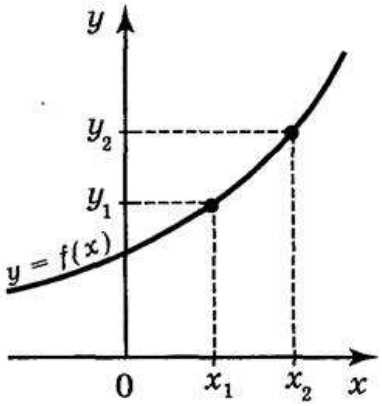
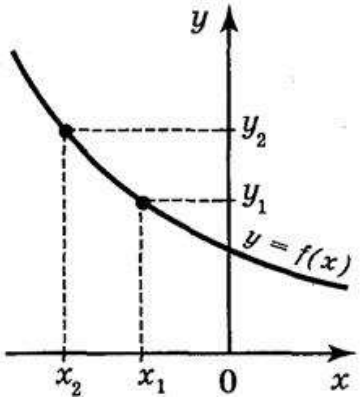
Лекція 21 Дослідження поведінки функції

Знання про похідну функції дає можливість зробити висновки про поведінку самої функції та побудувати її графік.

21.1 Зростаюча та спадна функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* на інтервалі (a, b), якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто для будь-яких значень x_1 і x_2 з області визначення функції таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ і навпаки: із того, що $f(x_1) < f(x_2)$ виконується нерівність $x_1 < x_2$, тобто $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.





Означення. Функція $y = f(x)$ називається *спадною* на інтервалі (a, b), якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто для будь-яких значень x_1 і x_2 з області визначення функції таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ і навпаки: якщо $y = f(x)$ — спадна, то із того, що $f(x_1) > f(x_2)$, виконується нерівність $x_1 < x_2$, тобто $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Зауваження: Якщо з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція називається *неспадною*, а якщо з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається *незростаючою*.

Означення. Зростаючі, незростаючі, спадні й неспадні функції на інтервалі (a, b) називають *монотонними* на цьому інтервалі, а зростаючі і спадні функції називають *строго монотонними*.

Інтервали, в яких функція зростає або спадає називають *інтервалами монотонності*.

Визначення інтервалів монотонності за допомогою похідної

Теорема 1. Для того, щоб диференційовна на проміжку I функція $f(x)$ *не спадала* (*не зростала*) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб її похідна в усіх точках цього проміжку була *невід'ємна* (*недодатна*), тобто $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.

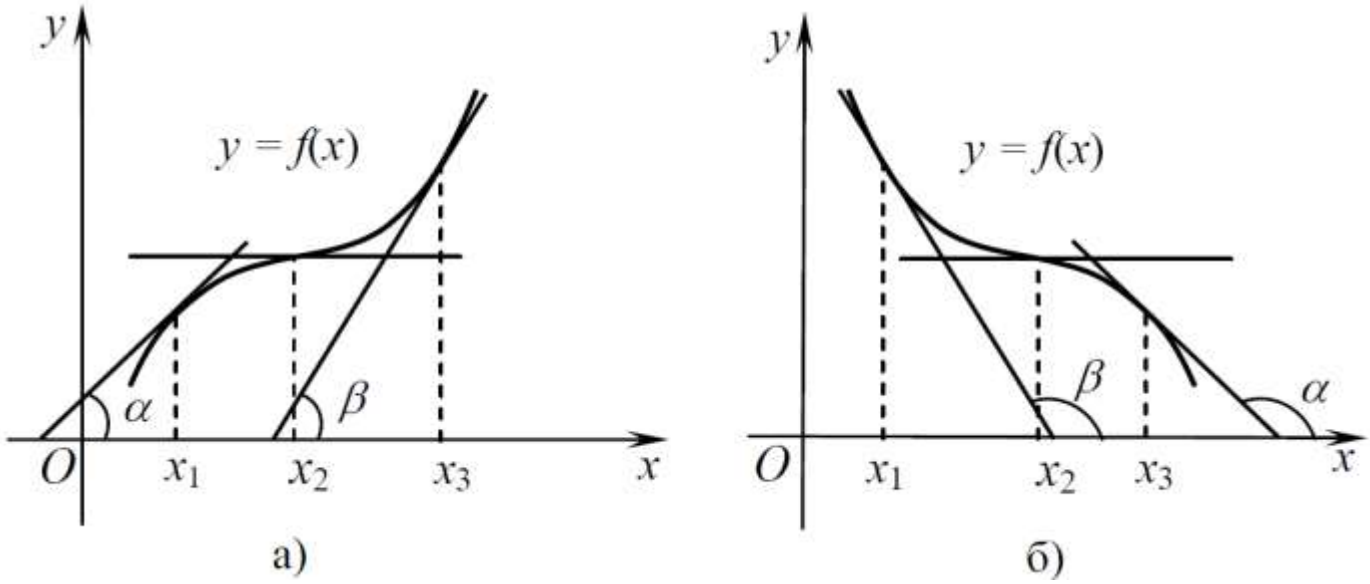
Доведення. *Необхідність.* Нехай диференційовна функція $f(x)$ зростає на проміжку I. Тоді $\forall x \in X$ приросту аргументу $\Delta x > 0$ відповідає приріст функції $\Delta y \geq 0$, а для $\Delta x < 0$ відповідає приріст функції $\Delta y \leq 0$. Таким чином, в обох випадках $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ і тоді $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, тобто $f'(x) \geq 0$. ■

