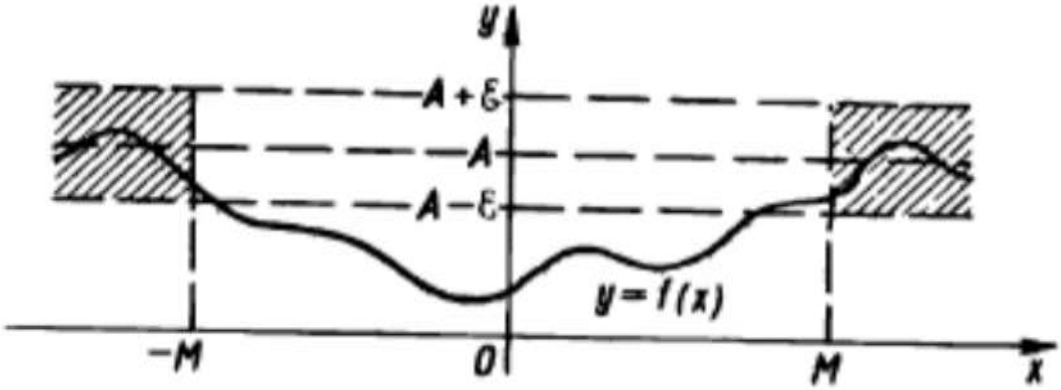
## Лекція 15 Границі Функції

Означення послідовності і її границі були введені з метою спрощення сприйняття поняттів функції і границі функції. Так як в загальному випадку послідовність це одновимірний випадок функції, нагадаємо, геометрично послідовность зображується числовою віссю. Тому більшість визначень, понять і теорем введених для послідовностей можуть бути використані або повністю перенесені на функції.

### 15.1 Границя функції при $x \to \infty$

Поняття границі функції є узагальненням поняття границі послідовності, так як границю послідовності можна розглядати, як границю функції целочисленного аргументу $n$, тобто $x_n = f(n)$.

Тоді, аналогічно границі послідовності, має місце наступне означення границі функції $y = f(x)$ яка визначена на проміжку $\forall x \in (-\infty; +\infty)$:




**Означення 1** Число $A$ називають границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$ і пишуть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, якщо для довільного дійсного, як завгодно малого додатнього числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що $\forall x \in |x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

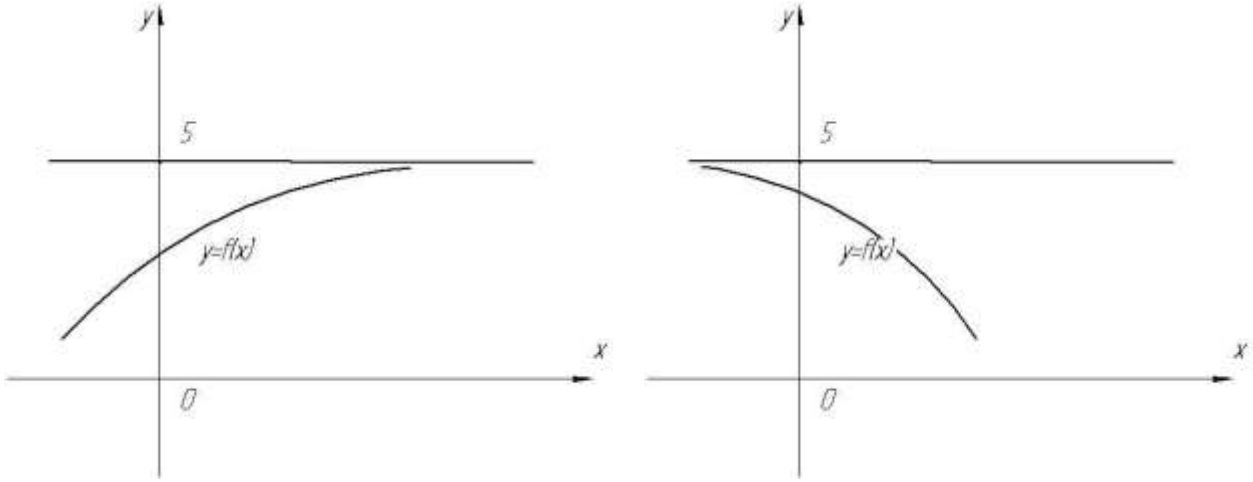
Геометричний сенсе цього означення є наступний: график функції $f(x)$ наближається до прямій $y = A$ (значення функції є в заданному інтервалі $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ ) коли аргумент функції прямує до нескінченності $x \to \infty$ (рис.)

При цьому випадки коли аргумент функції прямує до нескінченності $x \to \pm\infty$ можуть відрізнятися один від іншого. Тому є сенсе у двух інших

означеннях:

**Означення 1.1** Число $A$ називають границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty$ і пишуть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, якщо для довільного дійсного як завгодно малого додатнього числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $\forall x \in x > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

**Означення 1.2** Число $A$ називають границею функції $f(x)$ при $x \to -\infty$ і пишуть $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, якщо для довільного дійсного як завгодно малого додатнього числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $\forall x \in x < -M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.




### 15.2 Границя функції у точці

Припустимо тепер, що незалежна змінна $x$ деякої функції $y = f(x)$ має границю $a$, тобто $x \to a$. Розглянемо поведінку функції $y = f(x)$ при $x \to a$ або у точці $a$.

**Означення 2.** (Означення Гєйне) Число $A$ називають *границею функції* $f(x)$ при $x \to a$ і пишуть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, якщо функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки $a$, окрім, можливо, самої цієї точки $a$, і для будь якої послідовності значень аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ яка прямує до числа $a$, тобто має границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ при цьому $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, відповідна

послідовність значень функції $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, …, $y_n = f(x_n)$, … має границю $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

або

$$f(x_n) \to A, n \to \infty, \text{ якщо } \forall x_n \in D_f: x_n \to a, n \to \infty$$

Це означення називають означенням границі функції «*на мові послідовностей*».

