РОЗДІЛ 1: ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Лекція 17 Похідна функції

Джерелом диференціального числення були дві задачі, сформульовані у XVII столітті Г.В. Лейбніцем - задача про дотичну до довільної кривої та І. Ньютоном - задача про швидкість при до вільному законі руху. Обидві вони призвели до *однієї обчислювальної задачі*, яка і стала основою диференціального числення.

Ця задача полягає в тому, щоб за даною функцією $f\ (x)$ відшукати іншу функцію, яка отримала пізніше назву *похідної* та являла собою швидкість зміни функції $f\ (x)$ відносно зміни аргументу.

17.1 Задачі, що приводять до поняття похідної

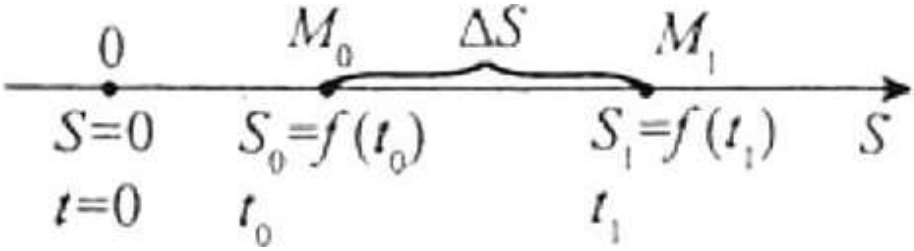
Задача №1. Про *нерівномірний прямолінійний рух* тіла (матеріальної точки).

Нехай матеріальна точка *M* рухається прямолінійно. Вважається що рух точки починається в момент часу t_0, а шлях, який пройдений точкою за час *t*, визначаєтся відомою функцією

$$S\ =\ S(t)$$

Функцію $S(t)$ називають *законом руху*.

Знайдемо швидкість точки в момент часу t_0 ?



Знаючи закон руху, шлях, який пройде матеріальна точка за час t_0 становить $S(t_0)$, а за деякий час t_1 - $S(t_1)$. Тоді шлях, який пройде тіло за інтервал часу $\Delta t = t_1 - t_0$, визначається як

$$\Delta S = S(t_1) -\ S(t_0)$$

або з урахуванням $t_1 = t_0 + \Delta t$, перепешимо як

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$$

Середня швидкість руху точки $\upsilon_{\text{сер}}$ на проміжку M_0M_1 за інтервал часу Δt – це відношення:

$$\upsilon_{сер.} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Але середня швидкість дає лише наближене уявлення про рух матеріальній точки в окремий момент часу, тобто щодо шуканої швидкості у момент часу t_0. Оскільки, рух тіла є нерівномірний, то, наприклад, на початку проміжку воно могло рухатися прискорено, а наприкінці – вповільнено, тощо.

Для того щоб визначити швидкість у момент часу t_0 точніше, треба проміжок часу Δt *зменшувати*.

Таким чином, можна вважати, якщо Δt наближається до нуля, то середня швидкість $\upsilon_{\text{сер}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ буде наближатися до швидкості в момент часу t_0. Тобто, ми приходим до поняння миттєвої швидкості точки у деякий момент часу, яка визначається як наступна:

Миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, у момент t_0 називають границею середньої швидкості $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ за умови, що Δt наближається до нуля. Це записується як

$$\upsilon(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (1)$$

Задача № 2. Нехай задано функцію $y = f(x)$ неперервну на заданому проміжку. Знайдемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 ?

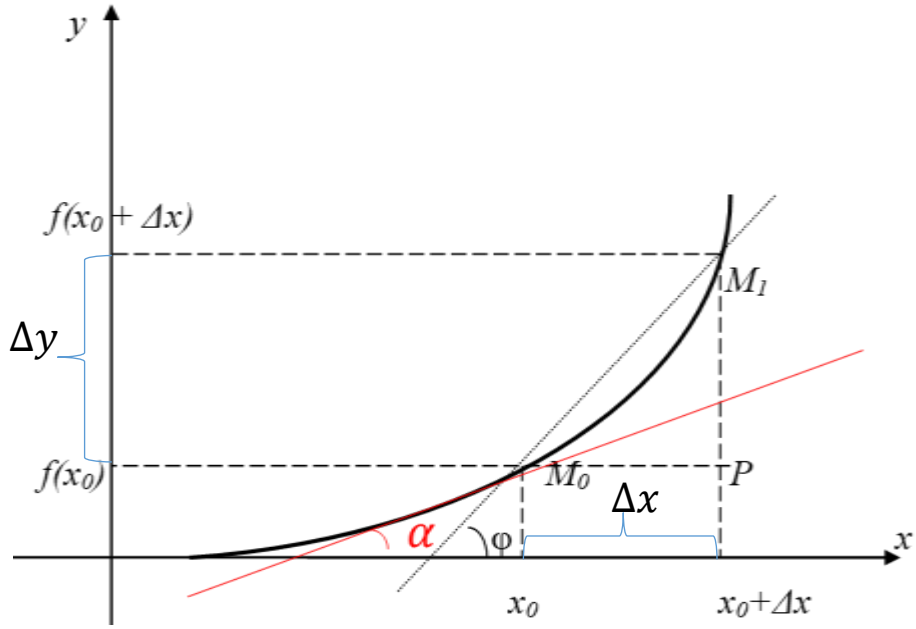
Проведемо січну M_0M_1, де $M_0(x_0, y_0)$, а $M_1(x_1, y_1)$. При цьому вважаємо що $x_1 = x_0 + \Delta x$, де Δx – приріст аргументу, а також визначаємо, що $y_0 = f(x_0)$, а $y_1 = f(x_1)$, звідки $y_1 = f(x_0 + \Delta x)$.

