне число.

Означення. *Окілом* точки x_0 називають будь-який інтервал $(\alpha;\ \beta)$, що містить цю точку, тобто $\alpha < x_0 < \beta$.

Означення. Інтервал $(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$, де $\varepsilon>0$, називають *ε–окілом* точки x_0 і позначається $U_\varepsilon(x_0)$, або

$$U_\varepsilon(x_0)=\{x\colon |x-x_0|<\varepsilon\}$$

причому точку x_0 називають *центром*, а число ε–*радіусом* околу.

Цей окіл називають *досить малим*, якщо число ε *досить мале*.

Також існує *ε–окіл* точки x_0 за виключенням самої цієї точки:

$$\widehat{U}_\varepsilon(x_0)=\{x\colon |x-x_0|<\varepsilon\backslash x_0\}$$

Змінні і сталі величини

Величина характеризується своїм числовим значенням.

Величини в деякому процесі можуть набувати різних або однакових числових значень. У першому випадку величина називається *змінною*, у другому — *сталою*.

Означення. *Змінною* називається величина, що набуває різних числових значень.

Стала величина вважається окремим випадком змінної: *стала* – це така змінна, всі значення якої рівні між собою.

Якщо змінна величина набуває своїх значень дискретно (перервно), то її називають *послідовністю*. Якщо ж змінна величина набуває неперервних значень, то її просто називають *змінною*.

13.5 Поняття функції

Означення Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом f поставлене у відповідність єдине число y, то кажуть, щоy є функція від x і пишуть:

$$y = f(x), \forall x \in X$$

Змінна x називається *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінна y — *залежною змінною*, або *функцією*; під символом f розуміють те правило, за яким кожному x відповідає y, або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Множина X називається *областю визначення* функції. Множина Y усіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in X$ називається *множиною значень* функції, тобто

$$Y = \{y: y = f(x), \forall x \in X\}$$

Іноді у означенні функції припускають, що одному значенню аргументу відповідає не одне, а кілька значень y або навіть нескінченна множина значень y. У цьому випадку функцію називають *багатозначною*, на відміну від означеної вище *однозначної* функції.

Зауваження У ширшому розумінні поняття функції вживається як синонім поняття *відображення* множини на множину. Нехай задано дві не порожні множини X і Y з елементами $x \in X$ і $y \in Y$ і нехай перетворення f переводить x в y. Тоді це перетворення f (правило, закон, відповідність, відображення, залежність) називають функцією і пишуть

$$f: X \to Y$$

Елемент x називається *прообразом*, а y — *образом*. Множина X називається областю визначення функції, а множина $f(X)$ — областю значень функції, де

$$f(X) = \{y \in Y \; \exists x \in X, f(x) = y\}$$

Способи задання функцій

Щоб задати функцію $y = f(x)$, треба вказати її область визначення X, множину значень Y і правило f, за яким для довільного числа $x \in X$ можна знайти відповідне йому число $y \in Y$

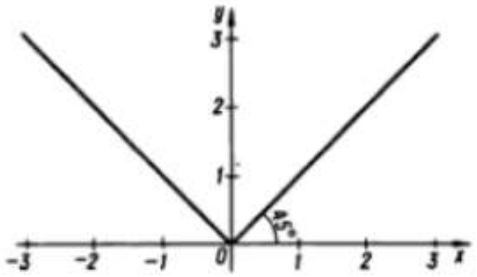
Основні способи задання функції: *аналітичний*, *графічний* і *табличний*.

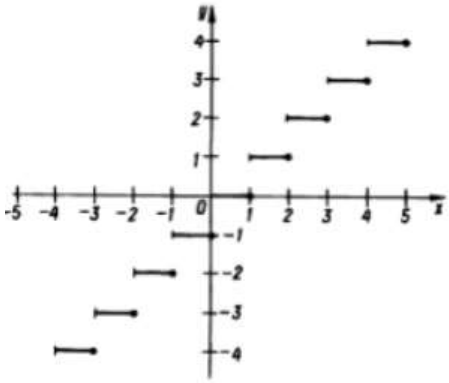
1° При *аналітичному способі* задання функції відповідність між аргументом і функцією задається *формулою* (*аналітичним виразом*), де зазначено, які дії - f потрібно виконати над значенням аргументу x та сталими, щоб дістати відповідне значення функції y.

