Лекція 16 Неперервність функції

16.1 Неперервність функції у точці

З поняттям границі функції тісно пов’язано і інше важливе поняття математичного аналізу – поняття *неперервності функції*. Це поняття функції математично відображає характерну рису багатьох явищ, про які можна сказати що вони відбуваються неперервно.

Геометричне поняття неперервності функції пов’язано з графіком функції: функція вважається неперервною, якщо її графік можна провести лінією, не відриваючи олівця від паперу.

Що ж станеться, якщо зробити в якійсь точці "*прокол*"? Тоді перпендикуляр, проведений з цієї точки на ось абсцис, не перетне графіка функції, що рівносильно відсутності значення функції в цій точці. Отже *перший висновок*: неперервна функція повинна мати значення в точці.

Нехай тепер, підходячи до точки з різних сторін, ми залишаємось на "різних рівнях". І в цьому випадку, переходячи через точкуми відриваємо олівець від паперу.

Раніше говорилось, що для існування границі функції в точці необхідно і достатньо, щоб існували обидві односторонні границі, рівні між собою. Таким чином, для неперервності функції необхідно, щоб в точці існувала границя. Якщо значення функції в точці не співпадатиме з її границею, то функція теж не буде неперервною. Тому зрозумілі умови, які повинні виконуватись для неперервності функції в точці.

Означення 1.1 Функція $f(\mathrm{x})$ називається неперервною в точці $x = x_0$, якщо:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому її околі, тобто існує значення $f(x_0)$;

2) існує границя функції в точці $x = x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(\mathrm{x}) = A$;

3) і ця границя дорівнює $A = f(x_0)$.

Тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(\mathrm{x}) = f(x_0)$$

Останнє рівняння можно переписати у вигляд

$$x \to x_0 \Rightarrow x - x_0 \to 0 \text{ або } \Delta x \to 0$$

Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

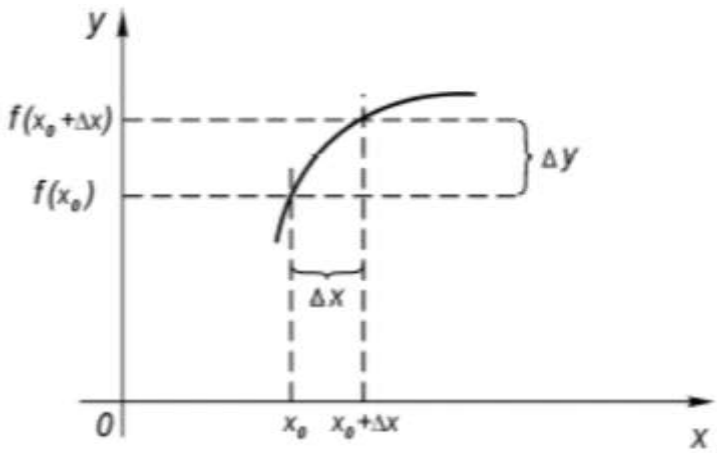
Отримана рівність є ще одним визначенням неперервності функції в точці:

Означення 1.2 Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_0$, якщо:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому її околі;

2) існує границя приросту функції Δy, коли $\Delta x \to 0$ (приріст аргументу прямує до нуля): $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$;

3) і ця границя дорівнює нулю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.



Геометрично неперервність функції в даній точці означає, що різниця ординат графіку функції $y = f(x)$ в точках $x_0 + \Delta x$ і x_0 приріст функції Δy буде за абсолютною величиною довільно малою, якщо тільки Δx буде достатньо малим.

Для неперервної функції в даній точці $\lim\limits_{x \to x_0} f(\mathrm{x}) = f(x_0)$ можна записати

$$\lim_{x \to x_0} f(\mathrm{x}) = f\left(\lim_{x \to x_0} (\mathrm{x})\right)$$

Властивості функцій, неперервних у точці

Теорема. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є неперервними в точці x_0, тоді неперервними в цій точці будуть також функції:

1) $y_1(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, $\forall \alpha, \beta \in R$;

2)$y_2(x) = f(x) \cdot g(x)$;

3) $y_3(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ за додаткової умови $g(x) \neq 0$;.

