Лекція 20 Основні теореми диференціального числення

Знання про похідну функції дає можливість зробити висновки про поведінку самої функції, побудувати її графік. Розглянемо більш детально зв'язок між функціями і їх похідними, але по-перше, надамо кілька важливих результатів, які є дещо більш теоретичними та стосуються функцій, диференційовних на замкнутих обмежених інтервалах. Це теореми, які часто використовуються в доказах інших важливих результатів, але вони також мають пряме застосування. Спочатку, надамо означення локального максимуму та мінімуму функції та їх визначення за допомогою похідної.

20.1 Локальний максимум та мінімума функції. Теорема Ферма

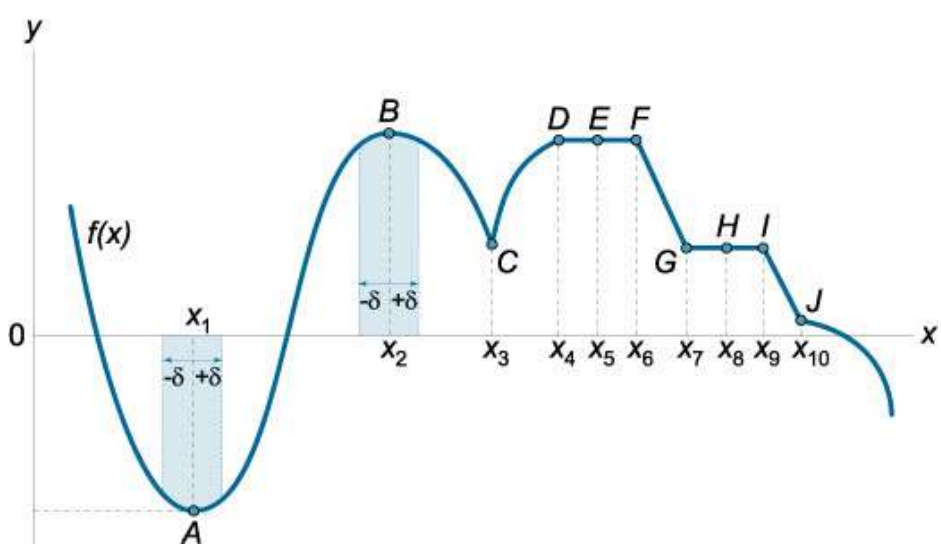
Нехай задана деяка функції $y = f(x)$.

Означення. Точка x_0 називається точкою *локального максимуму* [*локального мінімуму*] функції $y = f(x)$, якщо для всіх значень аргументу x із деякого δ-околу точки x_0: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ виконується нерівність:

$$f(x) < f(x_0), [f(x) > f(x_0)] \quad (1)$$

Зауваження 1: Точки локального максимуму та локального мінімуму функції ще називається точками *локального екстремума* функції.

Зауваження 2: Точки в яких умова (1) має вид нестрого нерівенства іноді називаються точками *нестрого* локального максимуму [локального мінімуму] функції.



Розглянемо деяку функцію $y = f(x)$, графік якої представлено на рисунку. З рисунку очевидно, що

- точка $A(x_1)$ є точкою строгого локального *мінімуму*, оскільки для неї існує δ-окіл, де виконується нерівність: $f(x) > f(x_1)$.

- точка $B(x_2)$ є точкою строгого локального *максімуму*, оскільки для неї існує δ-окіл, де виконується нерівність: $f(x) < f(x_2)$

Інші точки класифікуються таким чином:

точка $C(x_3)$ - строгий мінімум;

точка $D(x_4)$ - нестрогий максимум;

точка $E(x_5)$ - нестрогий максимум або мінімум;

точка $F(x_6)$ - нестрогий максимум;

точка $G(x_7)$ - нестрогий мінімум;

точка $H(x_8)$ - нестрогий максимум або мінімум;

точка $I(x_9)$ - нестрогий максимум;

точка $J(x_{10})$ - екстремуму немає.

Наступна теорема визначає точки *локального екстремуму* функції за допомоги її похідної:

Теорема Ферма. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і в деякій точці $x_0 \in (a, b)$ має найбільше або найменше значення. Тоді якщо в точці x_0 існує похідна, то вона дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Нехай для визначеності функція $y = f(x)$ в точці x_0 має найбільше значення. Оскільки ми прийняли, що $f(x_0)$ - найбільше значення, то різниця $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ для довільної точки $x = x_0 + \Delta x \in (a, b)$, звідки випливає, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, якщо $\Delta x > 0$ і $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, якщо $\Delta x < 0$.

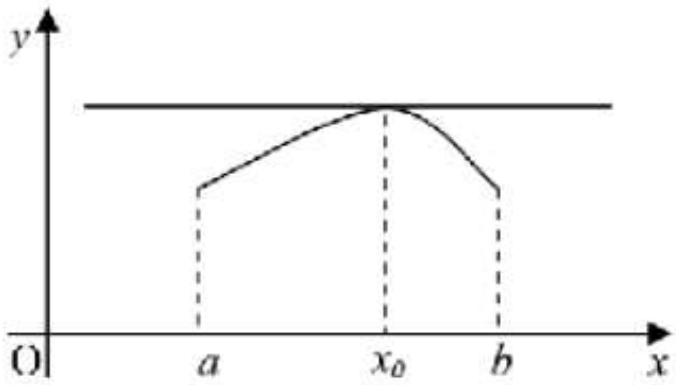
Оскільки за умовою теореми похідна в точці $x = x_0$ існує, то, перейшовши до границі за умови, що $\Delta x \to 0$, дістанемо:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \leq 0 \text{ і } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0.$$

Але умови $f'(x_0) \leq 0$ і $f'(x_0) \geq 0$ виконуються одночасно, лише коли

$$f'(x_0) = 0. \blacksquare$$

Геометричний зміст теореми Ферма полягає в тому, що якщо в околі точки x_0 диференційовна функція $y = f(x)$ має найбільше або найменше значення, то в точці $\left(x_0, f(x_0)\right)$ дотична до графіка функції $f(x)$ паралельна осі *Ox*.



Тобто у точках *локального екстремума* функції дотична до її графіка паралельна осі *Ox*.