Крім того позначемо, приріст функції

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Рівняння прямої, що проходять через т. M_0 та M_1 має вигляд

$$y_1 - f(x_0) = k \cdot (x_1 - x_0)$$



Кутовий коефіцієнт $k = tg\varphi$, де φ – кут нахилу січної M_0M_1.

Розглянемо трикутник $\triangle M_0PM_1$:

$$M_0P = \Delta x,\ M_1P = \Delta y \Rightarrow tg\varphi = k_{\text{січ}} = \frac{M_1P}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Нехай $\Delta x \to 0$. Тоді $M_1 \to M_0$, січна прямує до дотичної, проведеної до графіка функції в т. M_0, тобто кут нахилу січної прямую до куту нахилу дотичної у точці $\varphi \to \alpha$. Це можна сформулювати та записати, як

Означення: Дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 називають граничне положення січної M_0M_1, коли точка M_1 прямує до точки M_0 по графіку функції $y = f(x)$.

$$k_{\text{дот.}} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{січ}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (2)$$

Для знаходження кутового коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 застосовується (2)

17.2 Означення похідної

Відволікаючись від будь-якого фізичного або геометричного сенсу задачі, крім математичного абстрактного обгрунтування, можемо ввести поняття що

об’єднує задачі, приклади (1) та (2), які призводять до використання подобної формули, а саме, граничного відношення приросту однієї величини до приросту іншої величини, яка залежить від попередньої.

Нехай задано функцію $y = f(x)$ на деякому проміжку $D = (a; b)$. Візьмемо довільну внутрішню точку $x_0 \in D$ цього проміжку, надамо значенню x_0 довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від’ємним), але такого, щоб точка $(x_0 + \Delta x) \in D$ належала даному проміжку. Тоді складемо граничне відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, який викликав цей приріст функції та розглянем властивість відношення при умові що приріст аргументу прямує до нуля, $\Delta x \to 0$.

Означення: Якщо існує границя відношення приросту функції в т. x_0 до приросту аргументу при $\Delta x \to 0$, то її називають *похідною функції* $y = f(x)$ в точці x_0 та записують:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (3)$$

Термін «*похідна*» був введений Л.Ф. Арбогастом (L.F.A. Arbogast (1759–1803), французький математик, Страсбурга (Ельзас)), у кінці XVIII століття, а термін «*диференціал*» - Г.В. Лейбніцем (Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), німецький філософ, логік, математик, фізик, мовознавець і дипломат, Ганновер). Значення похідної полягає у тому, що при вивченні будь-яких процесів і явищ природи за її допомогою можна оцінити *швидкість зміни* зв'язаних між собою величин.

Так як, будь-яку точку проміжка $D = (a; b)$, де задана функція, можно вибрати у ролі точки x_0, то *похідною функції* $y = f(x)$ в будь-якій точці з інтервалу її області визначення $x \in D = (a; b)$ називають границю відношення приросту функції до приросту її аргумента, який визвав цей приріст функції, при умові що приріст аргументу є нескінченно малим, тобто

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (4)$$

Позначення похідної для будь-якої точки x функції $y = f(x)$ де похідна існує:

$$y'(x), y', f'(x), y'_x, f'_x$$

Якщо функція $y = f(x)$ визначена в деякому *правому* (*лівому*) *півоколі* точки x, то *правою* (*лівою*) похідною функції в точці x називається границя

$$y'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(y'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \quad (5)$$

Такі границі називаються *однобічними похідними*.

Очевидно, функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ тоді і тільки тоді, коли односторонні похідні існують і рівні між собою.