Аналогічно доводиться необхідна умова спадання функції.

Достатність. Нехай $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. Тоді за теоремою Лагранжа $\exists c \in (x, x + \Delta x)$ таке, що $\Delta y = f'(c) \cdot \Delta x$. Але оскільки $f'(c) \geq 0$ за умовою, то, якщо $\Delta x > 0$, отримаємо, що $\Delta y \geq 0$. Отже, функція $f(x)$ зростає на проміжку I. ■

Аналогічно доводиться достатня ознака спадання функції.

Геометричну інтерпретацію умови монотонності функції наведено на рис. Якщо дотичні до графіка функції $f(x)$ у деякому проміжку напрямлені під гострими (тупими) кутами до осі абсцис або в деяких точках паралельні осі Ox, то функція зростає (а) (спадає (б)) на цьому проміжку.



Зауважимо, що умова $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), $\forall x \in I$ є достатньою, але не є необхідною умовою *зростання* (*спадання*) функції.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку I і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) всюди на проміжку I, крім, можливо, скінченного числа точок, в яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує, то функція $f(x)$ *зростає* (*спадає*) на I.

З теорем випливає що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, в яких похідна дорівнює нулю, або точками, де похідна не існує.

Означення. Точки, в яких похідна дорівнює нулю називаються *стаціонарними*. Стаціонарні точки або точки в яких похідна не існує, називаються *критичними точками першого роду*.

Для того, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, потрібно:

1) знайти область визначення функції $f(x)$;
2) знайти похідну функції $f'(x)$;
3) знайти критичні точки першого роду (точки, в яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує);
4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. Для цього всередині інтервалу треба вибрати будь-яку точку, і визначити в цій точці знак похідної $f'(x)$ (такий самий знак похідна матиме і на всьому інтервалі). На тих інтервалах, де $f'(x) > 0$ - функція зростає, а на тих інтервалах, де $f'(x) < 0$ - функція спадає.

Приклад. Дослідити функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ на монотонність.

1) Областю визначення даної функції є множина дійсних чисел.
2) Обчислимо похідну даної функції: $y' = x^2 - 2x - 3$. Тоді, $x^2 - 2x - 3 = 0$. Зрозуміло, що похідна дорівнює нулю при $x_1 = -1$ і $x_2 = 3$.
3) Знаходемо проміжки знакосталості $y'(x)$: на проміжках $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ маємо $y'(x) > 0$, тому дана функція тут зростає. На проміжку $(-1,3)$ - $y'(x) < 0$, тому функція спадає на цьому проміжку