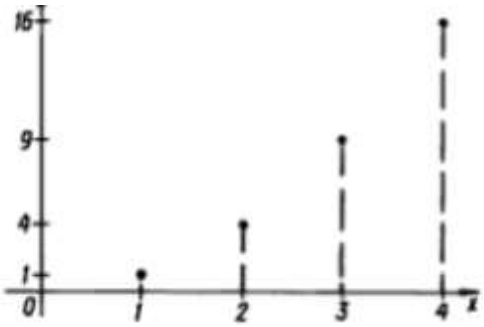
Якщо при цьому область визначення не вказується, то під останньою розуміють область існування функції – множину всіх дійсних значень аргументу, для яких аналітичний вираз має зміст.

2° При *графічному способі* задання функції $y = f(x)$ відповідність між змінними і y задається *графіком*– множиною точок (x; y) площини, прямокутні координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$.

Залежно від того, яку задано функцію, графік її може складатись з однієї суцільної лінії, кількох ліній, дискретної множини точок площини тощо.







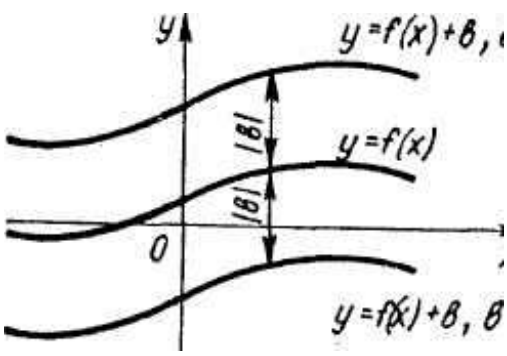
Зауваження: Якщо функція $y = f(x)$ задана на деякій множині X формулою, то завжди можна вважати, що їй відповідає певний графік, який визначає цю функцію геометрично.

3° *Табличний спосіб* задання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

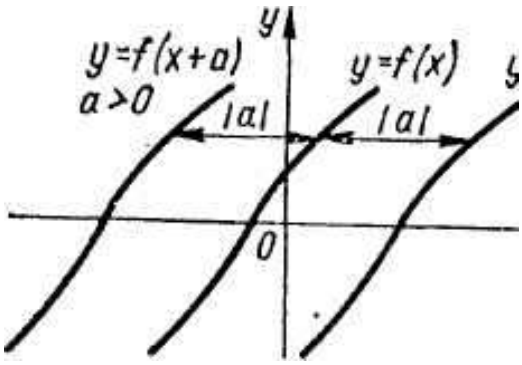
Зауваження: Цей спосіб задання функції найчастіше зустрічається в експериментах. При цьому задають сукупність значень незалежної змінної, а значення функції знаходять дослідним шляхом, закон відповідності записують у вигляді таблиці.

Нехай графік функції $y = f(x)$ відомий, розглянемо деякі перетворення цього графіка.

1. Графік функції $y = f(x) + b$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Oy на величину, що дорівнює b (рис. А)

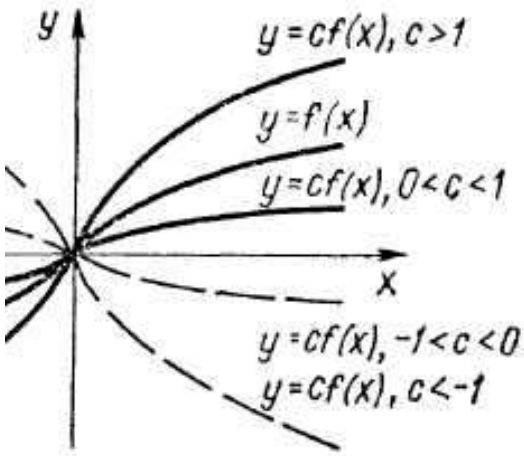


(А)