Функцію, яка має похідну в точці x_0, називають *диференційованою в цій точці* (3).

Функцію, яка має похідну в кожній точці деякого проміжку, називають *диференційованою на цьому проміжку* (4).

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням*.

Також, з попередньо розв'язаних задач випливає що

Геометричним змістом похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 є кутовий коефіцієнт дотичної до графіка даної функції у точці $M_0(x_0, f(x_0))$, тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

де α - кут, який утворює дотична з додатним напрямком осі *Ox*.

Тоді *рівняння дотичної в точці* x_0 функції $y = f(x)$ знаходеться за формулою:

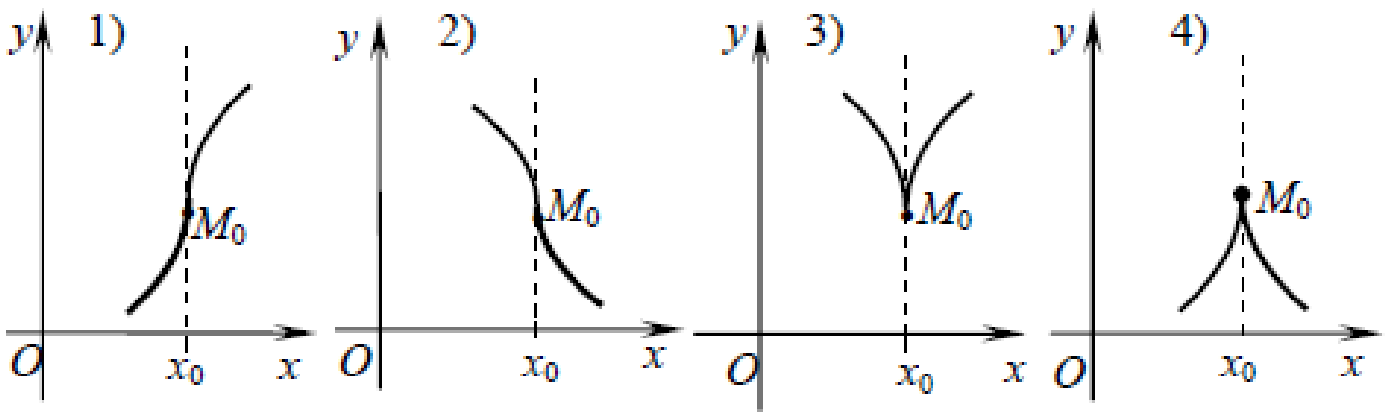
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (6)$$

Означення: Нормаллю до графіка функції $y = f(x)$ у т. M_0 називають пряму, яка перпендикулярна до дотичної у цій точці точку дотику.

Тоді *рівняння нормалі в точці* x_0 функції $y = f(x)$ знаходеться за формулою:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (7)$$

Може так статися, що похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 нескінченна, тобто $f'(x_0) = tg\alpha \to \pm\infty$, тоді сам кут $\alpha = \pm 90°$. При цьому можливі наступні випадки: 1) $f'(x_0) \to +\infty$, 2) $f'(x_0) \to -\infty$, 3) $f'_-(x_0) \to -\infty$, $f'_+(x_0) \to +\infty$, 4) $f'_-(x_0) \to +\infty$, $f'_+(x_0) \to -\infty$, які геометрично зображені на рис



Механічним змістом похідної є наступне: Похідна від шляху за часом дорівнює миттєвій швидкості тіла в момент часу t_0, що рухається за законом $S = S(t)$, тобто

$$S'(t_0) = v(t_0)$$

17.3 Зв'язок між диференційованістю функції та її неперервністю

Одним із означень *неперервності функції в точці* $x = x_0$ є існування в околі точки x_0 границі приросту цієї функції і її дорівнювання нулю при умові $\Delta x \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ *диференційована* в точці $x = x_0$, то вона *неперервна* в цій точці.

Доведення: Нехай існує похідна функції в точці $x = x_0$, тобто $f'(x_0)$. За означенням похідної в точці x_0 маємо існування границі: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ У

свою чергу, згідно до теореми про існування границі функції повинно виконуваться рівняння: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, де α - нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$. Тоді, з останього виразу випливає

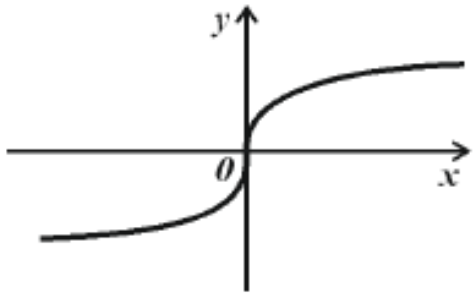
$$\Delta y = (f'(x_0) + \alpha(x))\Delta x$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Це відповідає означенню неперервної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$. Отже, ми довели, що $y = f(x)$ неперервна у т. $x = x_0$. ■

Зауваження. Обернена теорема *не виконується*. Тобто, неперервна в деякій точці функція $y = f(x)$ не завжди має похідну в цій точці.