Доведення. Нехай функції $f\,(x)$ і $g\,(x)$ - неперервні в точці x_0. Тоді, за означенням функцій, неперервних у точці, $\lim\limits_{x \to x_0} f(\mathrm{x}) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(\mathrm{x}) = g(x)$. Використаємо теореми про арифметичні операції над функціями, що мають границю:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} y_1(x) = \alpha \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \beta \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \alpha \cdot f(x_0) + \beta \cdot g(x_0) = y_1(x_0)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} y_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) = y_2(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} y_3(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = y_3(x_0)$.

Бачимо, що означення виконується в кожному з цих випадків. Тобто ми показали, що при виконанні арифметичних дій над неперервними функціями ми знову отримаємо неперервні функції.

Теорема. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $f\big(\varphi(x)\big) = F(x)$ неперервна в точці x_0.

Доведення. Справді, оскільки функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(\mathrm{x}) = \varphi(x_0) = u_0$; $f(u)$ - неперервна в точці u_0, тому $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)\,) = F(x_0)$. А це означає, що функція $f\big(\varphi(x)\big) = F(x)$ неперервна в точці x_0.

Теорема (Необхідна і достатня умови існування скінченної границі): Функція $y = f(x)$ має границю в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують права й ліва границі і вони рівні між собою, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(\mathrm{x}) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 + 0} f(\mathrm{x}) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(\mathrm{x}) = A$$

Доведення. <u>*Необхідна умова*</u>*:* Оскільки функція $f(x)$ в точці x_0 неперервна, то за означенням $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, але якщо існує границя, то існує і ліва і права границі.

<u>*Достатня умова*</u>*:* Необхідно довести, що для довільного додатного $\varepsilon > 0$, знайдеться таке додатне $\delta > 0$, що для всіх $|x - x_0| < \delta$ виконується $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

За умовою $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$. Це означає, що для довільного додатного ε знайдеться δ_1 таке, що для $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ виконується $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Крім того, дано, що $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Це означає, що для довільного додатного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке додатне δ_2, що для $x_0 < x < x_0 + \delta_2$ виконується $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

З двох чисел δ_1 та δ_2 виберемо найменше і позначимо через $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Тоді, як тільки $|x - x_0| < \delta$ то x потрапить або в $x_0 - \delta_1 < x < x_0$, або в $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, але для обох δ виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Це означає, що функція неперервна.

Теорему доведено. ■

Вірно й обернене твердження: коли в точці існують права й ліва границі функції $y = f(x)$ і вони рівні між собою, то функція має границю в цій точці що дорівнює однобічній границі

Оскільки основні елементарні функції неперервні в усіх точках, у яких вони визначені, то з наведених вище теорем випливає: будь-яка *елементарна функція неперервна в усіх точках, що належать її області визначення*.

Цей важливий результат дозволяє легко знаходити границю елементарної функції, якщо функція визначена в точці $x = x_0$. Наприклад,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} 3^{\tan x} = 3^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x} = 3^{\tan \frac{\pi}{4}} = 3^1 = 3$$

Однобічна неперервність функції у точці

Означення 2.1 Функція $y = f(x)$ називається *неперервною зліва* у точці $x = x_0$, якщо:

1) вона визначена в точці x_0 і у деякому лівому півоколі $(x_0 - \Delta x, x_0)$ і існує границя:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(\mathrm{x}) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$$

2) існує границя приросту функції $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \Delta y$, яка дорівнює нулю: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \Delta y = 0$.

Означення 2.2 Функція $y = f(x)$ називається *неперервною справа* у точці $x = x_0$, якщо:

1) вона визначена в точці x_0 і у деякому правому півоколі $(x_0, x_0 + \Delta x)$ і існує границя:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(\mathrm{x}) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

2) існує границя приросту функції $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \Delta y$, яка дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \Delta y = 0.$$

Звідси випливає, що якщо функція $y = f(x)$ *неперервна в точці* x_0, а також зліва і справа, то вона неперервна в цій точці.