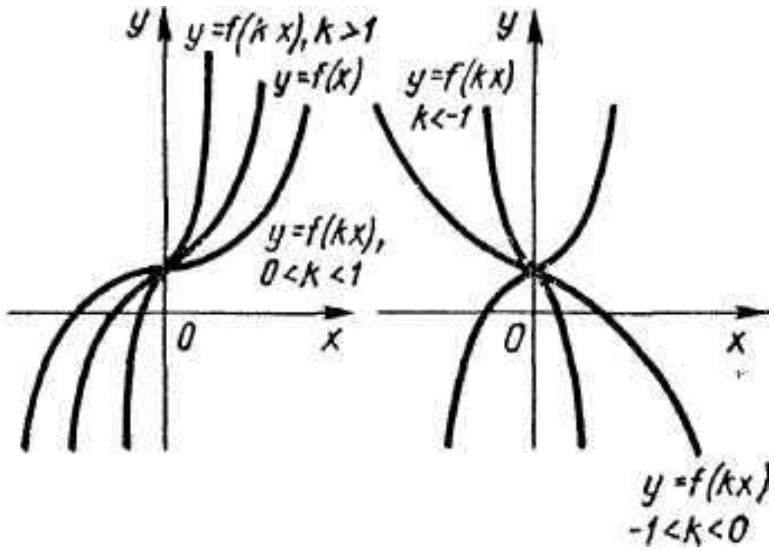


(Б)

2. Графік функції $y = f(x + a)$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Ox на величину, що дорівнює a (рис. Б)
3. Графік функції $y = cf(x)$, $c \neq 0$, дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < c < 1$ за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів ординат останнього, а при $c > 1$ за допомогою розтягування в c разів його ординат із збереженням відповідних абсцис (рис. В).



(В)



(Г)

4. Якщо $-\infty < c < 0$, то графік $y = cf(x)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = -cf(x)$ відносно осі *Ox* (відповідно до випадків $-1 < c < 0$ і $c < -1$)
5. Графік функції $y = f(kx)$, $k \neq 0$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < k < 1$ збільшенням в $\frac{1}{k}$ разів абсцис його точок, а при $1 < k < +\infty$ зменшенням в k разів абсцис його точок із збереженням їхніх ординат (рис. Г).
6. Якщо $-\infty < k < 0$, то графік $y = f(kx)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = f(-kx)$ відносно осі *Oy*.

Класифікація основних елементарних функцій

1. *Степенева функція* $y = x^n$, $n \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Область визначення і графіки цієї функції залежать від значення n;
2. *Показникова функція* $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$; $x \in \mathbb{R}$
3. *Логарифмічна функція* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $x \in \mathbb{R}$
4. *Тригонометричні функції:* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$; $x \in \mathbb{R}$
5. *Обернені тригонометричні функції:* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$; $x \in [-1; 1]$ та $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$, $x \in \mathbb{R}$

Арифметичні операції над функціями

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині A, а $y = \varphi(x)$ – на множині B, причому переріз цих множин $C = A \cap B \neq \emptyset$. Тоді на множині C можна визначити:

- суму функцій $f(x) + \varphi(x)$. Значення суми в точці $x = x_0 \in C$– це число, яке дорівнює сумі $f(x_0) + \varphi(x_0)$. Аналогічно можна визначити,
- різницю $f(x) - \varphi(x)$,
- добуток $f(x) \cdot \varphi(x)$ та
- частку $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, за умови, що $\varphi(x) \neq 0, \forall x \in C$.
- Над функціями виконують і так звану операцію *суперпозиції*, або *накладання*.

Означення Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині A, а функція $u = \varphi(x)$ – на множині B, причому для кожного значення $x \in B$ відповідне значення $u = \varphi(x) \in A$. Тоді на множині B визначена функція $y = f(\varphi(x))$ яку називають *складеною* функцією від x, або *суперпозицією* заданих функцій, або *функцією від функції*.