21.2 Локальний екстремум функції

Означення. Точка x_0 називається точкою *локального максимуму*

[*локального мінімуму*] функції $y = f(x)$, якщо для всіх значень аргументу x із деякого околу точки x_0: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ виконується нерівність:

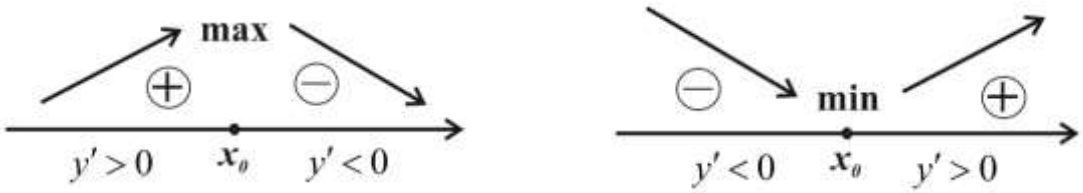
$$f(x) < f(x_0), [f(x) > f(x_0)]$$

Теорема 1. (*Необхідна умова екстремуму*). Якщо функція $f(x)$ має локальний екстремум в точці x_0 і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Нехай $x = x_0$ - точка локального екстремуму функції $f(x)$. Розглянемо такий окіл точки $x = x_0$, в якому інших екстремальних точок немає. Очевидно, що тут виконується теорема Ферма, тобто $f'(x_0) = 0$, що і потрібно було довести. ■

Отже, точки локального екстремуму необхідно шукати тільки серед критичних точок функції (точки, в яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує). Але потрібен критерій, за яким можна стверджувати, що дана критична точка є точкою *локального екстремуму*. Такий критерій дають дві наведені нижче теореми.

Теорема 2. (*Перша достатня умова існування екстремуму*). Якщо при переході значень аргументу *x* функції $f(x)$ через критичну точку x_0 її похідна $f'(x)$ змінює знак, то критична точка x_0 є точкою локального екстремуму, причому:



а) при зміні знака з „плюса” на „мінус” точка x_0 є точкою *локального максимуму*;

б) при зміні знака з „мінуса” на „плюс” x_0 – точкою *локального мінімуму*;

– якщо при переході через критичну точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знак, то в точці x_0 немає екстремуму.

Доведення. а) Нехай функція диференційовна в деякому δ-околі критичної точки x_0 і нехай $f'(x)$ при переході через цю точку змінює знак з „+” на „-”. Розглянемо відрізок, що сполучає точки x_0 і x, де точка $x = x_0 + \Delta x$ належить δ-околу. За теоремою Лагранжа на цьому відрізку знайдеться точка *c* така, що:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

Якщо $\Delta x < 0$, то точка x і, відповідно, точка c лежать зліва від x_0, тому за умовою $f'(c) > 0$. З рівності маємо, що

$f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x)$

Якщо ж $\Delta x > 0$, то точка точка x і, відповідно, точка c лежать справа від x_0, тому за умовою $f'(c) < 0$. З рівності випливає, що

$f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x)$

Отже, всюди в δ-околі точки x_0 виконується умова: $f(x_0) > f(x)$, тобто точка x_0 є за означенням точкою локального максимуму. ■

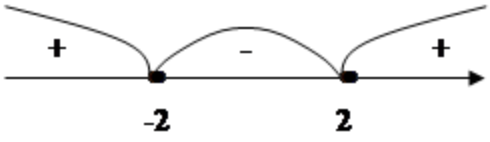
Аналогічно проводиться доведення у випадку б).

Правило знаходження екстремумів за допомогою першої похідної:

1) знайти область визначення $f(x)$;
2) знайти похідну $f'(x)$;
3) знайти критичні точки;
4) дослідити знак $f'(x)$ на інтервалах, на які знайдені критичні точки ділять область визначення $f(x)$. При цьому критична точка x_0 є точкою мінімуму, якщо при переході через неї зліва направо $f'(x)$ змінює знак з “-” на “+”, x_0 є точкою максимуму, якщо $f'(x)$ змінює знак з “+” на “-”.
5) обчислити значення функції в точках екстремуму (екстремуми).