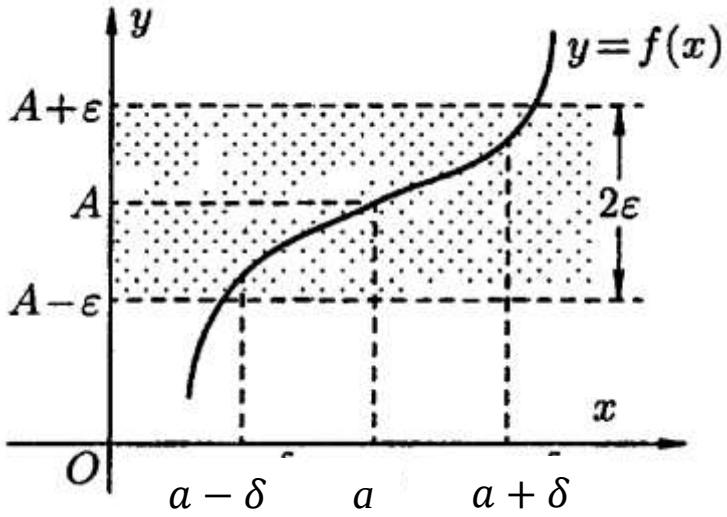
**Означення 3.** (Означення Коши - означення за допомогою ε-δ-окілов) Число $A$ називають *границею функції* $f(x)$ при $x \to a$ і пишуть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, якщо функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки $a$, окрім, можливо, самої цієї точки $a$, і для будь якого довільного дійсного як завгодно малого додатнього числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що

$$\forall x \in 0 < |x - a| < \delta$$

виконується нерівність для функції $f(x)$ така що

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тут умова $0 < |x - a|$ відповідає сітуації, коли $x \neq a$.

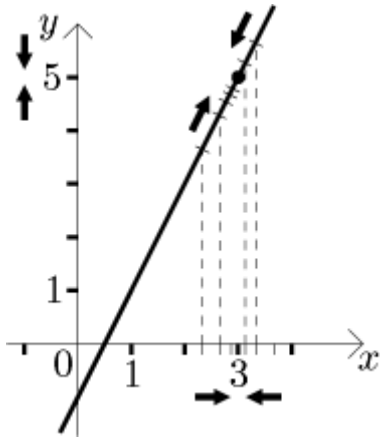



*Геометрична ілюстрація* цього означення є наступною (рис):

Число $A$ називають *границею функції* $f(x)$ при $x \to a$ якщо для будь-якого $\varepsilon$ −околу точки $A$ можна знайти такий окіл точки $a$, що коли значення аргументу $x$ функції $f(x)$ взято з виколотого $\delta$ −околу точки $a$ $(a - \delta, a + \delta)$, то значення функції $f(x)$ належить $\varepsilon$ −околу $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

*Зауваження.* Означення 2 та 3 еквівалентні. Це означає що якщо число $A$ є границею функції в точці $a$ в сенсі означення Гєйне, то число $A$ є також границею $f(x)$ в точці $a$ і в сенсі означення Коши та навпаки.

*Приклад.* Розглянемо функцію $f(x) = 2x - 1$ і точку $a = 3$. Коли ми підставляємо значення $x$, близькі до $a = 3$, результати будуть близькі до 5. Чим ближче $x$ до 3, тим ближче $f(x)$ дорівнює 5. Інш. словами, якщо ми помістимо повзунок на вісь $x$, почнемо переміщати його до $a$ (з обох боків) і подивимося, що роблять відповідні значення $f(x)$, ми побачимо, що вони рухаються до 5 .




Така поведінка описується словами «$f(x)$ збігається до 5, коли $x$ прямує до 3», або що «5 є границею $f(x)$, коли $x$ прямує до 3».

### 15.3 Властивості границь функції

Властивості границь функції є такими ж, як і властивості границь числової послідовності. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають кінцеві границі $A$ і $B$ відповідно при $x \to a$ (де $a$ – число або $\pm\infty$), тоді наступні теореми справедливі:

**Теорема 1.** $\lim\limits_{x\to a} C = C$, де $C$ - стала

**Теорема 2.** $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$

**Теорема 3.** $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

*Наслідок*. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot C) = C \lim\limits_{x\to a} f(x)$, де $C$ - стала

**Теорема 4.** $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B\neq 0$

**Теорема 5.** $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=A^B$

*Наслідок*. $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=\left(\lim\limits_{x\to a}(f(x))\right)^{\alpha}=A^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

**Теорема 6.** Якщо функція $f(x)$ при $x\to a$ має границю $A$ і приймає невід'ємні значення ($f(x)\geq 0$) в околі точки $x=a$ (або $x\to\pm\infty$), то і $A$ буде невід'ємним числом ($A\geq 0$).

**Доведення.** Нехай, навпаки, $A<0$. Тоді, враховуючи, що $A$ – границя функції, з **деякого моменту** повинна виконуватись нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$ (тобто $|f(x)-A|\to 0$). А з іншого боку $|f(x)-A|\geq|A|$ – тобто модуль різниці $|f(x)-A|$ більше числа $|A|$. Це значить, що різниця $f(x)-A$ не прямує до $A$. Це суперечить умові теореми. Отже, $A\geq 0$.

Аналогічно можна девести що коли $f(x)\to A$ і $f(x)\leq 0$, то $A\leq 0$. Так само якщо $f(x)>0$, то $A>0$, або якщо $f(x)<0$, $A<0$ в околі точки $x=a$ (або $x\to\pm\infty$).