Для підтвердження цього факту розглянемо приклади.

Приклад. Функція $y = \sqrt[3]{x}$ неперервна на $(-\infty + \infty)$. У точці $x_0 = 0$ дотична до кривої – вертикальна й збігається з віссю Оу. Кут нахилу цієї дотичної $\alpha = \pi/2$, тобто кутовий коефіцієнт (геометричний зміст похідної) $k = f'(x_0) = tg\,\alpha = tg\,(\pi/2)$ *не існує*, тобто в точці $x_0 = 0$ похідна *не існує*.



Таким чином умова неперервності функції в точці не є достатньою, а лише *необхідною умовою* її диференційованості в цій точці.

Крім того, похідна неперервної функції не обов'язково сама *неперервна* функція. Якщо функція $y = f(x)$ має неперервну похідну $y' = f'(x)$ на деякому інтервалі, то вона називається *гладкою*. Якщо ж похідна функції $y' = f'(x)$ допускає скінченне число точок розриву (*причому першого роду*), то така функція на даному інтервалі $(a;\ b)$ називається *кусково–гладкою*.

17.4 Обчислення похідної функції. Таблиця похідних основних елементарних функцій

З означення похідної випливає наступна *схема* для її знаходження:

1. Надамо аргументу функції x приріст $\Delta x \neq 0$ і знайдемо відповідний приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

2. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ і знайдемо границю цього відношення, коли $\Delta x \to 0$, це і є шукана похідна.

Для прикладу застосування цієї схеми обчислення знайдемо похідні деяких елементарних функцій:

Приклад 1*:* Знайдемо похідну сталої, $y = f(x) = C$

1. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$;

2. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, тобто $C' = 0$.

Приклад 2*:* Знайдемо похідну функції $y = \sin x$ у точці x?

1. Надамо аргументу x деякого приросту Δx, тобто розглянемо нове значення аргументу $x + \Delta x$ і знайдемо відповідне нове значення функції $y(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$. Знайдемо приріст функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

2. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ та знайдемо границю цього відношення, коли $\Delta x \to 0$,

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{застосуємо тригонометричну формулу} \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \end{matrix}\right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} =$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{=1\{\text{перша чудова границя}\}} \cdot \cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} 1 \cdot \cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x\right) = \cos x$$

Таким чином, $(\sin x)' = \cos x$

Приклад 3*:*

Аналогічно знайдемо так само за означенням похідну функції $y = ln\, x$:

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln(x+\Delta x) - ln\, x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$\ln \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}}}_{=e\{\text{друга чудова границя}\}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

Таким чином, $(\ln x)' = 1/x$

Як видно, операція щодо знаходження похідних функцій є стандартною. Без доведення, зберемо разом всі подібні похідні основних елементарних функцій у *Таблицю похідних*. Таблиця нам буде потрібна у подальшому для обчислення похідної будь-якої функції, не обов'язково елементарної.

ВИВЧИТИ НАПАМ'ЯТЬ

Таблиця похідних основних елементарних функції

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.	11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.	12. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.	13. $(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. $(e^x)' = e^x$.	14. $(\arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.	15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.	16. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.	17. $(sh\, x)' = ch\, x$
8. $(\lg x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$.	18. $(ch\, x)' = sh\, x$
9. $(\sin x)' = \cos x$.	19. $(th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$
10. $(\cos\ x)' = -\sin x$.	20. $(cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

17.5 Основні правила диференціювання функцій

Диференціювання є невід'ємною частиною розв’язання багатьох практичних задач, тому важливо уміти легко знаходити похідні різних функцій. Частина деяких функції складаються з основних елементарних функцій, для яких обчислення похідної вже відоме, за допомогою операцій складання, віднімання, множення та ділення. Зараз, знайдемо загальні формули щодо знаходження похідної, якими будемо користуватися у таких випадках.

1. Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані в точці x. Тоді в цій точці похідна суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій:

$$[u \pm v]' = u' \pm v' \tag{8}$$

Доведення: Нехай $y = u \pm v$. Тоді,

$$\Delta y = [(u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)] - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ і знайдемо його границю, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{=u'} \pm \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{=v'} = u' \pm v'$$

Таким чином,

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \blacksquare$$

Коментар: Формула (8) вірна для визначення похідної суми (різниці) *більше двох функцій*.