Змінну $u = \varphi(x)$ функції $y = f(u)$ називають *проміжним аргументом*, або *внутрішньою функцією*, а змінну $y = f(u)$ *зовнішньою функцією*.

Приклади

1. Функція $y = \sqrt[3]{\sin x}$ є суперпозицією двох основних елементарних функцій – степеневої та тригонометричної:

$$y = \sqrt[3]{u}, u \in [-1; 1], u = \sin x, x \in (-\infty; +\infty)$$

Складені функції можна утворювати за допомогою суперпозиції не тільки двох, а й більшої кількості функцій.

2. Функцію $y = 2^{\sin x^3}$ можна розглядати як суперпозицію трьох функцій:

$$y = 2^u, u \in [-1; 1], u = \sin v, v \in (-\infty; +\infty), v = x^3, x \in (-\infty; +\infty)$$

Елементарні функції

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінчене число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називаються *елементарними*.

Елементарні функції поділяють на такі класи.

1) Функція виду $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, де $n \in Z_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – дійсні числа – коефіцієнти ($a_0 \neq 0$), називається *цілою раціональною функцією*, або *многочленом* (*поліномом*) степеня n.

Многочлен першого степеня називається також *лінійною* функцією, а другого – *квадратичною*.

2) Функція, що є відношенням двох многочленів

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}$$

називається *дробовою раціональною функцією*, або *раціональним дробом*.

Сукупність многочленів і раціональних дробів утворює клас *раціональних функцій*.

3) Функція, утворена за допомогою скінченого числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками і яка не є раціональною, називається *ірраціональною функцією*.

Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{x-5}$ – ірраціональна.

4) Елементарна функція, яка не є раціональною або ірраціональною, називається *трансцендентною* функцією. Це, наприклад, функції

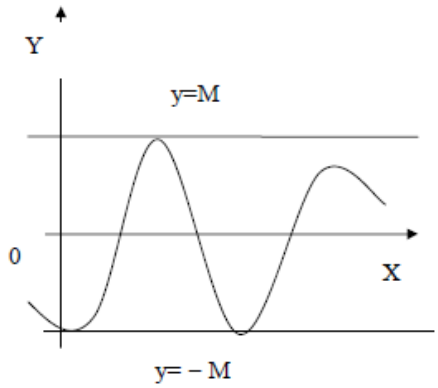
$\mathrm{y} = sin\mathrm{x}$, $\mathrm{y} = 2^{\mathrm{x}} + \mathrm{x}$, $\mathrm{y} = 1 + lg\mathrm{x}$, $\mathrm{y} = arctg\mathrm{x}$ тощо.

Обмежені і необмежені функції

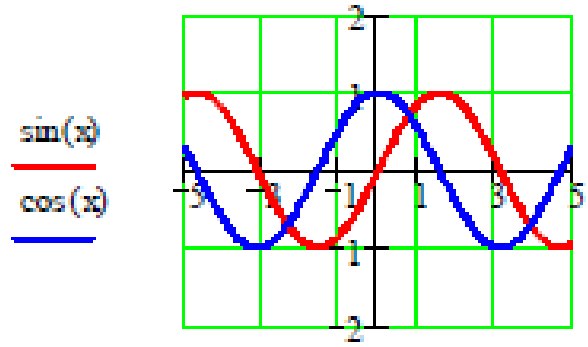
Означення Функцію $y = f(x)$, яка визначена на множині A, називають *обмеженою* на цій множині, коли існує таке число $\mathrm{M} > 0$, що для всіх $x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$. Таким чином, значення обмеженої

функції не виходять за межі відрізка [– M; M].Тому її графік лежить між прямими y = – M та y = M (рис. А).

Наприклад, функції y = sinx та y=cosx обмежені на всій числовій осі, бо $|sin\ x| \leq 1$, $|cos\ x| \leq 1$, $\forall x \in R$ (рис. Б).