**Теорема 7.** Якщо між відповідними значеннями функцій $f(x)$ і $g(x)$, які мають границі (при $x\to a$ або $x\to\pm\infty$), виконується нерівність $f(x)\leq g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq\lim\limits_{x\to a} g(x)$

*Доведення*: За умовою теореми $f(x)\leq g(x)$ або $f(x)-g(x)\leq 0$. Тоді за теоремою 6 маємо

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))\leq 0 \text{ або } \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)\leq 0$$

і нарешті

$$\lim_{x\to a} f(x)\leq\lim_{x\to a} g(x)$$

**Теорема 8.** Якщо $g(x)\leq f(x)\leq u(x)$ в околі точки $x=a$ та $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} u(x)=A$, то також $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

**Означення.** Функція $f(x)$ називається *обмеженою* в околі точки $x = a$, якщо існує таке дійсне додатне число $\mathrm{M} > 0$, що $|f(x)| < M$ в околі точки $x = a$.

**Теорема 9.** Якщо функція $f(x)$ має скінчену границю при $\mathrm{x} \to a$, то вона *обмежена* в околі точки $\mathrm{x} = a$.

### 15.4 Нескінченно великі функції

***Означення* 1.** Функція $f(x)$ буде нескінченно великою величиною при $x \to a$ (або $x$ прямує до $a$, де $a$ – число або $\pm\infty$), якщо для будь-якого додатного числа $\mathrm{M} > 0$, котре може бути як завгодно великим, можна знайти таке $\delta(\mathrm{M}) > 0$, що для всіх значень $x$ відмінних від $a$, що задовольняють умові $0 < |x - a| < \delta$, має місце нерівність $|f(x)| > M$. В цьому випадку пишуть

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

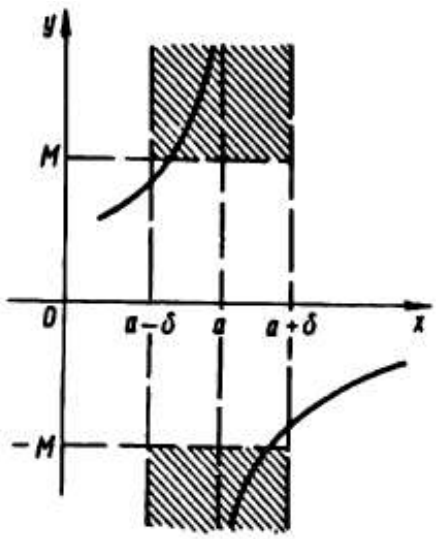
При цьому існують випадки при $x \to a$ функція прямує або тільки до від'ємної або тільки до додатньої нескінченності:

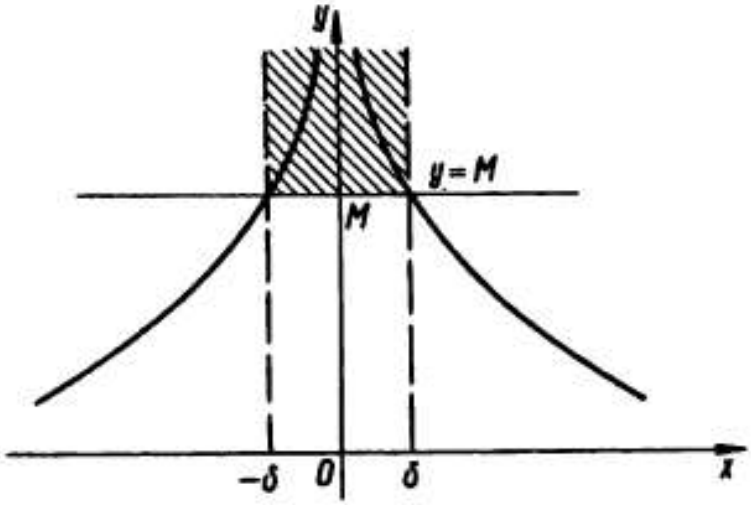
**Означення 1.1** Функція $f(x)$ буде нескінченно великою додатньою величиною при $x \to a$ (де $a$ – число або $\pm\infty$), якщо для будь-якого додатного числа $\mathrm{M} > 0$, котре може бути як завгодно великим, можна знайти таке $\delta(\mathrm{M}) > 0$, що для всіх значень $x$ відмінних від $a$, що задовольняють умові $0 < |x - a| < \delta$, має місце нерівність $f(x) > M$. В цьому випадку пишуть

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

**Означення 1.2** Функція $f(x)$ буде нескінченно великою відємною величиною при $x \to a$ (де $a$ – число або $\pm\infty$), якщо для будь-якого додатного числа $\mathrm{M} > 0$, котре може бути як завгодно великим, можна знайти таке $\delta(\mathrm{M}) > 0$, що для всіх значень $x$ відмінних від $a$, що задовольняють умові $0 < |x - a| < \delta$, має місце нерівність $f(x) < -M$. В цьому випадку пишуть

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$




**Означення 2** Функція $f(x)$ буде нескінченно великою величиною при $x \to \infty$, якщо для будь-якого додатного числа $M > 0$, котре може бути як завгодно великим, можна знайти таке $N(M) > 0$, що для всіх значень $x$ що задовольняють умові $|x| > N$, має місце нерівність $|f(x)| > M$. В цьому випадку пишуть