Наприклад,

$$(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'$$

2. Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані в точці x. Тоді в цій точці похідна добутку функцій $u(x)$ і $v(x)$ обчислюється за формулою:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{9}$$

Доведення. Нехай $y = u \cdot v$. Тоді,

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ і знайдемо його границю, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$$v \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{=u'} + u \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{=v'} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{=u'} = u' \cdot v + u \cdot v' + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot v' =$$

Вирази у дужках – це похідні відповідних функцій. Третій доданок прямує до нуля, тому що функція $u(x)$ диференційована, а тому й неперервна за теоремою. Останнє означає, що $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$. Таким чином, останній доданок дорівнює нулю, а остаточно маємо

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \blacksquare$$

Коментар: Формула (9) вірна для визначення похідної добутку *більше двох функцій*, наприклад,

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot (v \cdot w) + u \cdot (v \cdot w)'$$
$$= u' \cdot (v \cdot w) + u \cdot (v' \cdot w + v \cdot w')$$
$$= u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

Наслідок. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

Дійсно, $(C \cdot u)' = \underbrace{C'}_{=0} \cdot u + C \cdot u' = C \cdot u'$

3. Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані в точці x, прицьому $v(x) \neq 0$. Тоді в цій точці похідна частки цих функцій обчислюється за формулою:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad (10)}$$

Доведення. Нехай $y = \frac{u}{v}$. Тоді,

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + \Delta u \cdot v - uv - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{\Delta x v(v + \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{\overbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}^{=u'} \cdot v - \overbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}^{=v'} \cdot u}{v \lim_{\Delta x \to 0} \left(v + \underbrace{\Delta v}_{=0}\right)}$$

$$= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

У знаменнику доданок Δv прямує до нуля, тому що функція $v(x)$ диференційована, а тому й неперервна за теоремою. Останнє означає, що $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. Таким чином,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \blacksquare$$

Коментар: Для випадку $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C} \cdot u'$

Таким чином, *основні правила диференціювання*

$$C' = 0$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

ВИВЧИТИ НАПАМ'ЯТЬ

Приклад 1. $y = x^3 - 3x^2 - \frac{1}{6}x^{-6} + 5;$

$$y' = \left(x^3 - 3x^2 - \frac{1}{6}x^{-6} + 5\right)' = \left(x^3\right)' - 3\left(x^2\right)' - \frac{1}{6}\left(x^{-6}\right)' + 5' = 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{6} \cdot (-6)x^{-6-1} + 0 = 3x^2 - 6x + x^{-7}.$$

Нагадування !!! Похідна від сталої дорівнює нулю.

Приклад 2. $y = x^8 - \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{1}{x^3};$

Вводимо дробові та від'ємні степені, та перетворюємо задану функцію до вигляду

$$y = x^8 - \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{1}{x^3} = x^8 - x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{5}{3}} - x^{-3}.$$

$$y' = 8x^{8-1} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 3\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} - (-3)x^{-3-1} = 8x^7 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x^4}.$$

Приклад 3. $y = e^x \cdot \ln x$

Похідну добутку функцій знаходимо за правилом

$$y' = (e^x)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)' = e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}$$

Приклад 4. $y = \frac{2x^2}{x^2 - 5};$

Похідну дробової функції знаходимо за правилом похідної частки

$$y' = \left(\frac{2x^2}{x^2-5}\right)' = \frac{(2x^2)'(x^2-5) - 2x^2(x^2-5)'}{(x^2-5)^2} = \frac{4x(x^2-5) - 2x^2\cdot 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{4x}{(x^2-5)} - \frac{4x^3}{(x^2-5)^2}.$$

17.6 Похідна складеної функції

Нагадування. Складеною функцією зазвичай називають функцію від іншої функції, тобто якщо змінна y є функцією від u, наприклад, $y = f(u)$, а u у свою чергу – функцією від x, наприклад, $u = \phi(x)$, то

$$y = f(\phi(x))$$

є *складеною функцією* від x. Функцію $f(u)$ називають *зовнішньою*, а $\phi(x)$ - *внутрішньою* функцією, або *проміжною* змінною.