Точки, у яких порушується хоча б одна з умов неперервності функції (означення 1.1 - 2.2), називаються *точками розриву*.

16.2 Точки розриву функції

Точками розриву функції називають такі точки, у яких функція $y = f(x)$:

1) або не визначена;

2) або не існує границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(\mathrm{x})$

3) або $\lim\limits_{x \to x_0} f(\mathrm{x}) \neq f(x_0)$

Точки розриву ділять на точки *першого* і *другого* роду.

Означення 3.1 Точка розриву x_0 називається точкою розриву *першого роду*, якщо в цій точці існують обидві скінченні односторонні границі:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = C_1 \text{ – стала,}$$

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = C_2 \text{ – стала}$$

Якщо, крім того, виконується хоча б одна із умов

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq f(x_0),$$

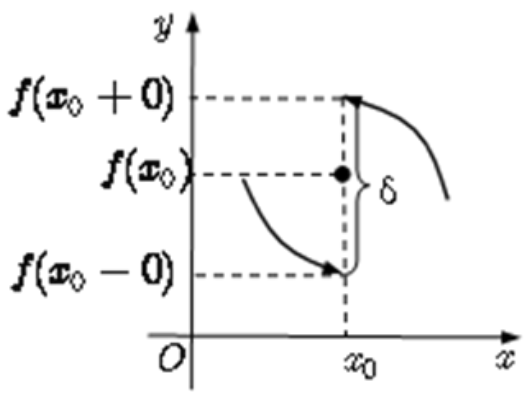
$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) \neq f(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x) \text{ або } f(x_0+0) \neq f(x_0-0),$$

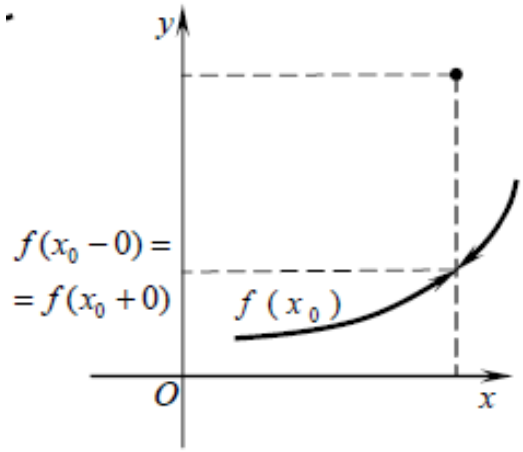
то функція в точці $x = x_0$ має *неусувний розрив першого роду*.

Стрибком функції в точці розриву $x = x_0$ називається різниця її односторонніх границь:

$$\delta = \lim_{x \to x_0+0} f(x) - \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$



Стрибок



Усувний розрив

Якщо границі функції рівні проте не дорівнюють функції в точці $x = x_0$:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$$

то функція в цій точці має *усувний розрив першого роду*.

Означення 3.2 Точка розриву x_0 називається точкою розриву *другого роду*, якщо в цій точці функція $f(x)$ не має принаймні однієї з односторонніх границь, або хоча б одна одностороння границя дорівнює нескінченності.

Правила знаходження точок розриву функції

1) елементарна функція може мати розрив тільки в окремих точках, але не може бути розривною на певному інтервалі;

2) елементарна функція може мати розрив в точці де вона не визначена за умови, що вона буде визначена хоча би з однієї сторони від цієї точки;

3) неелементарна функція може мати розриви як в точках, де вона невизначена, так і в тих, де вона визначена.

Наприклад, якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами (формулами) для різних інтервалів, то на межі стику може бути розривною.

Приклади знаходження точок розриву функції

Приклад 1. Знайти точки розриву функції $y = x/|x|$, дослідити їх характер.

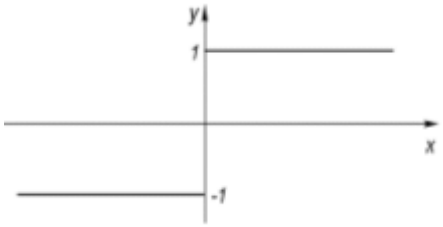
При $x = 0$ функція невизначена. Тому $x = 0$ – точка розриву.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x > 0 \\ -x, & \text{якщо } x < 0 \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}.$$

Легко бачити: $\lim\limits_{x \to 0+0} y(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0-0} y(x) = -1$.