20.2 Теорема Ролля

Теорема Ролля стверджує, що якщо значення диференційованої функції $f(x)$ рівні в кінцевих точках інтервалу, то має бути внутрішня точка c, де $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля. Якщо функція $y = f(x)$

1) неперервна на відрізку $[a, b]$,
2) має рівні значення $f(a) = f(b)$ на кінцях цього відрізка,
3) диференційовна в усіх точках інтервалу (a, b),

то в цьому інтервалі існує *принаймні одна* точка $x = c$, $c \in (a, b)$, в якій похідна функції дорівнює нулю, тобто

$$f'(c) = 0 \tag{2}$$

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона згідно другої теореми Вейєрштрасса досягає на цьому відрізку свого найбільшого M і найменшого m значень. Отже $m \leq f(x) \leq M$. Розглянемо два можливі випадки: 1) $m = M$; 2) $m < M$.

1) Нехай $m = M$. Це можливо тільки за умови, що $f(x) = const$ - для всіх $x \in [a, b]$, тоді для будь-якого $x = c \in (a, b)$ матимемо: $f'(x) = (const)' = 0$.

2) Якщо $m < M$. Тоді хоча б одне з цих значень M або m досягається всередині відрізка $[a, b]$ в деякій точці $x = c$, яка $c \in (a, b)$. Нехай для конкретності $f(c) = M$.

Оскільки ми прийняли, що $f(c)$ - найбільше значення і функція в точці c диференційовна, то за теоремою Ферма $f'(c) = 0$. ■

Геометричний зміст теореми Ролля полягає в тому, що на графіку

функції, яка задовольняє умови теореми, знайдеться принаймні одна точка $M_0(c, f(c))$, в якій дотична горизонтальна ($f'(c) = 0$) (рис. 1а).

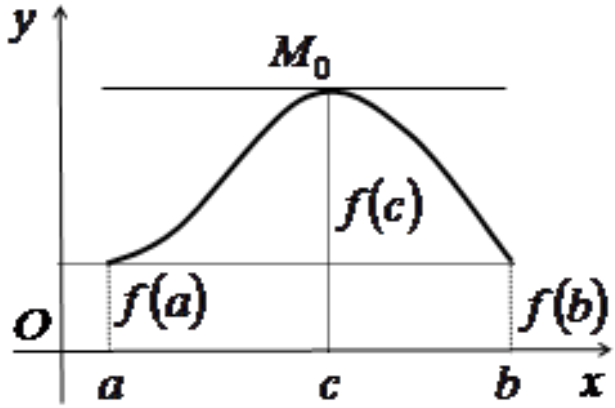


Рис. 1а

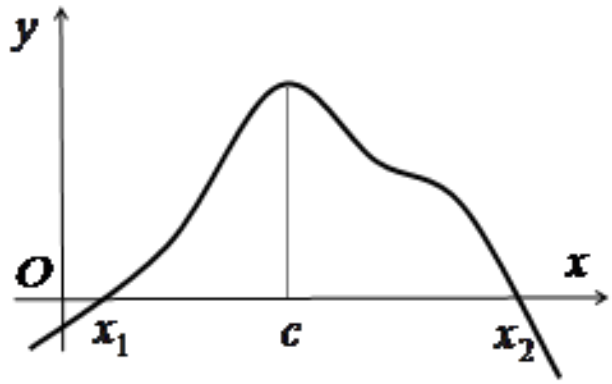


Рис. 1б

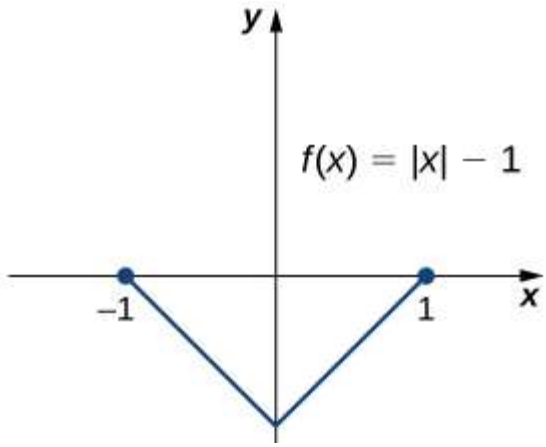
Наслідок. Між двома коренями функції завжди міститься корінь її похідної, якщо тільки функція задовольняє умовам теореми Ролля (рис. 1б).

Приклад. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ на відрізку $[-1,1]$. Перевіримо виконання умов теореми:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ – неперервна на відрізку $[-1,1]$;
2) $f(-1) = f(1) = 1$;
3) $\forall x \in (-1,1)$: $\exists f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

Отже, як ми бачимо, умови теореми виконуються. Неважко помітити, що існує точка $x = 0$, яка $0 \in (-1,1)$ в якій похідна дорівнює нулю $f'(0) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{0} = 0$.

Зауваження: Важливим моментом у теоремі Ролля є те, що диференційовність функції $f(x)$ є критичною. Якщо $f(x)$ не диференційовна, навіть в одній точці, теорема може не виконуватися.



Наприклад, функція $f(x) = |x| - 1$ неперервна на $[-1,1]$ і $f(-1) = f(1) = 0$, але $f'(c) \neq 0$ для будь-якого $c \in (-1,1)$, як

показано на наступному малюнку.

20.3 Теорема Лагранжа

Теорема Ролля є окремим випадком теореми про середнє значення - *теореми Лагранжа*. Теорема Лагранжа узагальнює теорему Ролля, розглядаючи функції, які не обов'язково мають однакові значення в кінцевих точках інтервалу.