Приклад. Знайти екстремуми функції: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5$.

1) Область визначення $x \in (-\infty, +\infty)$.
2) Похідна: $f'(x) = x^2 - 4$.
3) Критичні точки: $f'(x) = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x = \pm 2$



4) Знаки $f'(x)$:

При переході через точку $x = -2$ похідна змінює знак з « + » на « - », отже $x = -2$ - точка максимуму. При переході через точку $x = 2$ похідна змінює знак з « - » на « + », тому $x = 2$ - точка мінімуму.

5) $y_{max} = y(-2) = -\frac{8}{3} + 8 + 5 = \frac{31}{3}$, $y_{min} = y(-2) = \frac{8}{3} - 8 + 5 = -\frac{1}{3}$

Теорема 3. (*Друга достатня умова існування екстремуму*) Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна $f''(x)$, причому $f''(x_0) \neq 0$. Тоді якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму.

Доведення. Нехай функція диференційовна в деякому δ-околі критичної точки x_0 і нехай $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) < 0$. За означенням похідної другого порядку маємо, що:

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - \overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

Так як $f''(x_0) < 0$, то для $x = x_0 + \Delta x$ з δ-околу точки x_0, то в точці x $f''(x_0 + \Delta x) < 0$. Тоді маємо, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} < 0$$

Звідки випливає, що

$$\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} < 0$$

Отже, якщо $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$, а якщо $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, тобто виконується умова зміні знака похідної $f'(x)$, з „плюс” на „мінуса” - за означенням x_0 є точкою локального максимуму. ■

Аналогічно проводиться доведення у випадку локального мінімуму.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $f\ (x) = x^2(x - 2)^2$. Ця функція визначена і диференційована на всій числовій осі. Знаходимо похідну

$$f'(x) = 2x(x - 2)^2 + 2\,x^2(x - 2) = 2x(x - 2)(x - 2 + x)$$
$$= 4x(x - 2)(x - 1)$$

Точками стаціонарності функції $f'(x) = 0$ є точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ і $x_3 = 2$. Далі, знаходимо

$$f''(x) = 4(3x^2 - 6x + 2)$$

У знайдених точках стаціонарності

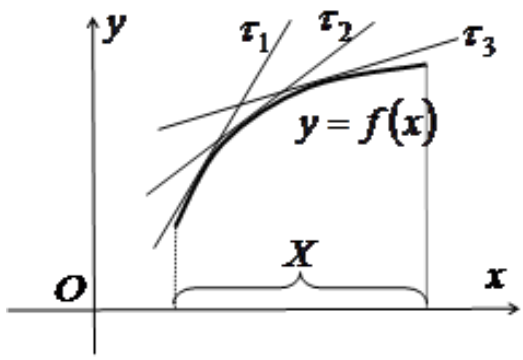
$$f''(0) = 8 > 0, f''(1) = -4 < 0 \text{ і } f''(2) = 8 > 0$$

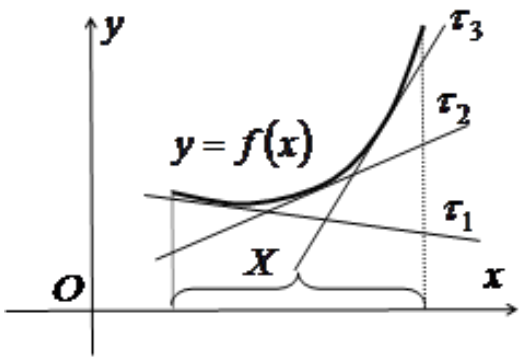
Таким чином, $x_2 = 1$ – точка локального максимуму, а $x_1 = 0$ і $x_3 = 2$ – точки локального мінімуму функції.

21.3 Опуклість та угнутість графіка функції

Нехай функція $f(x)$ диференційовна на проміжку *I*. Тоді у будь-якій точці цього проміжку існує дотична до графіка функції $y = f(x)$, причому ця дотична не вертикальна.