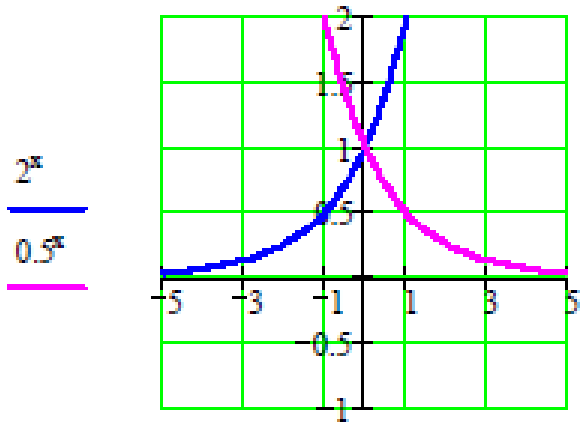
(А)

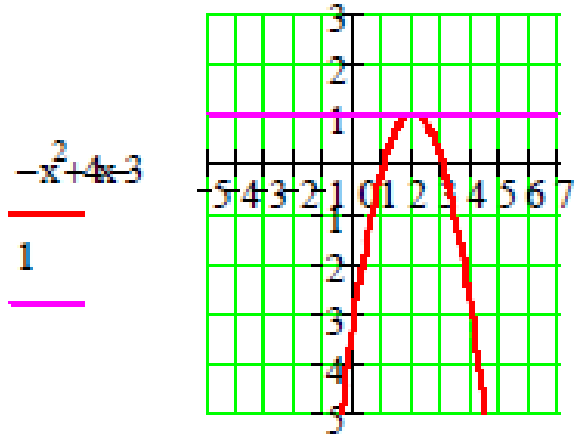


(Б)

Якщо для функцій $y = f(x)$, або $y = \varphi(x)$, які визначені на множині A, існує таке число N, що виконується нерівність $f\ (x) \leq N$ або $\varphi(x) \geq N$, то функцію $f(x)$ називають *обмеженою зверху*, а $\varphi(x)$ – *обмеженою знизу*.

Наприклад, функція $y = a^x$ на інтервалі (– ∞; +∞) обмежена знизу прямою y = 0, але не обмежена зверху;





а функція y $= x^2 + 4x - 3$ обмежена зверху прямою $y = 1$, але не обмежена знизу; функція $y = \frac{1}{x}$ – необмежена.

Зауваження Розглядаючи обмеженість функції $y = f(x)$, ми тим самим характеризуємо множину значень цієї функції.

Монотонні функції

Означення Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині A. Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини A, з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що

а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається *зростаючою*;

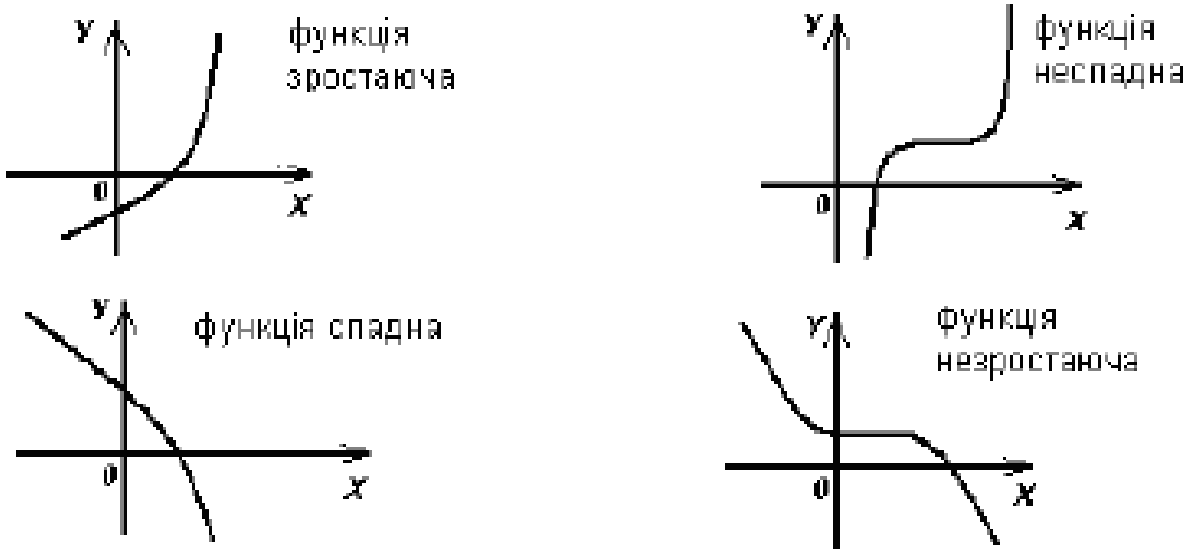
б) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція називається *неспадною*;

в) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається *спадною*;

г) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається *незростаючою*.

Наприклад, функція $y = a^x$ є зростаючою при $a > 1$ і спадною при $0 < a < 1$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$;

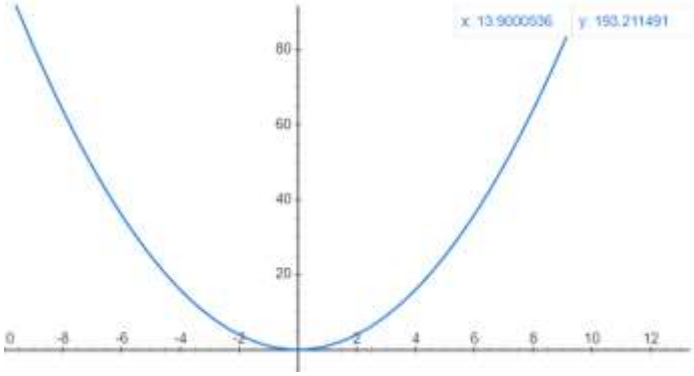
функція $y = x^2 + 4x - 3$ є зростаючою на інтервалі $(-\infty; 2)$ і спадною на інтервалі $(2; +\infty)$.



Означення Зростаючі, незростаючі, спадні й неспадні функції на множині A називаються *монотонними* на цій множині, а зростаючі і спадні – *строго монотонними*.

Нехай функція не є монотонною в усій своїй області визначення, але цю область можна розбити на деяке (скінчене чи нескінченне) число проміжків, які не перетинаються і на кожному з яких функція монотонна. Такі проміжки називаються *проміжками монотонності* функції.

Наприклад, функція $y = x^2$ але має два проміжки монотонності: $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$; на першому з них функція спадає, а на другому –зростає.



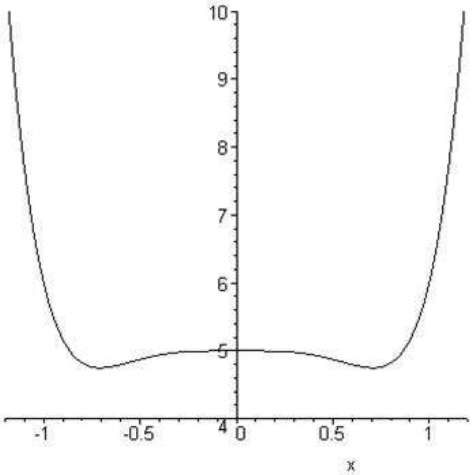
Функції $y = sinx$ і $y = cosx$ мають нескінченну кількість проміжків монотонності.

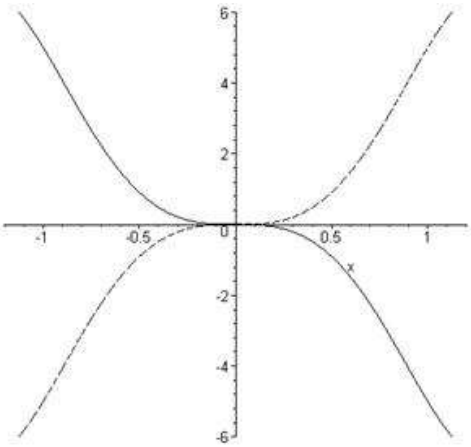
Парні і непарні функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині A точок осі Ox, які розміщені симетрично відносно точки $x = 0$, тобто якщо $x \in A$, то й $-x \in A$.