Теорема Лагранжа (теорема про скінченні прирости). Якщо функція $y = f(x)$

1) неперервна на відрізку $[a, b]$,
2) диференційовна в інтервалі (a, b),

то в цьому інтервалі існує *принаймні одна* така точка $x = c$, $c \in (a, b)$, така що має місце рівність:

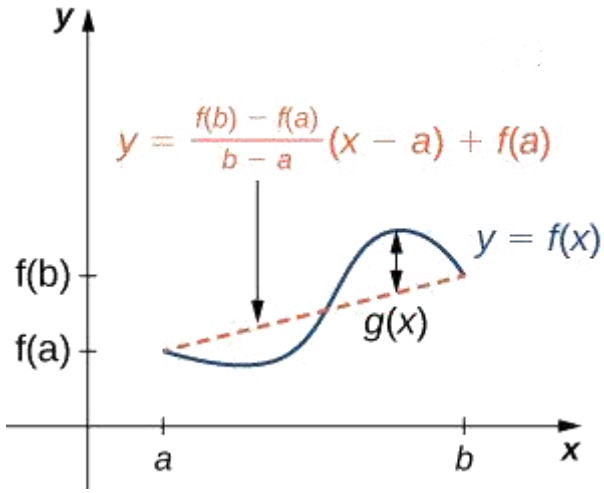
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{3}$$

Доведення. Побудуємо допоміжну функцію що задовольняє критеріям теореми Ролля. Розглянемо пряму лінію, що з'єднує $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$. Оскільки нахил цієї прямій дорівнює $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ і пряма проходить через точку $(a, f(a))$, її рівняння можна записати як

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \Rightarrow y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Нехай $g(x)$ позначає вертикальну різницю між точкою $(x, f(x))$ і точки (x, y) на цій прямій. Звідки

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$$



Тоді, функція $g(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля. Вона є

(1) неперервна на $[a, b]$, т. як $f(x)$ неперервна на $[a, b]$;

(2) $g(a) = g(b) = 0$, т. як графік $f(x)$ перетинає січну, коли $x = a$ і $x = b$;

(3) диференційовна на (a, b), т. як $f(x)$ диференційовна на (a, b).

Отже, за цією теоремою знайдеться $c \in (a, b)$, така, що $g'(c) = 0$. Знайдемо похідну

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

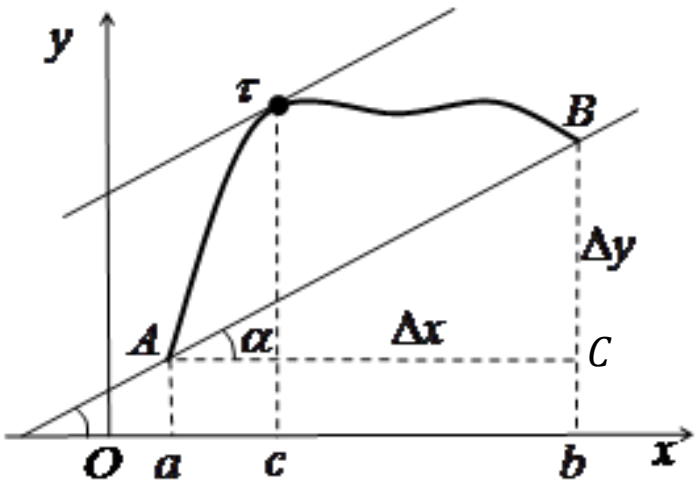
Тоді з умови $g'(c) = 0$ матимемо, що

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Звідки

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ що і потрібно було довести. ■

Геометричний зміст теореми Лагранжа



На рис. зображено графік функції $y = f(x)$, яка задовольняє умовам теореми Лагранжа на відрізку $[a, b]$, тобто існує точка $x = c$, де $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Відмітимо, що $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha$ є кутовим коефіцієнтом хорди, що стягує дугу *AB,* яка відповідає приросту *b-a*. З іншого боку, $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$ - кутовий коефіцієнт дотичної в точці з абсцисою $x = c \in (a, b)$.

Отже, на гладкій дузі *AB* графіка функції $f(x)$ завжди знайдеться принаймні одна внутрішня точка $x = c$, в якій дотична паралельна хорді, що стягує кінці дуги *A* і *B*.

Зауваження. Теорему Лагранжа можна записати через прирости:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) \Rightarrow \Delta y = f'(c) \cdot \Delta x$$

Приклад. На дузі *AB* кривої $y = x^2 + 1$ знайти точку *M*, в якій дотична буде паралельна хорді, якщо *A*(-1,2) і *B*(2,5).

Функція $y = x^2 + 1$ неперервна і диференційовна для всіх значень $x \in$

$(-\infty, +\infty)$. За теоремою Лагранжа між двома значеннями $a = -1$ і $b = 2$ існує таке значення $x = c$, що має місце рівність

$$y'(c) = \frac{y(b)-y(a)}{b-a} \Rightarrow y(b) - y(a) = y'(c)(b-a)$$

Т.як $y' = 2x$, то $y'(c) = 2c$

Підставивши відповідні значення, дістанемо:

$$y(2) - y(-1) = 2c \cdot (2+1)$$

звідки $5 - 2 = 2c \cdot 3, \Rightarrow c = \frac{1}{2}$, де $c \in (-1,2)$; Знаходемо, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$

Отже, маємо точку $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Наслідки теореми Лагранжа

Розглянемо три наслідки теореми Лагранжа. Ці результати є важливими та будуть використовуватися в наступних розділах.

Наслідок 1. Нехай f диференційовна на інтервалі I. Якщо $f'(x) = 0$ для всіх $x \in I$, то $f(x) = C$, де C – *стала*, для всіх $x \in I$.

Оскільки f диференційовна на I, то f повинна бути неперервною на I. Припустимо, $f(x)$ не є сталою для всіх x в I. Тоді існують $a, b \in I$, де $a \neq b$ і $f(a) \neq f(b)$. Виберем значення такі, щоб $a < b$. Звідки

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0$$

Так як f є диференційованою функцією, згідно з теоремою Лагранжа, існує $c \in (a, b)$ така, що

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Отже, існує такий $c \in I$, що $f'(c) \neq 0$, що суперечить припущенню, що $f'(x) = 0$ для всіх $x \in I$. ■

З Наслідку 1 випливає, що якщо дві функції мають однакову похідну, вони відрізняються щонайбільше *сталою*.

Наслідок 2. Якщо f і g диференційовні на інтервалі I і $f'(x) = g'(x)$ для всіх $x \in I$, тоді $f(x) = g(x) + C$ для деякої сталої C.

Нехай $h(x) = f(x) - g(x)$. Тоді $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ для всіх $x \in I$. З Наслідку 1 існує стала C така, що $h(x) = C$ для всіх $x \in I$. Тому $f(x) = g(x) + C$ для всіх $x \in I$. ■

Наслідок 3. Нехай f неперервна на замкнутому інтервалі $[a, b]$ і диференційована на відкритому інтервалі (a, b).
i. Якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a, b)$, то f є *зростаючою* функцією на $[a, b]$.
ii. Якщо $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (a, b)$, то f є *спадною* функцією на $[a, b]$.