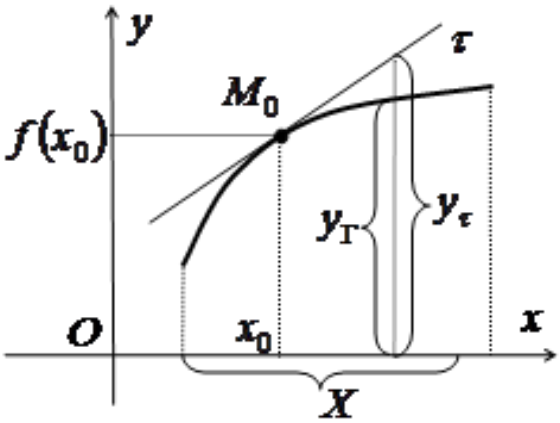
Означення. Графік функції на проміжку *I* називається *опуклим* [*угнутим*], якщо він розміщений **під** дотичною (**над** дотичною) в усіх точках проміжку.





Теорема 1. (Достатня умова опуклості та угнутості графіка на проміжку). Якщо функція $f(x)$ має неперервну другу похідну на проміжку *I*, то за умови $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) графік $f(x)$ - *опуклий* (*угнутий*).

Доведення. Візьмемо на графіку довільну точку $M_0(x_0, y_0)$



Доведемо, що за умови $f''(x) < 0$ всі точки графіка будуть розміщені під дотичною, тобто, що різниця $y_\Gamma - y_\tau$ ординати графіка y_Γ і ординати дотичної y_τ на проміжку *X* буде від'ємною: $y_\Gamma - y_\tau < 0$.

Складемо рівняння дотичної τ в точці M_0:

$$y_\tau - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Розглянемо різницю: $y_\Gamma - y_\tau = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. За теоремою Лагранжа для різниці $f(x) - f(x_0)$ маємо:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0), \text{ де } x \le c \le x_0$$

Тоді

$$y_\Gamma - y_\tau = f'(c) \cdot (x - x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = (x - x_0) \cdot \left(f'(c) - f'(x_0)\right)$$

Ще раз застосуємо теорему Лагранжа для різниці $f'(c) - f'(x_0)$, матимемо

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1) \cdot (c - x_0), \text{ де } x_0 \le c_1 \le c$$

Оскільки $c - x_0 > 0$ і $x - x_0 > 0$, а $f''(c_1) < 0$, то $y_\Gamma - y_\tau < 0$, тобто, точки графіка розміщені під дотичною. ■

Аналогічно доводиться достатня умова угнутості графіка на проміжку.

Точки перегину

*Означення***.** Точка, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої $f(x)$ від угнутої, називається *точкою перегину*.

Теорема 2. (*Необхідна умова точки перегину*). Якщо точка $M_0(x_0, f_0(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $f(x)$, то друга похідна функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ дорівнює нулю або не існує.

Доведення. Оскільки точка $M_0(x_0, f_0(x_0))$ є точкою перегину графіка функції, то зліва і справа від точки $x = x_0$ друга похідна має різні знаки. Отже, в самій цій точці друга похідна дорівнює нулю або не існує. ■

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду*.

Попередня теорема дає всі підстави стверджувати, що точки перегину можуть знаходитись лише серед множини критичних точок.

Теорема 3. (*Достатня умова точки перегину*). Нехай в точці x_0 друга похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує. Якщо при переході значень x через точку x_0 друга похідна змінює знак, то точка графіка з абсцисою x_0 є точкою перегину.

Доведення. Нехай при $x < x_0$: $f''(x) < 0$, а при $x > x_0$: $f''(x) > 0$, тоді зліва від точки x_0 крива – опукла, а справа – угнута. Це означає, що точка

$M_0(x_0, f_0(x_0))$ є точкою перегину. ■

Схема дослідження функції на проміжки вгнутості та опуклості

1. З'ясовати область визначення заданої функції $y = f(x)$.
2. Знайти другу похідну функції $y = f(x)$.
3. Прирівнюють другу похідну до нуля і знаходять корені рівняння $f''(x) = 0$ та точки, в яких похідна не існує.
4. Нанисти одержані розв'язки рівняння $f''(x) = 0$ та точки, в яких похідна не існує, на числову вісь. Ці точки розбивають числову вісь на числові проміжки.
5. Дослідити знак другої похідної на кожному числовому проміжку. З цією метою з кожного проміжку вибирають довільне значення (точку) та з'ясовують знак другої похідної в цій точці.
6. За отриманими результатами сформувати відповідь.