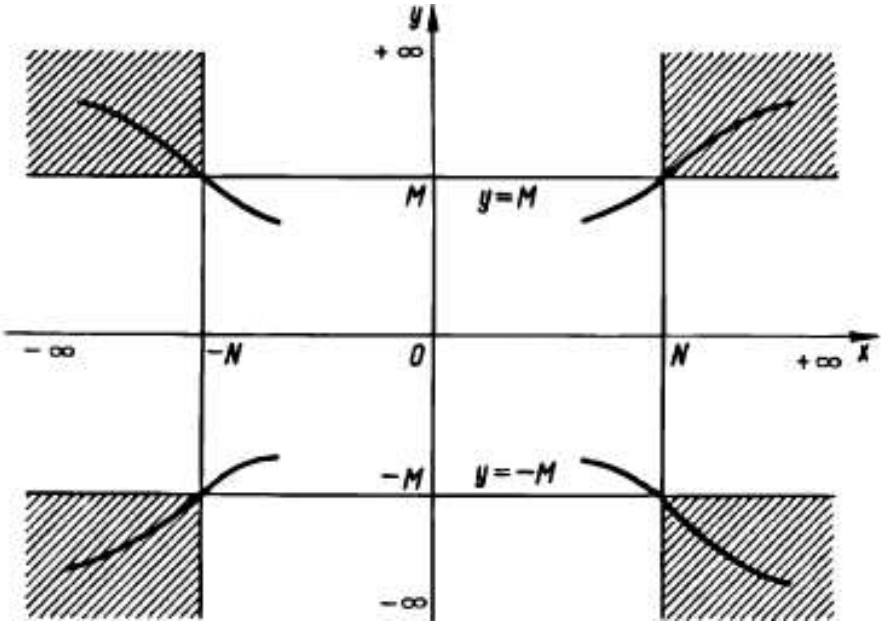
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Узагальнення означення щодо нескінченно великою функції $f(x)$ наступне:

**Означення 3** Функція $f(x)$ буде нескінченно великою величиною при $x \to a$, де $a$ – або число, або один з символів: $\infty$, $+\infty$, $-\infty$ якщо існує границя:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

де $A$ – один з символів: $\infty$, $+\infty$, $-\infty$



### 15.5 Нескінченно малі функції

**Означення.** Функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою, коли $x \to a$, якщо для будь-якого для будь якого довільного дійсного як завгодно малого додатнього числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що що для усіх $x$, які $\forall x \in 0 < |x - a| < \delta$

виконується нерівність для функції $f(x)$ така що

$$|f(x)| < \varepsilon$$

Цей факт можна записати так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Аналогічне означення можна сформулювати і для випадку коли $x$ прямує до нескінченності, $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

**Теорема 1** Для того, щоб число $A$ було границею функції $y = f(x)$ при $x \to a$ (або $x \to \infty$) необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - \mathrm{A}$ була нескінченно малою функцією. Тобто якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, (\text{або} \lim_{x \to \infty} f(x) = A)$$

то

$$f(x) - A = \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція, $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$ (або $\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$).

Навпаки теж вірно, якщо функція $y = f(x)$ зображується у вигляді суми сталого числа $A$ і нескінченно малої $\alpha(x)$ (при $x \to a$ або $x \to \infty$) $f(x) = A + \alpha(x)$ то $\lim_{x \to a} f(x) = A$ (або $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$).

**Теорема 2** (Звязок між нескінченно малими та великими функціями) Якщо функція $\alpha(x)$ – *нескінченно мала величина* при $x \to a$ (або $x \to \pm\infty$), така що $\alpha(x) \neq 0$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є *нескінченно великою величиною* при $x \to a$ (або $x \to \pm\infty$), і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ – *нескінченно велика величина* при

$x \to a$ (або $x \to \pm\infty$), то $\frac{1}{\beta(x)}$ є *нескінченно малою величиною* при $x \to a$ (або $x \to \pm\infty$).

*Властивості нескінченно малих функцій*

1. Сума скінченого числа нескінченно малих функцій при $x \to a$ (або $x \to \pm\infty$) є *нескінченно мала функція*.

**Доведення.** Проведемо доведення для двох функцій.

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі, коли $x \to x_0$ (або $x \to \infty$). Доведемо, що їх сума $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ буде теж нескінченно малою функцією при $x \to x_0$.

Оскільки $\alpha(x)$ нескінченно мала функція, то для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ знайдеться таке число $\delta_1 > 0$, що як тільки $|x - x_0| < \delta_1$ буде виконуватись нерівність $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогічно для $\beta(x)$ знайдеться таке число $\delta_2$, що, як тільки $|x - x_0| < \delta_2$, буде виконуватись нерівність $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Знайдемо $\min\{\delta_1, \delta_2\}$ і позначимо його через $\delta$. Тоді, як тільки $|x - x_0| < \delta$, будуть виконуватись водночас дві нерівності: $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отже,

$$|\gamma(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто $|\gamma(x)| < \varepsilon$ і тому $\gamma(x)$ – нескінченно мала функція.

2. Добуток нескінченно малої функції $\alpha$(x) на *обмежену функцію* $f$ $(x)$ при $x \to a$ (або $x \to \pm\infty$) є *нескінченно мала функція*.

**Доведення.** Якщо $f(x)$ обмежена, коли $x \to x_0$, то знайдеться такий окіл точки $x_0$, в якому $|f(x)| < M$. Якщо $\alpha(x)$ нескінченно мала функція при $x \to x_0$, то за означенням для всякого $\varepsilon > 0$ знайдеться окіл точки $x_0$, в якому буде виконуватись нерівність $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Тоді

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Отже, $\alpha(x) \cdot f(x)$ – нескінченно мала функція.

*Наслідок* Оскільки будь-яка н. м. ф. обмежена, то з теореми 2 випливає, що добуток двох н. м. ф. є функцією н. м., але має більший порядок малості ніж кожна н.м. функція у добутку

3. Добуток нескінченно малої функції на сталу є *нескінченно малою функцією* при $x \to a$.

4. Частка від ділення нескінченно малої функції при $x \to a$ на функцію, границя якої не дорівнює нулю при $x \to a$ є *нескінченно малою функцією* при $x \to a$.