Означення Функцію $f(x)$ називають *парною,* якщо $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$, і *непарною,* якщо $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$.

Графік парної функції симетричний відносно *осі ординат*, а графік непарної функції симетричний відносно *початку координат*.





Періодичні функції

Означення 1 Функція $y = f(x)$ визначена на всій числовій прямій, називається *періодичною*, якщо існує таке число T, що $f(x + T) = f(x)$. Число T називається *періодом функції*.

Якщо T–період функції, то її періодами є також числа kT, де k дорівнює ±1,±2,…

Найменший з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається *основним періодом* функції.

Ми визначили періодичну функцію, задану на всій числовій прямій. Більш загальним є таке означення.

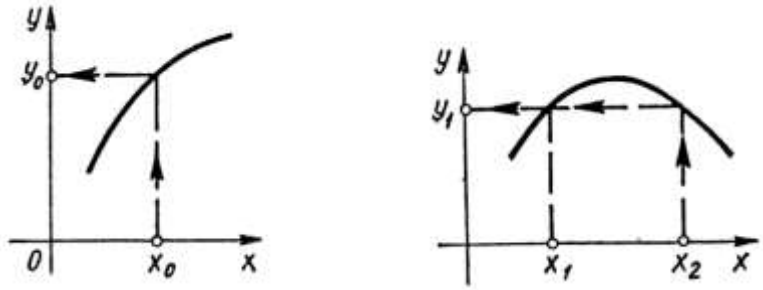
Означення 2 Функція $y = f(x)$, визначена на множині A, називається періодичною на цій множині, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x + T \in A$ і $f(x + T) = f(x), \forall x \in A$.

З означення випливає, що для побудови графіка періодичної з періодом T функції досить побудувати її графік на довільному проміжку довжини T, а потім продовжити цей графік на всю область визначення, повторюючи його через кожний проміжок довжини T.

Прикладами періодичних функцій є тригонометричні.

Обернені функції

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y. Функція f(x) кожному значенню $x_0 \in X$ ставить у відповідність єдине значення $y_0 \in Y$ (рис. А). При цьому може виявитись, що різним значенням аргументу x_1 і x_2 відповідає одне й те саме значення функції $y_1 = f(x_1)$ (рис. Б).



А Б

Вимагатимемо, щоб функція $y = f(x)$ різним значенням x ставила у відповідність різні значення y. Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна визначити функцію з областю визначення

Y і множиною значень X. Ця функція називається *оберненою* функцією до даної.

Отже, функція $x = \varphi(y)$ є оберненою до функції $y = f(x)$, якщо:

1) областю визначення функції $\varphi(y)$ є множина значень функції $f(x)$;

2) множина значень функції $\varphi(y)$ є областю визначення функції $f(x)$;

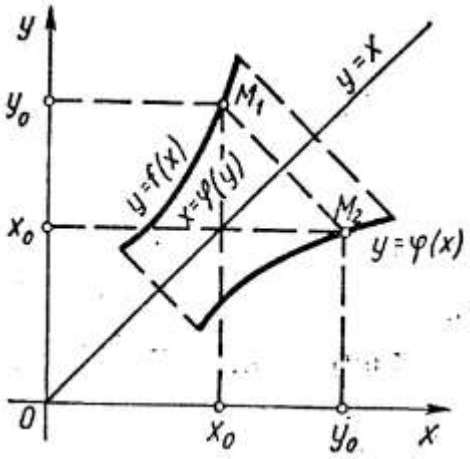
3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$.

З цього випливає, що кожна з двох функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ може бути названа *прямою* або *оберненою*, тобто ці функції взаємно обернені.