Висновок:

$x = 0$ – точка розриву 1-го роду. Розрив неусувний.



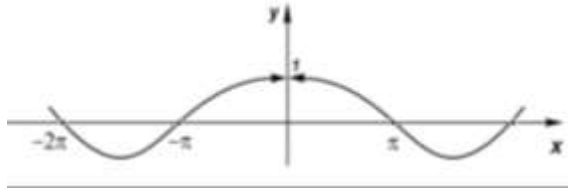
Приклад 2. Знайти точки розриву функції $y = \frac{\sin x}{x}$, дослідити їх характер.

$\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1$, тобто $f(0-0)=1$ зліва;

$\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$, тобто $f(0+0)=1$ справа;

$f(0-0)=f(0+0)$;

$f(0)=\frac{0}{0}$ не існує.

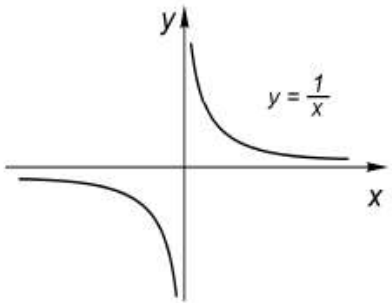


Висновок: точка $x_0 = 0$ є точкою усувного розриву – точка розриву першого роду.

Приклад 3. Знайти точки розриву функції $y = \frac{1}{x}$, дослідити їх характер.

$\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$.



Висновок: точка $x_0 = 0$ є точкою розриву другого роду.

Приклад 4. Знайти точки розриву функції $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$, дослідити їх характер.

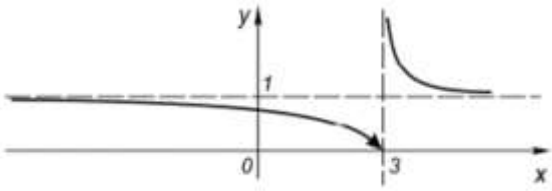
$x = 3$ – точка розриву

Розглянемо границю зліва:

$$\lim_{x\to 3-0} y(x)=\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=0.$$

Розглянемо границю справа:

$$\lim_{x\to 3+0} y(x)=\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}}=2^{\infty}=\frac{1}{2^{-\infty}}=\infty.$$



Висновок: точка x_0=3 є точкою розриву другого роду.

Приклад 5. Знайти точки розриву функції $y = \frac{x}{x^2-1}$, дослідити їх характер.

Функція визначена в усіх точках крім тих де знаменник перетворюється в нуль *x=1, x=-1*. Область визначення функції наступна $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

Знайдемо односторонні границі в точках розриву

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to -1+0}\frac{x}{(x-1)(x+1)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x}{x^2-1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to -1+0}\frac{x}{(x-1)(x+1)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x^2-1}=-\infty.$$

При знаходженні односторонніх границь подібного вигляду достатньо переконатися в знаку функції та в тому, що знаменник прямує до нуля. В результаті отримаємо границю рівну безмежності або мінус безмежності.

Висновок: оскільки в точках $x=1$, $x=-1$ функція має нескінченні односторонні границі, то аргументи $x=1$, $x=-1$ є точками розриву 2-го роду.

Приклад 5. Дослідити на розрив функцію $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Розв'язання. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x=1$ - точка розриву функції. Обчислимо границі зліва і справа в точці $x=1$:

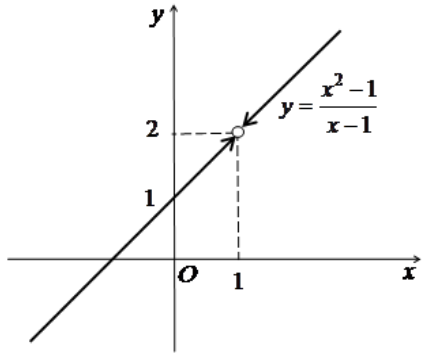
$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}(x+1)=2$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=2$ то точка $x=1$ є точкою усувного розриву. Отже маємо:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x+1\\ x\neq 1\end{cases}$$

Схематичний графік зображено на рисунку:



16.3 Неперервність функції на відрізку

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Водночас,

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною на інтервалі* (a, b) , якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Функція y = f (x) називається *неперервною на відрізку* $[a, b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a, b), і в точці $x = a$ неперервна справа (тобто $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, а в точці $x = b$ неперервна зліва (тобто $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$.