**Приклади на знаходження границь функції**

**Приклад.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\sin\frac{x}{2}+\cos x\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin\frac{x}{2}+\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

**Приклад.** $\lim\limits_{x\to-2}\left[3^x\cdot x^2\right]=\lim\limits_{x\to-2}3^x\cdot\lim\limits_{x\to-2}x^2=3^{-2}\cdot(-2)^2=\frac{4}{9}$

**Приклад.** $\lim\limits_{x\to4}(8\cdot\sqrt{x})=8\cdot\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=16$

**Приклад.** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3-4x}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(3-4x)}{\lim\limits_{x\to-1}(x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}3-4\lim\limits_{x\to-1}x}{\lim\limits_{x\to-1}x-\lim\limits_{x\to-1}1}=\frac{3-4\cdot(-1)}{(-1)-1}=-\frac{7}{2}$

## 15.6 Невизначені вирази і їх розкриття

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають кінцеві границі $A$ і $B$ відповідно при $x \to a$ (де $a$ – число або $\pm\infty$). Якщо у дробі $\frac{f(x)}{g(x)}$ чисельник і знаменник прямують до нуля, то маї місце *невизначенність виду* $\left\|\frac{0}{0}\right\|$. Відшукання границі такого дробу, або встановлення її відсутності, називається *розкриттям невизначеності*.

Крім невизначеності $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ існує ще шість видів невизначеностей:

$$\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|,\ \|0\cdot\infty\|,\ \|\infty-\infty\|,\ \|1^{\infty}\|,\ \|0^0\|,\ \|\infty^0\|$$

*15.6.1 Невизначені вирази* $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ *і їх розкриття*

*Приклад 1.* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}=\left\|\frac{2^2-6\cdot 2+8}{2^2-8\cdot 2+12}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|$

Для знаходження цієї границі розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу,

$x^2 - 6x + 8 = 0;$ $\qquad$ $x^2 - 8x + 12 = 0;$

$D = 36 - 32 = 4;$ $\qquad$ $D = 64 - 48 = 16;$

$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$ $\qquad$ $x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$

$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$ $\qquad$ $x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$

Тоді

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-4)}{\cancel{(x-2)}(x-6)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

*Правило*. Щоб розкрити невизначеність виду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, яка задана відношенням двох многочленів (при умові $x\to a$), потрібно в чисельнику і знаменнику дробу вилучити «*критичний множник*» $(x-\mathrm{a})$ і скоротити на нього.

*Приклад 2.* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}==\left\|\frac{1^3-6\cdot 1^2+11\cdot 1-6}{1^2-3\cdot 1+2}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники, де *критичний множник* - $(x-1)$ :

$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, т.к.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2} & x^2 - 5x + 6 \\
\;\; - 5x^2 + 11x & \\
\;\; \underline{- 5x^2 + 5x} & \\
\qquad\qquad 6x - 6 & \\
\qquad\qquad \underline{6x - 6} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Де, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Тоді,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x-2)}=-2$$

*Приклад 3.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x^2-x}==\left\|\frac{\sqrt{1+0+0^2}-\sqrt{1-0+0^2}}{0^2-0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|$

Помножимо чисельник і знаменник дробу на поєднаний вираз: $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1$$

*Правило*. Щоб розкрити невизначеність $\|\frac{0}{0}\|$, в якій є ірраціональний вираз, потрібно відповідним образом звільнитись від ірраціональності.

*Приклад 4.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{У чисельнику застосуємо формулу}\\ (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3.\\ \text{Нехай } \sqrt[3]{8-x}-2=a-b.\text{ Тоді домножимо}\\ \text{чисельник і відповідно знаменник}\\ \text{на } a^2+ab+b^2=\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\\ \text{і одержимо різницю кубів } a^3-b^3=(8-x)-2^3\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{8-x}-2\right)\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}{x\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^3-2^3}{x\cdot\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8-x-8}{x\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4}=-\frac{1}{2^2+2\cdot 2+4}=-\frac{1}{12}.$$

### *15.6.2 Невизначені вирази $\|\frac{\infty}{\infty}\|$ і їх розкриття*

Наведемо формулу для розкриття невизначеності $\|\frac{\infty}{\infty}\|$, яка аналогічна формулі для послідовностей:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{якщо} \quad k=m;\\ \infty, & \text{якщо} \quad k>m;\\ 0, & \text{якщо} \quad k<m.\end{cases}$$

*Приклад* 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+x^3-5}{1+3x^2-5x-4x^3}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$

Зазначимо, що це правило можна застосовувати і для ірраціональних функцій, аби тільки в прикладі була невизначеність $\|\frac{\infty}{\infty}\|$.

*Приклад* 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+x^3-1}}{x^2+2x}$.

***Розв'язання.***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+x^3-1}}{x^2+2x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{у цьому випадку } \ k=2, \text{ тому розділимо}\\ \text{чисельник і знаменник на } x^2\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^4+x^3-1}}{x^2}}{\frac{x^2+2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^4+x^3-1}{x^4}}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}}}{1+\frac{2}{x}}=1.$$

*Приклад* 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-2x+7}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x\cdot\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-2x+7}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^{3/2}+3}{x^{3/2}}}{\frac{\sqrt{x^3-2x+7}}{x^{3/2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^{3/2}}}{\sqrt{\frac{x^3-2x+7}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^{3/2}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}}=2$$

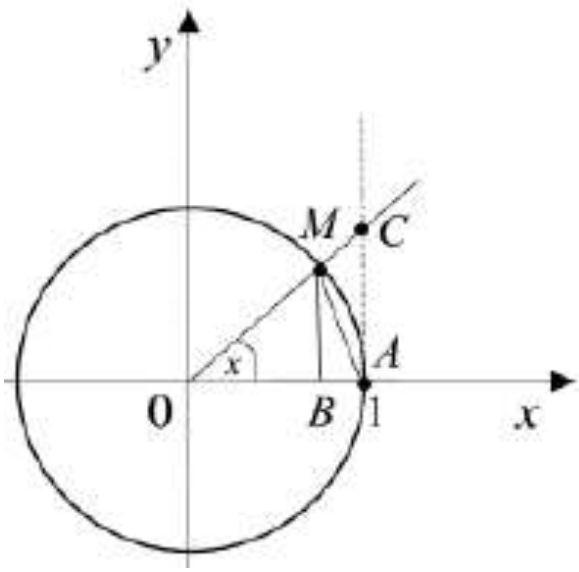
*Зауваження*: випадки відношень двох функцій: $\frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \frac{C}{0}, \frac{0}{C}, \frac{C}{\infty}, \frac{\infty}{C}$ (де $C$ - стала) не є невизначеностями, та мають наступні значення:

$$\frac{0}{\infty}=0;\ \frac{\infty}{0}=\infty;\ \frac{C}{0}=\infty;\ \frac{0}{C}=0;\ \frac{C}{\infty}=0;\ \frac{C}{\infty}=\infty$$