Ми доведемо i., доведення ii. - подібне. Припустимо, що f не є зростаючою функцією на I. Тоді існують a і b в I такі, що $a < b$, але $f(a) \geq f(b)$. Оскільки f є диференційованою функцією на I, то за теоремою Лагранжа існує таке $c \in (a, b)$, що $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Так як $f(a) \geq f(b)$, ми знаємо, що $f(b) - f(a) \leq 0$. Крім того, $a < b$ говорить нам, що $b - a > 0$. Робимо такий висновок

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$$

Однак $f'(x) > 0$ для всіх $x \in I$. Це суперечність, і тому f має бути зростаючою функцією на I. ■

20.4 Теорема Коші

Теорема Лагранжа є окремим випадком більш загальної теореми Коші Геометрична форма теореми Коші подібна до теореми Лагранжа і пов'язана з кривими, що задані параметрично через функції f і g.

Теорема Коші (про відношення приростів двох функцій). Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$

1) неперервні на відрізку $[a, b]$,

2) диференційовні в інтервалі (a, b), причому $g'(x) \neq 0$,

то в цьому інтервалі існує точка $x = c$, $c \in (a, b)$, така, що має місце рівність:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\prime(c)}{g\prime(c)} \tag{4}$$

Доведення. Рівність (4) можлива, тільки коли $g(b) \neq g(a)$, та $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Побудуємо допоміжну функцію $\Phi(x) = f(x) + \lambda g(x)$, де λ – невідома стала. Підберемо λ так, щоб функція $\Phi(x)$ на кінцях відрізка $[a, b]$ мала рівні значення $\Phi(a) = \Phi(b)$, тобто

$$\Phi(a) = f(a) + \lambda g(a), \Phi(b) = f(b) + \lambda g(b),$$

$$\Phi(a) = \Phi(b) \Rightarrow f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \Rightarrow \lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Тоді

$$\Phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$$

Функція $\Phi(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля. Отже, за цією теоремою знайдеться таке $c \in (a, b)$, таке, що $\Phi'(c) = 0$.

Знайдемо похідну

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

Тоді з умови $\Phi'(c) = 0$ матимемо, що

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

Звідки

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \blacksquare$$

Зауваження. Якщо в рівності теореми Коши прийняти $g(x) = x$, то як наслідок отримаємо теорему Лагранжа.

20.5 Застосування похідної до обчислення границь: Правило Лопіталя

У попередньому семестрі ми ввели означення границь функцій та навчилися їх оцінювати. Але в деяких випадках оцінка веде до «невизначеної» форми, для якої може бути важко знайти результат. Тепер ми розглянемо метод, який допомагає у багатьох випадках оцінити границю частки $\frac{f(x)}{g(x)}$

Теорема. (правило Лопіталя). Якщо

1) функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані на інтервалі (a, b), $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a, b)$;

2) функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в околі деякої точки $x = x_0$ за виключенням, може бути, самої цієї точки, прицьому існують одночасно або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ і $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ і $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, тобто мають місце невизначеності або $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ або $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, відповідно;

3) існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$, то існує й границя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому така що має місце рівність:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} \tag{5}$$

Доведення. Доведення виконаємо тільки для випадку невизначеності $\left\|\frac{0}{0}\right\|$. Довизначимо функції $f(x)$ і $g(x)$ в точці $x = x_0$ так, щоб вони стали неперервними, тобто покладемо $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тепер $\forall x \in (a, b)$ ці функції на відрізку $[x, x_0]$ або $[x_0, x]$ задовольняють умовам теореми Коші. Тому існує точка $x = c$: $x_0 < c < x$ (або $x < c < x_0$) така, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Оскільки $x_0 < c < x$ (або $x < c < x_0$), то якщо $x \to x_0 \Rightarrow c \to x_0$ тоді й $c \to x$. Перейшовши в останній рівності до границі, за умовам $x \to x_0$, отримаємо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

що і потрібно було довести. ■

Коментарії:

1. Зауважте, що правило Лопіталя можна використовувати безпосередньо, лише якщо ми оцінюємо границю частки, що веде до невизначеної форми $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ або $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$.

2. Правило Лопіталя стверджує, що за деяких умов замість оцінки $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ми можемо оцінити $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$ за умови, що ця друга границя існує.

Зауваження: Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує, нічого не можна сказати про $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

3. Зверніть увагу, що чисельник і знаменник $\frac{f(x)}{g(x)}$ диференцюються *окремо*, на відміну від похідної частки, де має використовуватися правило частки.

4. Типовою особливістю правила Лопіталя є те, що воно використовується багаторазово. Під час диференціювання, якщо ми знову отримуємо частку похідних $f'(x)$ і $g'(x)$, для яких виконуються умови правила Лопіталя то правило Лопіталя можна застосувати повторно. Доходячи таким чином до границі, яка існує, ми можемо стверджувати, що всі попередні границі також існують і мають той самий результат.

5. Іноді правило Лопіталя не працює, хоча формально його можна використовувати.

Приклади розкриття невизначеностей $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ *або* $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$

Приклад. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-3x-28}{x^2-49}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-3x-28}{x^2-49}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 7}\frac{\left(x^2-3x-28\right)'}{\left(x^2-49\right)'}=\lim_{x\to 7}\frac{2x-3}{2x}=\frac{11}{14}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{4x}-e^{2x}\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{4x}-2e^{2x}}{1}=2$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-3\sin 3x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-1}=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1/x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^{3x}+3^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3e^{3x}+3^x\ln 3}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x\cos x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}\sin^2 x\cos x}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin^2 x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{2\sin x\cos x}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\sin x\cos x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{формально ми знову отримали невизначеність } \left\{\frac{0}{0}\right\}.\\ \text{Але, } \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\end{array}\right\}=-\frac{1}{6}$$