Похідна складеної функції обчислюєтся за теоремою:

Теорема: Якщо функція $\phi(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $f(u)$ – похідну в точці $u_0 = \phi(x_0)$, то складена функція $y = f(\phi(x))$ також має похідну в точці x_0, причому похідна складеної функції $y = f(\phi(x))$ дорівнює добутку похідної

даної функції $y = f(u)$ по проміжному аргументу u (позначено як $f'(u)$ або y'_u) на похідну проміжного аргументу u=$\phi(x)$ по незалежному аргументу x (позначено як $\phi'(x)$ або u'_x), тобто

$$\boxed{y' = f'(u) \cdot \phi'(x) = y'_u \cdot u'_x \qquad (11)}$$

Доведення. Запишемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для складеної функції у вигляді добутку співідношень:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Знайдемо границю відношення, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \boxed{=}$$

Функція $u = \phi(x)$ неперервна в точці x. Тому, якщо $\Delta x \to 0$, то і $\Delta u \to 0$. Тоді останнє перепишемо

$$\boxed{=} \underbrace{\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}}_{=y'_u} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{=u'_x} = y'_u \cdot u'_x \blacksquare$$

Таким чином, щоб продиференціювати складену функцію $y = f(\phi(x))$, де $\phi(x) = u$, необхідно знайти похідну від «зовнішньої» функції y за проміжним аргументом u и і помножити на похідну від «внутрішньої» функції $u = \phi(x)$ за аргументом x.

Знайти похідну складеної функції

Приклад 5. $y = sin^3 x$.

Задана функцію $y = (sin\, x)^3$ складається з двох функцій: $y = u^3$ та $u = \sin x$. Знайдемо похідні цих функцій: $y'_u = 3u^{3-1}$ та $u'_x = \cos x$. Тоді, за теоремою маємо:

$$y' = 3u^2 \cos x = 3\,\underbrace{(sin\, x)}_{=u}^2 \cdot \cos x = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$$

Приклад 6. $y = sin\, x^3$

Функція складається з двох функцій: $y = \sin u$, $u = x^3$. Тоді, $y'_u = \cos u$, $u'_x = 3x^2$, а за теоремою маємо:

$$y' = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot \cos x^3$$

Приклад 7. $y = \sqrt[3]{3 + x^5}$;

Функція складається з двох функцій: $y = \sqrt[3]{u}$, $u = 3 + x^5$. Тоді, $y'_u = \left(u^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$, $u'_x = 0 + 5x^4 = 5x^4$, а за теоремою маємо:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot 5x^4 = \frac{1}{3\sqrt[3]{(3+5x^2)^2}} \cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{3\sqrt[3]{(3+5x^2)^2}}$$

Або

$$y' = \left(\sqrt[3]{3+x^5}\right)' = \frac{1}{3}\left(3+x^5\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \left(3+x^5\right)' = \frac{1}{3}\left(3+x^5\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 5x^{5-1} = \frac{5x^4}{\sqrt[3]{\left(3+x^5\right)^2}}.$$

Приклад 8. $y = \left(3x^3 - 5x^2 + 6\right)^2$.

Функція складається з двох функцій: $y = u^2$, $u = 3x^3 - 5x^2 + 6$. Тоді, за теоремою маємо:

$$y' = 2\left(3x^3 - 5x^2 + 6\right)^{2-1} \cdot \left(3x^3 - 5x^2 + 6\right)' = 2\left(3x^3 - 5x^2 + 6\right) \cdot \left(3 \cdot 3x^{3-1} - 5 \cdot 2x^{2-1}\right) = 2x\left(3x^3 - 5x^2 + 6\right) \cdot (9x - 10).$$

Приклад 9. $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

Тут $y = u^{1/2}$, $u = x^2 + 2x$.

$$y' = (\sqrt{x^2+2x})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}} \cdot (x^2+2x)' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Приклад 10. $y = \sin(3x + 5)$

Тут $y = \sin u$, $u = 3x + 5$.

$$y' = (\sin(3x+5))' = \cos(3x+5) \cdot (3x+5)' = 3\cos(3x+5)$$

Приклад 11. $y = \cos^2 x$

Тут $y = u^2$, $u = \cos x$.

$$y' = (\cos^2 x)' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\cos x \sin x =$$
$$= -\sin 2x;$$

Приклад 12. $y = (3x^3 - 1)^5$

Тут $y = u^5, u = 3x^3 - 1$.

$$y' = ((3x^3 - 1)^5)' = 5(3x^3 - 1)^4 \cdot (3x^3 - 1)' = 5(3x^3 - 1)^4 \cdot 9x^2$$
$$= 45x^2(3x^3 - 1)^4.$$

Коментар: Зазначимо, що це правило (11) можна використовувати й для функції, яка складена *з трьох і більше* функцій.