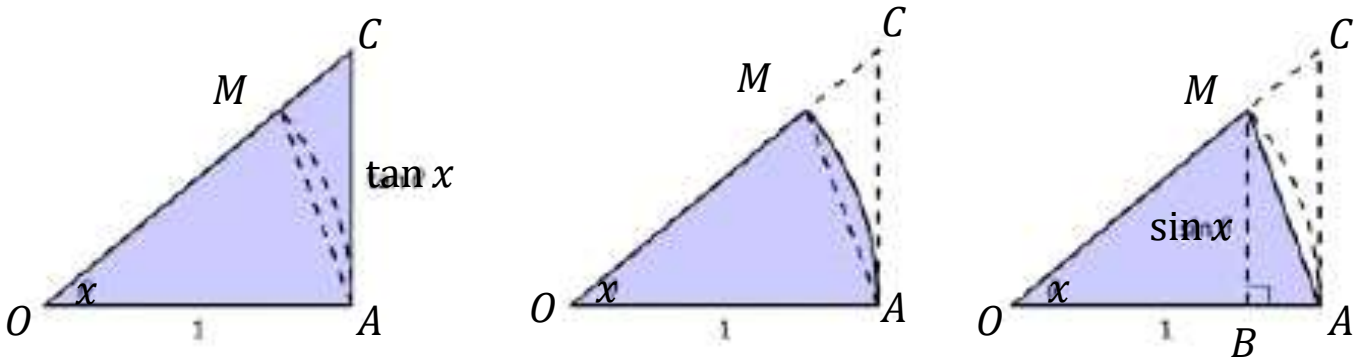
*15.6.3 Тригонометричні невизначеності виду* $\|\frac{0}{0}\|$. *Перша визначна границя.*

Функція $y=\frac{\sin x}{x}$ невизначена при $x\to 0$, оскільки знаменник дробу прямує до

нулю. Знайдемо *границю* цієї функції при $x \to 0$.




На площині $xOy$ побудуємо коло радіуса 1 з центром в точці (0;0), центральний кут AOM і позначимо його величину через $x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$). Проведемо $MB \perp Ox$ і $AC \perp Ox$ . Розглянемо трикутники $AOM$, $AOC$ і сектор $AOM$. З рис. видно, що площа сектору $AOM$ менше ніж площа трикутника $AOC$, але більше ніж площа трикутника $BOM$ , тобто $S_{\Delta AOC} > S_{\text{AOM}} > S_{\Delta \text{AOM}}$.




Знайдемо ці площі:

$$S_{\Delta AOM} = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} OA \cdot OM \sin \angle AOM = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \sin x = \frac{1}{2} \sin x$$

$$S_{AOM} = \frac{1}{2} OA \cdot \overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2} OA \cdot l_{AOM} = \frac{1}{2} 1 \cdot x = \frac{1}{2} x$$

$$S_{\Delta AOM} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} OA \cdot OA \tan \angle AOM = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \tan x = \frac{1}{2} \tan x$$

Тоді

$$\frac{1}{2} \tan x > \frac{1}{2} x > \frac{1}{2} \sin x$$

або

$$\tan x > x > \sin x$$

Так як $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x > 0$. Поділимо всі члени нерівностей на $\sin x$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1$$

або

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ і $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то за теоремою про границю в нерівності

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

*Невизначені вирази* $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ *і їх розкриття за допомогою 1-ої визнавченої границі*

*Приклад 1.* Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$.

***Розв'язання.*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\cos 5x \cdot x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 5x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{\cos 5x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{5}{\cos 5x} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 5x} = 5.$$

*Приклад 2.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \left\{ \begin{array}{c} \text{Скористаємося формулою} \\ 1-\cos 2x = 2\sin^2 x. \end{array} \right\} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x\to 0} 2 \cdot \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{=1} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{=1} = 8.$$

*Приклад 3.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos 5x - \cos 3x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \left\{ \begin{array}{c} \text{В знаменнику скористаємося формулою} \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-2\sin\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-2\sin 4x \cdot \sin x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 4x} \cdot \frac{x}{\sin x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{4x}{4 \cdot \sin 4x} = -\frac{1}{8}.$$

*Приклад 4.*

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \left\{\begin{array}{l}\text{Щоб застосувати першу чудову границю, зробимо заміну} \\ \text{змінної: } x-1=t, \text{ тоді при } x\to 1 \text{ змінна } t \text{ буде прямувати} \\ \text{до нуля: } x=t+1,\ 1-x^2=(1-x)(1+x)=(-t)(1+t+1)= \\ =(-t)(t+2).\end{array}\right\} =$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{\sin[\pi+\pi t]} = \{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\} = -\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{-\sin \pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi}\cdot\underbrace{\frac{\pi\cdot t}{\sin \pi t}}_{=1}\cdot(t+2) = \frac{1}{\pi}\lim_{t\to 0}(t+2) = \frac{2}{\pi}.$$

*15.6.4 Невизначеності виду* $||1^{\infty}||$. *Друга визначна границя.*

Розглянемо числову послідовность: $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$.

Раніше було доведено що границею послідовності є число $e$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Для змінної величини $x$ можна записати

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = ||1^{\infty}|| = e$$

або

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = ||1^{\infty}|| = e$$

Формула називають *другою визначнною границею*.