Приклади розкриття невизначеностей $\|0\cdot\infty\|$ та $\|\infty-\infty\|$

Границі, що дають невизначені форми $\|\infty-\infty\|$ і $\|0\cdot\infty\|$, *не можна оцінити безпосередньо* за допомогою правила Лопіталя, і деякі попередні маніпуляції необхідні для отримання частки, що веде до невизначених форм типу $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ або $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$. Продемонструємо, як це зробити, на наступному прикладі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x+1)-\ln x=\|\infty-\infty\|=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)$

Тоді, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)'}{x'}=\frac{1}{1}=1$

Звідки, $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x+1)-\ln x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln 1=0$

Для невизначеності $\|0\cdot\infty\|$ це можливо зробити за допомогою перетворень: $f(x)\cdot\ g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ або $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

2. $$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^{-2}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-2x3)}{-2x^{-3}}=e^{+\infty}=\infty.$$

3. $$\lim_{x\to\infty}x\cdot 3^{-2x}=\{\infty\cdot 0\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3^{2x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3}=0$$

4. $$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{ctg}x=\{0\cdot\infty\}=\left\{\begin{array}{c}\text{тут можна застосувати формули:}\\ \operatorname{ctg}x=1/\operatorname{tg}x \text{ або } \operatorname{ctg}x=\cos x/\sin x\\ \text{Виберемо першу формулу.}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\operatorname{tg}x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{1/\cos^2 x}=\lim_{x\to\pi}\cos^2 x=(\cos\pi)^2=1$$

5. $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)=\{\infty-\infty\}=\left\{\begin{array}{c}\text{зведемо вираз до}\\ \text{спільного знаменника}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1-x\ln x}{\ln x(x-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{1-\ln x-x\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{-\ln x}{1-\frac{1}{x}+\ln x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\left\{\begin{array}{c}\text{не будемо спрощувати дріб,}\\ \text{а просто підставимо границю}\end{array}\right\}=-\frac{1}{2}$$

Приклади розкриття невизначеностей $\|0^0\|$; $\|\infty^0\|$; $\|1^\infty\|$

Невизначеності типу $\|0^0\|$, $\|\infty^0\|$, $\|1^\infty\|$ зводяться до невизначеностей типу $\|0\cdot\infty\|$ за допомогою перетворень:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

Приклад 9 $\lim_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Підставивши $x=1$ у вираз функції, встановимо, що має місце невизначеність вигляду 1^∞.

Скористаємось тотожністю $\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{e^x+x}\left(e^x+1\right)}{1}=2$$

Отже, $$\lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}}=e^2.$$

Приклад 10 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$

Переконуємося, що має місце невизначеність вигляду ∞^0

$\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}=e^{\operatorname{tg}x\cdot\ln\frac{1}{x}}$, тоді $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x\cdot\ln\frac{1}{x}}$.

Звідки

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}x\cdot\ln\frac{1}{x}\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}x\cdot(\ln 1-\ln x)=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\left(tgx\cdot\ln x\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=$$

$$=1\cdot 0=0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^0=1$

Наступний приклад показує застосування *логарифмування* перед використанням правила Лопіталя:

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left\{\infty^0\right\}$. Позначимо

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

і прологарифмуємо рівність:

$$\ln A=\ln\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Розглянемо праву частину цієї рівності:

$$\ln \lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0}\ln(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\mathrm{ctg}x)\right] = \{0\cdot\infty\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{ctg}x)}{\ln x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{застосуємо}\\ \text{правило Лопіталя}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x\cdot\sin x} = \left\{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1\right\} = -1..$$

Повернемося до рівності

$$\ln A = -1.\ \text{Звідси}\ A = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

20.6 Застосування похідної функції однієї змінної: Формула Тейлора

У розділі диференціал функції ми вивчали лінійну апроксимацію функцій в околі визначеної точки. Висновок полягав у тому, що найкращим лінійним наближенням функції є її заміна на дотичну. Тепер спробуємо апроксимувати функції поліномами вищого ступеня. Можна очікувати, що таке наближення може бути точнішим.

Лінійним наближенням будь-якої функції $f(x)$, що диференційована в околі точки x_0, є рівнянням дотичної до графіку функції в $[x_0, f(x_0)]$, тобто функція $y(x)$:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

де $f(x_0) = y(x_0)$ і $f'(x_0) = y'(x_0)$.

Отже, якщо ми хочемо апроксимувати будь-яку достатньо гладку функцію $f(x)$ *поліномом* $T_n(x)$ *ступеня* n, графік якого нагадує графік $f(x)$, у точках x близьких до т. x_0, треба вимагати, щоб $f(x)$ і $T_n(x)$ приймали однакові значення похідних аж до порядку n у точці x_0. Отже, припускаючи, що існують $f^{(n)}(x_0)$, ми шукаємо поліном $T_n(x)$ такий, що для будь-якого числа x_0:

$$
\begin{gathered}
f(x_0) = T_n(x_0) \\
f'(x_0) = T_n{}'(x_0) \\
f''(x_0) = T_n{}''(x_0) \\
f'''(x_0) = T_n{}'''(x_0) \\
\dots \\
f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0)
\end{gathered} \tag{6}
$$

Доведемо, що такий поліном існує і є єдиним.

Спочатку зауважемо, що будь-який поліном $P(x)$ ступеня не вище n може бути представлений у вигляді суми множників $(x - x_0)^n$, тобто розкладений за степенями множника $(x - x_0)$, де x_0 – будь-яке число.