Приклад 13. $y = \ln(arctg\, x^2)$

Для того щоб знайти значення заданої функції y від незалежної змінної x треба виконати наступні три дії (послідовно починаючи з першої):

1. Піднести аргумент x до квадрату: x^2;
2. Знайти значення $arctg$ для виразу з x^2;
3. Обчисли натуральний логарифм $\ln$ попереднього значення в $\operatorname{arctg} x^2$;

У таких випадках треба визначити дію, яка є <u>останьою</u> для знаходження значення заданої складеної функції y – це зовнішня функція, а *весь вираз* над яким виконюється ця дія приймається за *проміжну змінну* u. Тоді, уявимо функцію y як таку, що складається з двох функцій:

$$y = ln\, u, u = \operatorname{arctg} x^2$$

Звідки, за теоремою маємо:

$$y' = \frac{1}{u} \cdot (u)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot (\operatorname{arctg} x^2)' \boxed{=}$$

У свою чергу функція $y = \operatorname{arctg} x^2$ складається також з двох функцій:

$$y = \operatorname{arctg} u \text{ та } u = x^2$$

Тоді, за теоремою маємо:

$$\boxed{=} \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{1}{1 + u^2} \cdot (u)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot (x^2)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{1}{1 + x^4} \cdot 2x$$

Остаточно,

$$y' = (\ln(arctg\, x^2))' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{1}{1 + x^4} \cdot 2x$$

Коментар: правило (11) залишається в силі, якщо проміжних аргументів декілька. Так, якщо $y = f(u)$, $u = \phi(v)$, $v = g(x)$, то

$$y'_x = f'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

З урахуванням знаходження похідної складної функції - необхідно похідну даної функції по проміжному аргументу помножити на похідну проміжного аргументу по незалежному аргументу, *формули диференціювання основних функції* $y = f(u)$ *аргументом яких є проміжна функція* $u = u(x)$ мають вигляд:

1. $(u^n)' = n \cdot x^{n-1} \cdot u'$.	11. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	12. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
3. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$	14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
5. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	15. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	16. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	17. $(sh\, u)' = ch\, u \cdot u'$
8. $(\lg_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln 10} \cdot u'$	18. $(ch\, u)' = sh\, u \cdot u'$
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	19. $(th\, u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	20. $(cth\, xu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$

17.7 Похідна оберненої функції

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$, де її область визначення складає множина $x \in X$, а $y \in Y$ - множина її області значеннь, має обернену функцію $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$ і для всіх $x \in X$ (з області визначення) існує похідна $f'(x) \neq 0$, то для всіх $y \in Y$ (з області значень) існує похідна $\varphi'(y) = \left(f^{-1}(y)\right)'$, причому справедлива рівність:

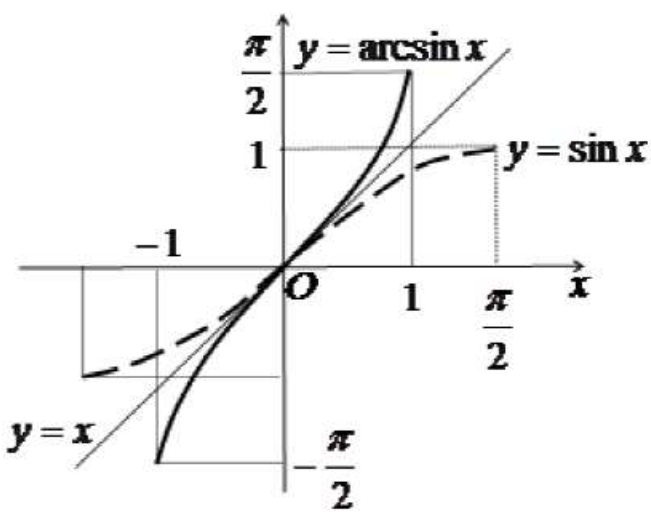
$$\varphi'(y) = \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \text{ або } x'_y = \frac{1}{y'_x} \qquad (12)$$

Доведення. З означення похідної функції $x = \varphi(y)$ маємо:

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} =$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{функція } y(x) \text{ диференційована неперервна} \\ \Delta y \to 0, \Delta x \to 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}_{=f'(x)}} = \frac{1}{f'(x)}$$

Приклад 14. Знайти похідну функції, оберненої до функції $y = \sin x$. Функція $y = \sin x$ неперервна і монотонна на проміжку $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Отже, на цьому проміжку існує обернена функція, яку позначають $x = \arcsin y$, де $y \in [-1,1]$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Знаходимо похідну за формулою (12), тобто

$$y'_x = (\sin x)' = \cos x.$$

Оскільки аргументом оберненої функції є y, то виконаємо такі перетворення:

$$\cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2},$$

Знак «+» взято, оскільки при $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\cos x \geq 0$. Отже, $x'_y = \frac{1}{y'_x} \Rightarrow$

$$x'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \text{або} \quad (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

17.8 Похідна функції, заданої параметричними рівняннями

Якщо функція $y = f(x)$ задана *параметрично* двома рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (\alpha;\ \beta)$, то її похідні обчислюються за формулами:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad (13)$$

Доведення формули розглядатиметься пізніше.