*Доведення*: Нехай $x \to +\infty$ . Кожне значення $x$ міститься між двома додатними цілими числами: $n \le x < n+1$, де $n = [x]$ – ціла частина $x$. Звідси виходить $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}$. Використовуючи властивості степеня, маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Якщо $x \to +\infty$ , то $n \to \infty$ . Ураховуючи, що границя послідовності $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ відома, знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

За теоремою про границю функції в нерівності отримаємо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

У випадку $x\ \to\ -\infty$, зробимо підстановку $-x\ =\ t$ , тоді

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\ =e\cdot 1=e$$

Таким чином,

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

*Невизначені вирази ‖1∞ ‖ і їх розкриття за допомогою 2-ої чудової границі*

**Приклад.** Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}=\|1^{\infty}\|$

***Розв'язання.*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}=\{1^{\infty}\}=\left\{\begin{matrix}\text{Скористаємося формулою}\\ a^{m+n}=a^{m}\cdot a^{n}\end{matrix}\right\}=$

*Приклад 1.*

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}\right]=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}_{=e}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}}_{=1}=e.$$

*Приклад 2.* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+1}\right)^{x}=\|1^{\infty}\|$

***Розв'язання.*** 1. Переконаємося спочатку, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+1}\right)=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$. Тобто, має місце невизначеність $\|1^{\infty}\|$Перетворимо вираз так, щоб скористатися другою чудовою границею.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+1}\right)^{x}=\|1^{\infty}\|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-3}\cdot\frac{-3}{2x+1}\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3x}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x}{2x+1}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2+\frac{1}{x}}}=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e^{3}}}=\frac{1}{e\cdot\sqrt{e}}.$$

*15.6.5 Інші невизначеності і їх розкриття*

*Приклад 1.*

$$\lim_{x\to-2}\left[\frac{1}{2+x}-\frac{12}{8+x^{3}}\right]=\|\infty-\infty\|=\lim_{x\to-2}\left[\frac{4-2x+x^{2}}{}\Big/\ \frac{1}{2+x}-\frac{12}{8+x^{3}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{4-2x+x^{2}-12}{(2+x)(4-2x+x^{2})}=\lim_{x\to-2}\frac{x^{2}-2x-8}{(2+x)(4-2x+x^{2})}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Вилучимо "критичний}\\ \text{множник"}\quad x+2\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)}(x-4)}{\cancel{(2+x)}(4-2x+x^{2})}=\lim_{x\to-2}\frac{x-4}{4-2x+x^{2}}=$$

$$=\frac{-2-4}{4+4+4}=-\frac{1}{2}.$$

*Приклад 2.*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)=\|\infty-\infty\|=\left\{\begin{matrix}\text{Будемо розглядати задану функцію як дріб із}\\ \text{знаменником, який дорівнює одиниці.}\\ \text{Позбавимося від ірраціональності}\\ \text{в чисельнику шляхом множення чисельника і}\\ \text{знаменника на спряжений множник}\quad \sqrt{x^{2}+1}+x.\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)}{\sqrt{x^{2}+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}+1-x^{2}}{\sqrt{x^{2}+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}+x}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Невизначеності немає;}\\ \text{знаменник прямує до нескінченності.}\end{matrix}\right\}=0.$$

## 15.7 Порівняння нескінченно малих функцій

*Нагадування*: Функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою у точці $x = a$, якщо у цій точці існує границя функції $f(x)$ така що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

Аналогічно можна сформулювати для випадку коли $x$ прямує до нескінченності, тобто функції $f(x)$ нескінченно мала якщо при $x \to \pm\infty$ існує границя функції $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

Дві нескінченно малі функції *порівнюються* між собою за допомогою дослідження їхнього відношення.

Нехай $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ — нескінченно малі функції при $x \to a$, тобто $\lim\limits_{x \to a} \alpha_1(x) = 0$ і $\lim\limits_{x \to a} \alpha_2(x) = 0$.

Введемо наступні *означення*:

1) функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються нескінченно малими *одного порядку* (малості) при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0, A \in \mathbb{R};$$

2) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою *вищого порядку* (малості) ніж $\alpha_2(x)$ при $x \to a$, позначається $\alpha_1(x) = o(\alpha_2(x))$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$

3) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою *нижчого порядку* (малості) ніж $\alpha_2(x)$ при $x \to a$, позначається $\alpha_2(x) = o(\alpha_1(x))$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty$

4) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою *$k$-го порядку відносно* $\alpha_2(x)$ при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{[\alpha_2(x)]^k} = A \neq 0, A \in \mathbb{R};$$

5) нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються *непорівнянними* при $x \to a$, якщо в точці $a$ не існує границі їхнього відношення.

Введені означення охоплюють усі випадки, які можуть трапитись при порівнянні двох нескінченно малих функцій в околі точки $a$.

*Зауваження*: Такі самі правила порівняння нескінченно малих при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Аналогічно порівнюються нескінченно великі величини.

*Нагадування*: Функція $y = f(x)$ називається нескінченно великою у точці $x = a$, якщо у цій точці існує границя функції $f(x)$ така що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Аналогічно можна сформулювати для випадку коли $x$ прямує до нескінченності, тобто функції $f(x)$ нескінченно велика якщо при $x \to \pm\infty$ існує границя функції $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

*Приклади порівняння нескінченно малих функцій*

*Приклад 1.*

*Функції* $\alpha_1(x) = x$, $\alpha_2(x) = tg\, 7x$ *нескінченно малі одного порядку при* $x \to 0$, *тому що*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{tg\, 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{7x}{7tg\, 7x} = \frac{1}{7} \lim_{x \to 0} \frac{7x}{tg\, 7x} = \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}.$$

*Приклад 2.*

2. *Функція* $\alpha_1(x) = x^3$ *при* $x \to 0$ *є нескінченно малою вищого порядку, ніж функція* $\alpha_2(x) = \sin x$, *тому що*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0$$

*Очевидно, функція* $\alpha_2(x) = \sin x$ *при* $x \to 0$ *є нескінченно малою нижчого порядку, ніж* $\alpha_1(x) = x^3$.