Формально це означає, що якщо існує поліном

$$Q(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots + a_n y^n, a_n \neq 0$$

то існує поліном такий що $P(x) = Q(x - x_0)$, тобто

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

Припустимо, що поліном $T_n(x)$, який ми шукаємо, виражений за степенями $(x - x_0)$, тобто

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \dots + c_n(x - x_0)^n$$

де c_i, $i = 0,1, \dots, n$ – невизначені коефіцієнти. Останні знаходемо послідовним диференціюванням многочлена $T_n(x)$:

$$T_n{}'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + 4c_4(x - x_0)^3 + \dots + nc_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$T_n{}''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - x_0) + 4 \cdot 3c_4(x - x_0)^2 + \dots + n \cdot (n-1)c_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$T_n{}'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x - x_0) + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2)c_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\dots.$$

$T_n^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2c_n = n!\, c_n$, де $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Звідки для $x = x_0$ значення полінома $T_n(x)$ та його похідних є

$T_n(x_0) = c_0$, $T_n{}'(x_0) = c_1$, $T_n{}''(x_0) = 2c_2$, $T_n{}'''(x_0) = 3 \cdot 2c_3$, … ,

$T_n^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2c_n = n!\, c_n$,

тобто маємо:

$$c_n = \frac{T_n^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots, c_3 = \frac{T_n'''(x_0)}{3!}, c_2 = \frac{T_n''(x_0)}{2!}, c_1 = \frac{T_n'(x_0)}{1!}, c_0 = T_n(x_0)$$

Оскільки ми вимагаємо, що виконуються (6), то отримуємо коефіцієнти c_i, $i = 0,1,\ldots,n$, які визначаються однозначно за формулами:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots, c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, c_0 = f(x_0)$$

Таким чином, маємо шуканий поліном:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad (7)$$

Рівняння (7) називається *формулою полінома Тейлора*.

Якщо, $x_0 = 0$, то формула (7) має вигляд

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \quad (8)$$

та називається *поліномом Маклорена*.

Формула полінома Тейлора (7) дозволяє при деяких умовах представити (*апроксимувати*) будь-яку функцію $f(x)$ у вигляді многочлена в оклолі точки x_0. Тоді значення функції $f(x)$ в точках x які є близькими до x_0, тобто x з оклолу точки x_0, наближено можно отримати як значення цього поліному.

Зауваження. Якщо $f(x)$ – це поліном ступеня n, то цей поліном є поліномом Тейлора для будь-якої $x_0 \in \mathbb{R}$.

Приклад 1. Розкласти поліном $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ за степенями множиника $(x + 2)$.

Так як поліном є кубичним, то $f(x) = T_3(x)$ для будь-якої x_0. Загальна форма полінома Тейлора 3-го ступеня в околі точки x_0 є

$$T_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

Отже, в околі точки $x_0 = -2$

$$T_3(x) = f(-2) + \frac{f'(-2)}{1!}(x + 2) + \frac{f''(-2)}{2!}(x + 2)^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x + 2)^3$$

Знайдемо

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5 \Rightarrow f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 + (-2) - 5 = -35$$

$f'(x) = (2x^3 - 3x^2 + x - 5)' = 6x^2 - 6x + 1 \;\; \Rightarrow \; f'(-2) = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 1 = 37$

$f''(x) = (6x^2 - 6x + 1)' = 12x - 6, \Rightarrow f''(-2) = -30$

$f'''(x) = (12x - 6)' = 12, \Rightarrow f'''(-2) = 12$

Звідки, за формулою полінома Тейлора

$$f(x) = -35 + \frac{37}{1} \cdot (x+2) + \frac{(-30)}{2} \cdot (x+2)^2 + \frac{12}{6} \cdot (x+2)^3 =$$
$$= -35 + 37(x+2) - 15(x+2)^2 + 2(x+2)^3$$

Приклад 2. Скласти поліноми Тейлора ступеня $n = 1,2,3$ для функції $f(x) = \ln x$ в околі точки $x_0 = 1$.

Знайдемо

$f(x) = \ln x, \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}, \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{1} = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \Rightarrow f'''(1) = \frac{2}{1} = 2$

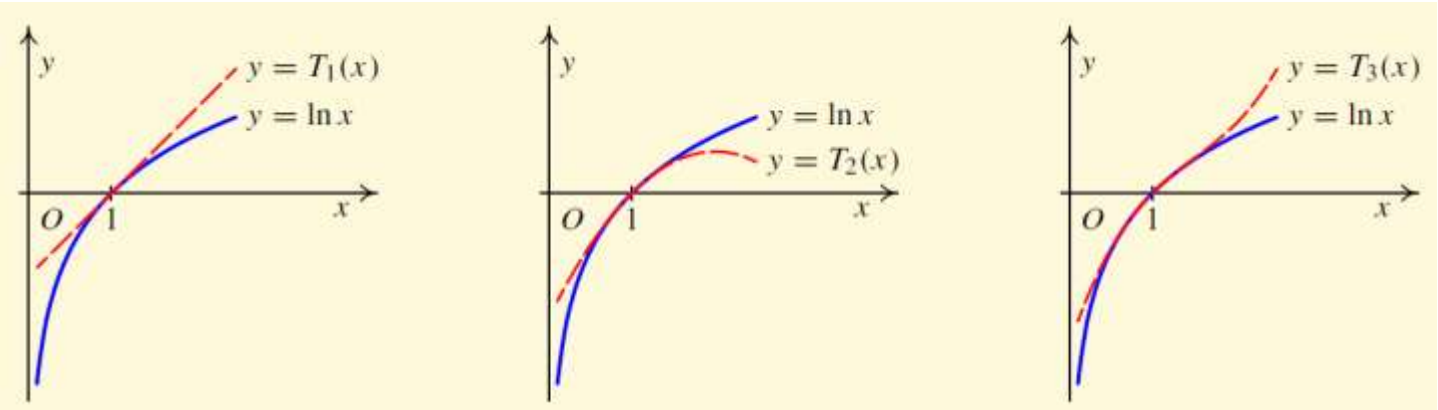
Отже,

$$T_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = 1 + 1(x-1) = x - 1$$

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

$$T_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

Графіки знайденних поліномів Тейлора наведені на рис.:



Пряма лінія Квадратна лінія Кубічна лінія

Формула Тейлора для диференційовних функцій

Формула Тейлора дозволяє не тільки наближено представити (*апроксимувати*) довільну функцію $f(x)$ у вигляді поліному і разом із тим дозволяє оцінити похибку, яка при цьому виникає. Похибка в багатьох випадках може бути зробленою як завгодно малою.