Щоб знайти функцію $x = \varphi(y)$, обернену до функції $y = f(x)$, достатньо розв'язати рівняння $f(x) = y$ відносно змінної x (якщо це можливо). Оскільки кожна точка $(x; y)$ кривої $y = f(x)$ є одночасно точкою кривої $x = \varphi(y)$, то графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ збігаються.

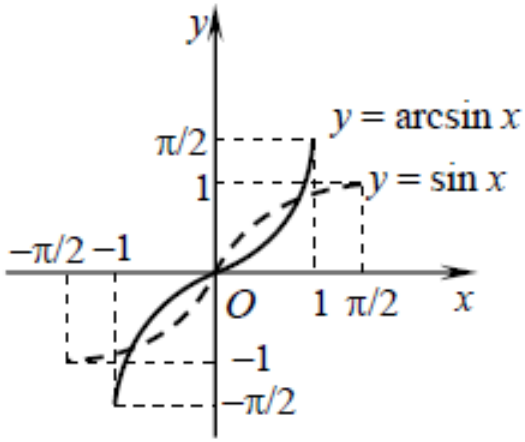
Якщо ж додатково зажадати, щоб, як звичайно, незалежна змінна позначалась через x, а залежна – через y, то замість функції $x = \varphi(y)$ матимемо функцію $y = \varphi(x)$.

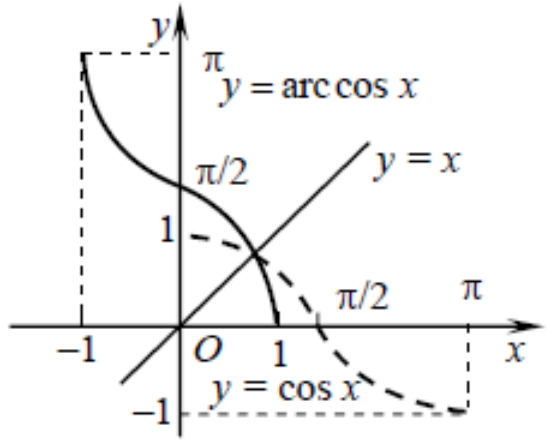
Це означає, що кожна точка $M_1(x_0; y_0)$ кривої $y = f(x)$ стане точкою $M_2(y_0; x_0)$ кривої $y = \varphi(x)$. Оскільки в системі координат Oxy точки M_1 і M_2 симетричні відносно прямої $y = x$, то графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ *симетричні відносно бісектриси* першого і третього координатних кутів (рис. В).



В

Приклади





З означення оберненої функції випливає, що функція $y = \varphi(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ має обернену тоді і тільки тоді, коли ця функція задає взаємно однозначну відповідність між множинами X і Y. Таку властивість мають, зокрема, зростаючі функції, оскільки для них $(x_1<x_2) \Leftrightarrow (y_1< y_2)$, і спадні функції, тому що для них $(x_1>x_2) \Leftrightarrow (y_1> y_2)$. Звідси випливає, що будь-яка строго монотонна функція має обернену функцію. При цьому, якщо пряма функція строго зростає (спадає), то обернена їй функція також строго зростає (спадає).

Зазначимо без доведення, що коли функція $y = f(x)$ зростає (спадає) і неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона має обернену функцію, яка зростає (спадає) і неперервна на відрізку $[f(a); f(b)]$ ($[f(b); f(a)]$).

Неявно задані функції

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y, то кажуть, що функція задана у *явній формі* або є *явною*.

Означення Під *неявним* заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної.

Це рівняння задає функцію лише тоді, коли множина впорядкованих пар чисел (x, y), які є розв'язком даного рівняння, така, що будь-якому числу x_0 у

цій множині відповідає не більше однієї пари (x_0, y_0) з першим елементом x_0.

Довільну явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $f(x) - y = 0$, але не навпаки. Тому неявна форма запису функції більш загальна, ніж явна.

Неявно задану функцію називають *неявною*.

Зауважимо, що терміни «явна функція» і «неявна функція» характеризують не природу функції, а аналітичний спосіб її задання.