*Еквівалентні нескінчено малі функції*

Серед нескінченно малих функцій одного порядку особливу роль відіграють так звані *еквівалентні нескінченно малі*.

**Означення:** Функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються нескінченно малими *еквівалентними* при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$$

Еквівалентність позначається як

$$\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x).$$

Розглянемо деякі *властивості еквівалентних* нескінченно малих функцій.

**Теорема 1.** Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ *еквівалентні* при при $x \to a$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha_1(x)$ - $\alpha_2(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.

**Теорема 2.** *Сума* скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна *доданку нижчого порядку*

Наприклад, при $x \to 0$ вираз $2x + 3x^2 + 10\,x^3 \sim 2x$

**Теорема 3.** Нехай $\alpha_1(x) \sim \hat{\alpha}_1(x)$ та $\alpha_2(x) \sim \hat{\alpha}_2(x)$ при $x \to a$. Якщо існує $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x \to a} \frac{\hat{\alpha}_1(x)}{\hat{\alpha}_2(x)}$ і ці границі рівні між собою:

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\hat{\alpha}_1(x)}{\hat{\alpha}_2(x)}$$

Ця теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожну з них (або тільки одну) заміняти іншою нескінченною малою, яка еквівалентна заданій.

*Таблиця еквівалентних нескінчено малих функцій*

Часто зустрічаються, наступні еквівалентні нескінченно малі величини, які можно виділити у окрему таблицю:

| | |
|---|---|
| $\sin\alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$ | $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$ |
| $tg\,\alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$ | $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a, \quad \alpha \to 0;$ |
| $\arcsin\alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$ | $\log_a(1+\alpha) \sim \alpha \log_a e, \quad \alpha \to 0;$ |
| $arctg\,\alpha \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$ | $\ln(1+\alpha) \sim \alpha, \quad \alpha \to 0;$ |
| $1 - \cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \quad \alpha \to 0;$ | $(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha, \quad \alpha \to 0, \ k > 0$ |

Тут $\alpha$ – будь-яка нескінчено мала, тобто якщо вираз $(x-a) \to 0$, де $a$ – стала, то $\alpha = (x-a) \to 0$ тобто

$$\sin(x-a) \sim (x-a)$$

также само всі інші вирази.

*Приклади використання таблиці нескінченно малих функцій*

**Приклади.** 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\,9x}{\sin 3x}$.

Розв'язання. Оскільки $tg\,9x \sim 9x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то за теоремою 2 дістанемо

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,9x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{9x}{3x} = \frac{9}{3} = 3.$$

*Приклад 2.*

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 5} \frac{arctg\,(x-5)}{x^2-7x+10}$.

Розв'язання. Оскільки $arctg\,(x-5) \sim x-5$ при $x \to 5$ та $x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$, то

$$\lim_{x\to 5} \frac{arctg\,(x-5)}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)(x-2)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}.$$

*Приклад 3.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \left\{\begin{matrix} \text{Скористаємося формулою} \\ 1-\cos 2x = 2\sin^2 x. \end{matrix}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0} 2 \cdot \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{=1} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{=1} = 8.$$

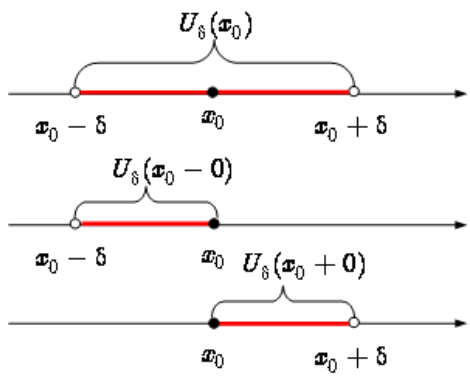
*Приклад 4.*

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \left\{\begin{array}{l}\text{Щоб застосувати першу чудову границю, зробимо заміну} \\ \text{змінної: } x-1=t, \text{ тоді при } x\to 1 \text{ змінна } t \text{ буде прямувати} \\ \text{до нуля: } x=t+1,\ 1-x^2=(1-x)(1+x)=(-t)(1+t+1)= \\ =(-t)(t+2).\end{array}\right\} =$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{\sin[\pi+\pi t]} = \{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\} = -\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{-\sin \pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi}\cdot\underbrace{\frac{\pi\cdot t}{\sin \pi t}}_{=1}\cdot(t+2) = \frac{1}{\pi}\lim_{t\to 0}(t+2) = \frac{2}{\pi}.$$

### 15.7 Однобічні границі

**Означення:** Число $A$ називають *правою* (*лівою*) границею функції $y = f(x)$ в точці $x_0$, якщо для довільного дійсного як завгодно малого додатнього числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $\forall x \in x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$ виконується нерівність




$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Такі границі звуться - *однобічні* та позначається як

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A \text{ - права границя}$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \text{ - ліва границя}$$

*Приклад знаходження однобічних границь*

Знайдімо однобічні границі функції:

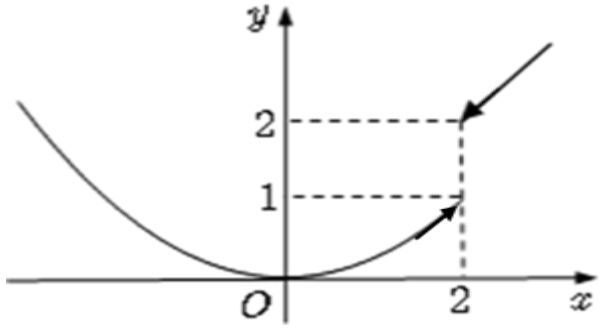
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & x \in (-\infty; 2], \\ x, & x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

у точці $x_0 = 2$

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}\frac{x^2}{4} = 1;$$

$$f(2+0) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} x = 2.$$

Оскільки однобічні границі існують, але не рівні між собою, в точці функція границі не має, як показано на рис.


y
2
1
O
2
x