Нехай $y = f(x)$ – це довільна функція, якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 похідну n-го порядку, то як показали існує поліном $T_n(x)$ ступеня не вище n такий, що

$$T_n(x_0) = f(x_0), T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), k = 1,2, \dots, n$$

Тоді, за формулою полінома Тейлора можем записати:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f\prime(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f\prime\prime(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f\prime\prime\prime(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Точність апроксимації функції $f(x)$ її поліномом Тейлора $T_n(x)$ будемо знаходити як

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

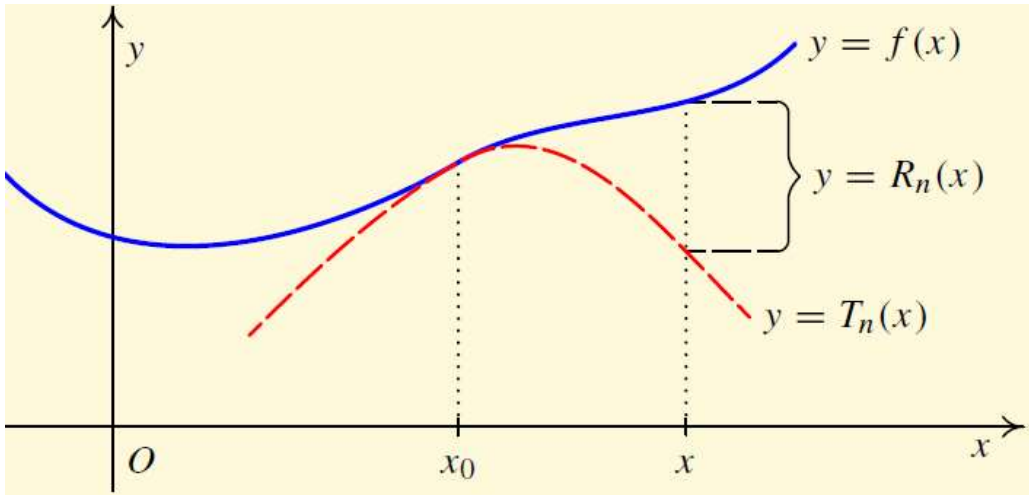
Звідки

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \tag{9}$$

Формула (9) називається *формулою Тейлора в околі точки* x_0, а $R_n(x)$ – залишок в *формулі Тейлора.*

Формула (9) *в околі точки* $x_0 = 0$ називається *формулою Маклорена*.

Значення залишку показано на рис. Чим менше $R_n(x)$, тим краще буде наближення. Наближення буде добрим лише для x, достатньо близьких до x_0.



Теорема 1. Нехай існує $\delta > 0$ таке, що функція $f(x)$ має в δ-околі точки x_0 похідні до $(n+1)$-го порядку включно. Тоді для будь-якого $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ знайдеться точка ξ, що належить інтервалу з кінцями x_0 і x, така, що функція $f(x)$ має представлення:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{залишковий член} - R_n(x)} \cdot (10)$$

Функцію (похибку) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, де $x_0 < \xi < x$ називають *залишковим членом формули Тейлора у формі Лагранжа*.

У випадку $x_0 = 0$, маємо формулу Маклорена з залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (11)$$

Приклад 3. Знайти формулу Тейлора порядку $n = 2$ функції $f(x) = \arctan x$ при $x_0 = 1$.

Формула Тейлора порядку $n = 2$ загальної функції f з центром $x_0 = 1$ є

$$f(x) = T_2(x) + R_2(x) =$$
$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}(x - 1)^3}_{\text{залишковий член}}$$

Знайдемо

$$f(x) = \arctan x \Rightarrow f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$
$$f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow f'''(\xi) = \frac{6\xi^2-2}{(1+\xi^2)^3}$$

Звідки

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(x-1)^2 + \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3}_{\text{залишковий член}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{6\xi^2-2}{6(1+\xi^2)^3}(x-1)^3$$

Зауважте, що хоча знаходження полінома Тейлора є рутинним завданням, оцінка залишку може потребувати більш складних зусиль.

У поточному випадку, оцінку помилки, яку ми допускаємо, наближаючи $f\ (x)\ =\ arctan\, x$ його поліномом Тейлора другого порядку в т. $x_0\ =\ 1$ на інтервалі $(0.9, 1.1)$ складатиме

$$R_2(x) = \frac{6\xi^2-2}{6(1+\xi^2)^3}(x-1)^3, \text{ де } 0.9 < \xi < 1.1$$

Ми оцінюємо абсолютне значення $R_2(x)$. Щоб збільшити дріб, його чисельник потрібно збільшити, а знаменник зменшити.

Чисельник: $|6\xi^2 - 2|$. Використовуючи властивості модуля та нерівність $\xi\ <\ 1.1$, отримуємо:

$$|6\xi^2 - 2| \le 6|\xi|^2\ +\ 2\ <\ 6\ \cdot\ 1{,}1^2\ +\ 2\ =\ 9{,}26$$

Знаменник: $|6(1+\xi^2)^3|\ =\ 6(1+\xi^2)^3$

Оскільки $\xi^2\ =\ 0$, то $\xi^2\ +\ 1\ \ge\ 1$, то $6(\xi^2\ +\ 1)^3\ =\ 6\ \cdot\ 1^3\ =\ 6$.

Взагалі

$$|R_2(x)|\ = \frac{|6\xi^2 - 2|}{6(\xi^2+1)^3}|x\ -\ 1|^3 \le \frac{9{,}26}{6}|x\ -\ 1|^3 \le\ 1{,}55|x\ -\ 1|^3 \le\ 1{,}55\ \cdot\ 0{,}1^3\ =\ 0{,}00155\ <\ 0{,}0016.$$

Отже, апроксимація $arctan\, x$ його поліномом Тейлора другого порядку в центрі 1

$$T_2(x)\ = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x\ -\ 1)\ - \frac{1}{4}(x\ -\ 1)^2$$

на інтервалі $(0.9, 1.1)$ (тому нехтуючи залишком $R_2(x)$ ми допускаємо помилку менше 0,0016.

Інша форма залишкового члену (способ оцінки помилки) випливає з твердження що $R_n(x)$ є меншим за $(x - x_0)^n$ блище до x_0.

Теорема 2. Якщо існує нескінчено диферинційована в точці x_0 функція $f(x)$, тобто $f^{(n)}(x_0)$, тоді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{o((x - x_0)^n)}_{\text{залишковий член}}, x \to x_0, \qquad (12)$$

тобто похибка $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = o((x - x_0)^n)$, коли $x \to x_0$.

Формулу (12) часто називають формулою Тейлора із *залишковим членом у формі Пеано* або *локальною формулою Тейлора*.