Приклад 15 . Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $x = t^3 + 3t + 1,\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1$.

Розв'язання. Знайдемо, $y'_t = 15t^4 + 15t^2,\ x'_t = 3t^2 + 3$

Отже,

$$y'_x = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$$

17.9 Похідна функції, заданої неявно

Якщо на деякому проміжку X диференційовна функція $y = f(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, то її похідну $y'(x)$ можна знайти з рівняння:

$$[F(x, y)]'_x = 0$$

де $y(x)$ розглядається як складена функція змінної x.

Приклад 16. Знайти похідну функції, заданої неявно: $3y^2 + 2xy + \cos y = 0$

Знаходимо похідну за змінною x, пам'ятаючи, що $y(x)$ є функцією від x, тому $(f(y(x)))' = f'_y \cdot y'$, тоді

$$[3y^2 + 2xy + \cos y]'_x = 0,$$

$$(3y^2)' + (2xy)' + (\cos y)' = 0,$$

$$3 \cdot 2y \cdot y' + 2(1 \cdot y + x \cdot y') + (-\sin y) \cdot y' = 0$$

Розв'яжемо це рівняння відносно $y'(x)$, отримаємо:

$$y'(6y + 2x - \sin y) = -2y$$

Звідки,

$$y' = \frac{2y}{\sin y - 6y - 2x}$$

17.10 Логарифмічне диференціювання функцій

Іноді відшукання похідної спрощується, якщо її попередньо прологарифмувати. В зв'язку з цим такий метод називається *логарифмічним диференціюванням*. Розглянемо як працює цей метод на прикладі.

Знайти похідну складеної функції виду $y = u(x)^{v(x)}$ (показниково-степенева функція).

Логарифмуючи рівність дістанемо

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

Диференціюючи обидві частини останньої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot (\ln u(x))' \text{ далі}$$

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} u'(x)$$

Виразивши з останньої рівності y', та підставивши $y = u(x)^{v(x)}$, отримаємо

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} u'(x) \right]$$

цю рівність можна переписати так

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x),$$

де $u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x)$ - похідна від *показникової функції*, $v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'$ - похідна від *степеневої функції*.

Приклад 17**.** Знайти похідну $y = x^{\sin x}$.

Логарифмуючи дістанемо $\ln y = \sin x \cdot \ln x$,

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності за змінною x, матимемо

$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x$, звідки

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right)$$

Зауваження. Крім диференціювання степенево-показникових функцій метод логарифмічного диференціювання доцільно застосовувати також у випадку, коли функція подана у вигляді добутку (частки) досить великої кількості функцій.

Приклад 18**.** Знайти похідну $y = e^{x^3} \cdot \mathrm{ctg}^5 x \cdot \arcsin x$

Логарифмуючи дістанемо: $\ln y = x^3 \ln e + 5 \ln(\mathrm{ctg} x) + \ln(\arcsin x)$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = (x^3)' + 5(\ln(\mathrm{ctg}x))' + (\ln(\arcsin x))' \text{ або}$$

$$\frac{1}{y}y' = 3x^2 + 5\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\cdot\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right) + \frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Звідки

$$y' = e^{x^3}\cdot \mathrm{ctg}^5 x\cdot \arcsin x\left(3x^2 + \frac{5}{\sin x\cdot\cos x}\cdot + \frac{1}{\cdot\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right)$$

Приклад 19**.** Знайти похідну $y = \frac{(x-1)^2(3x+1)}{(x+5)^2}$;

$$\ln y = \ln\frac{(x-1)^2(3x+1)}{(x+5)^2} = \quad = 2\ln(x-1) + \ln(3x+1) - 2\ln(x+5).$$

$$y'\frac{1}{y} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{3x+1}\cdot 3 - \frac{2}{x+5}.$$

Зведемо під спільний знаменник праву сторону. В результаті математичних операцій отримаємо

$$\frac{2(3x+1)(x+5)+3(x-1)(x+5)-2(x-1)(3x+1)}{(x-1)(3x+1)(x+5)} = = \frac{3(x^2+16x-1)}{(x-1)(3x+1)(x+5)}.$$

Підставимо в вихідну формулу, перенісши функцію в праву частину

$$y' = y\cdot\frac{3(x^2+16x-1)}{(x-1)(3x+1)(x+5)} = = \frac{(x-1)^2(3x+1)}{(x+5)^2}\cdot\frac{3(x^2+16x-1)}{(x-1)(3x+1)(x+5)} =$$

$$\frac{3(x-1)(x^2+16x-1)}{(x+5)^3}.$$