Зауваження: Арифметичні операції над неперервними функціями приводять знову до неперервних функцій.

Неперервні на відрізку $[a, b]$ функції мають ряд властивостей, які формулюються у вигляді теорем.

Властивості функцій, неперервних на відрізку

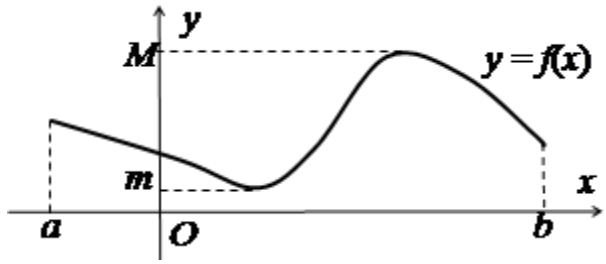
Теорема. (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,\ b]$, то вона:

1) (перша теорема Вейєрштрасса) *обмежена* на цьому відрізку;.

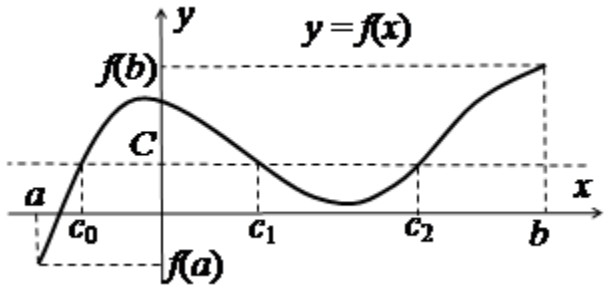
2) (друга теорема Вейєрштрасса) досягає на цьому відрізку свого *найбільшого* $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ та *найменшого* $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ значень як показано

на рис. Тобто, $\forall x \in [a, b]$:

$$m \leq f(x) \leq M$$

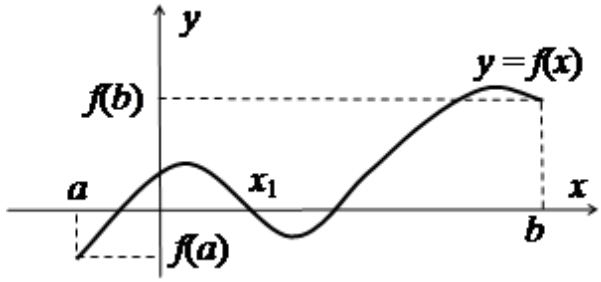


Теорема. (Больцано-Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $f(a) < C < f(b)$, то всередині відрізка існує принаймні одна точка c, в якій функція набуває рівного C значення як показано на рис. Тобто,
$f(a) < C < f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b], f(c) = C$



Наслідок з теореми Больцано - Коші: Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і в його кінцевих точках набуває різних за знаком значень, то всередині відрізка існує принаймні одна точка, в якій значення функції дорівнює нулю як показано на рис. Тобто,

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in [a, b], f(x_1) = 0$$



Наслідки теорем:

1. Якщо на інтервалі (a, b) функція $y = f(x)$ неперервна і не перетворюється на нуль, то на цьому інтервалі функція зберігає постійний знак.
2. Функція $y = f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a, b]$, набуває всіх проміжних значень між значеннями цієї функції у крайніх точках, тобто між $f(a)$ і $f(b)$.
3. Сума різниці і добуток неперервних на даному інтервалі функцій — неперервна на тому ж самому інтервалі функція. Частка двох неперервних функцій — неперервна функція в усіх точках, в яких знаменник не перетвоюється на нуль.
4. Функція, обернена до неперервної функції на заданому інтервалі, є неперервною на цьому інтервалі.