Формула Маклорена з залишковим членом у формі Пеано має вигляд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), x \to 0 \qquad (13)$$

Зауваження. Нехай, функція $f(x)$ нескінченно диференційована на інтервалі $(-l, l)$. Якщо ця функція є *парною*, то її похідна - *непарна* функція, і, навпаки, похідна *непарної* функції - *парна* функція. Звідси випливає, що для <u>*непарної функції*</u> $f(x)$ виконуються умова $f^{(2k)}(0) = 0,\ k \in \mathbb{N}$, а для <u>*парної функції*</u> $f(x)$ - умова $f^{(2k-1)}(0) = 0,\ k \in \mathbb{N}$, так як будь-яка безперервна непарна функція приймає при $x = 0$ значення нуль. Тоді для нескінченно диференційованій *непарної* функції:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), x \to 0$$

а для нескінченно диференційованій *парної* функції:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), x \to 0$$

Приклади розкладання основних елементарних функцій за формулою Маклорена (Тейлора в околі $x_0 = 0$) ступеня n

1. $f(x) = e^x$,

де $f(0) = e^0 = 1$ та $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ для будь-якого n.

Тоді за формулой (13) можемо записати:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), x \to 0 \qquad \text{(i)}$$

2. $f(x) = \operatorname{sh} x$,

де $f(0) = \operatorname{sh} 0 = 0$ та, так як функція непарна, то

$f^{(2k+1)}(x) = \operatorname{ch} x$, $f^{(2k+1)}(0) = \operatorname{ch} 0 = 1$, $k = 0,1,2, \ldots$,

Звідки

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{ii}$$

Аналогично,

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0 \tag{iii}$$

Зауваження. Також можно отримати записані вище формули за допомогою співвідношень $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ і $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$$\text{де } e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n),\ x \to 0$$

3. $f(x) = \sin x$,

де $f(0) = \sin 0 = 0$ та, так як функція непарна, то

$f^{(2n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(2n)\right) = \sin(x + \pi n) = \sin x, \Rightarrow f^{(2n)}(0) = \sin(\pi n) = 0,$

$f^{(2n+1)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}(2n+1)), \quad \Rightarrow \quad f^{(2n+1)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \cos \pi n = (-1)^n.$

Таким чином,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),\ x \to 0 \tag{iv}$$

4. $f(x) = \cos x$,

де $f(0) = \cos 0 = 1$

Подібно попередньому, так як функція парна, то

$f^{(2n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} 2n\right) = \cos(x + \pi n), \Rightarrow f^{(2n)}(0) = \cos(\pi n) = (-1)^n,$

$f^{(2n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}(2n+1)\right), \qquad \Rightarrow \qquad f^{(2n+1)}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \sin n\pi = 0$

Звідки

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{(v)}$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}$

За фомулою бінома Ньютона:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n),\ x \to 0, \quad \text{(vi)}$$

де $C_\alpha^0 = 1$, $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$

Відзначимо важливі окремі випадки цієї формули при $x \to 0$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \quad \text{(vii)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \quad \text{(viii)}$$

6. $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$

де $f(0) = \ln(1+0) = 0$ та $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}(n-1)!}{(x+1)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}(n-1)!}{(0+1)^n} = (-1)^{\mathrm{n}-1}(n-1)!$

Звідки при $x \to 0$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{(ix)}$$

7. $f(x) = \ln(1-x)$,

де $f(0) = \ln(1-0) = 0$ та $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}(n-1)!}{(x-1)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}(n-1)!}{(0-1)^n} = -(n-1)!$

Звідки при $x \to 0$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{(x)}$$

Приклади розкладання функції за формулою Маклорена (за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = 0$) з точністю $\mathrm{o}(x^n)$:

а) $f(x) = \frac{1}{3x+2}$,

$$\frac{1}{3x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{3}{2}x\right)} = \left\| \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \right\| =$$

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{3^k}{2^{k+1}} x^k + o(x^n)$, $x \to 0$

б) $f(x) = (x+3)e^{-2x}$,

$(x+3)e^{-2x} = xe^{-2x} + 3e^{-2x} = x\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} x^k + o(x^{n-1})\right) +$

$3\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} x^k + o(x^n)$, $x \to 0$

Коментар: Розкладання диференційованій функції за формулою Тейлора в околі точки $x_0 \neq 0$ виконується зведенням задачі до розкладання цієї функції за формулою Маклорена за допомогою заміни змінної.

Приклад. Розкласти функцію $f(x) = \ln(x+2)$ за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = -1$ з точністю $\mathrm{o}((x+1)^n)$, $x \to -1$.

Введемо змінну $t = x + 1$.

Представимо функцію $f(x) = \ln(x+2)$ у вигляді:

$$f(x) = \ln(x+1+1) = \ln\big(1 + (x+1)\big).$$

Тоді, з урахуванням нової змінної маємо

$$\ln\big(1 + (x+1)\big) = \ln(1+t), \text{ де } x \to -1 \Rightarrow x+1 \to 0 \Rightarrow t \to 0$$

Звідки, за формулою (іх) запишемо

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n + o(t^n)$$

Повертаючись до змінної x, остаточно маємо

$$f(x) = \ln(x+2) = (x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(x+1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^n + o((x+1)^n)$$

Приклад. Розкласти функцію $f(x) = x^3$ за формулою Тейлора в околі точки $x_0 = -1$ з точністю $\mathrm{o}((x+1)^n)$, $x \to -1$.

Складемо поліном Тейлора в околі точки $x_0 = -1$.

Оскільки функція $f(x)$ сама є поліномом 3 ступеня, то цей поліном розкладений за степенями множиника $(x+1)$ буде поліном Тейлора в околі точки $x_0 = -1$, тобто

$f(x) = T_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$ або

$f(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x + 1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x + 1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x + 1)^3$

де $f(x) = x^3, \Rightarrow f(-1) = -1,$

$f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \Rightarrow f'(-1) = 3,$

$f''(x) = (3x^2)' = 6x \Rightarrow f''(-1) = -6,$

$f'''(x) = (6x)' = 6 \Rightarrow f'''^{(-1)} = 6$

Отже,

$$f(x) = x^3 = (-1) + 3(x + 1) - 3(x + 1)^2 + (x + 1)^3 + o((x + 1)^3)$$