Приклад. Для графіка функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ знайти точки перегину і проміжки опуклості та вгнутості.

1) Областю визначення функції є множина дійсних чисел.

2) Знаходимо другу похідну:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x, f''(x) = 12x - 6$$

3) Зрозуміло, що $f''(x) = 0$, $12x - 6 = 0$, $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

4) Досліджуємо знаки другої похідної ліворуч і праворуч від точки $x = \frac{1}{2}$. Якщо $x < \frac{1}{2}$, то $f''(x) < 0$ і крива – опукла; якщо $x > \frac{1}{2}$, то $f''(x) > 0$ і крива – вгнута.

5) Отже, точка з абсцисою $x = \frac{1}{2}$ є точкою перегину, ордината точки перегину $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, тобто $M_0(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ - точка перегину.

На проміжку $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ крива – опукла, а на проміжку $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ - угнута.

21.4 Асимптоти графіка функції.

При дослідженні функції важливо встановити форму її графіка при необмеженому віддаленні його змінної точки в нескінченність. Особливий

інтерес являє собою випадок, коли графік функції при віддаленні його змінної точки в нескінченність необмежено наближається до деякої прямої, яка називається асимптотою, поняття якої вже зустрічалося при вивченні гіперболи.

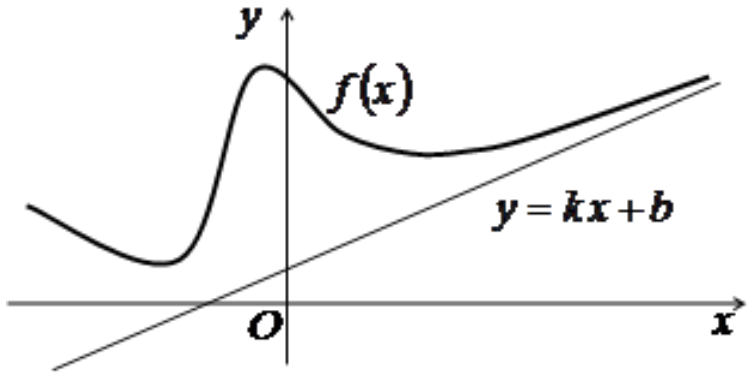
Розрізняють два види асимптот: вертикальні, похилі (горизонтальні).

Означення 1. Пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ справедлива рівність

$$f(x) = kx + b + o(x)$$

де $o(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Геометрично рівність означає, що графік $y = f(x)$ як завгодно близько наближається до графіка $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$:



Невідомі коефіцієнти k і b в рівнянні $y = kx + b$ можна знайти так (розглянемо випадок $x \to +\infty$):

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ і } b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$$

Формули мають місце і у випадку $x \to -\infty$.

Доведення: Відстань від точки M кривої до точки N прямої прямує до нуля, коли точка M рухається по кривій на нескінченність, тобто $\lim\limits_{x \to +\infty} MN = 0$

Знайдемо відстань MN як $f(x) - (kx + b\ )$, тоді маємо

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b\ )) = 0$$

або, те саме що

$$f(x) - (kx + b\ ) = 0 + \alpha(x), \text{ де } \alpha(x) \to 0, x \to +\infty$$

Розділивши обидві частини рівняння на x, отримаємо:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{kx + b + \alpha(x)}{x}, \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Отже, переходячи до границь маємо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} k + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{b}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{x}}_{\to 0} = k$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [b + \alpha(x)] = \lim_{x\to+\infty} b + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \alpha(x)}_{\to 0} = b \blacksquare$$

Зокрема, якщо $k = 0$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ і $y = b$ є рівнянням *горизонтальної* асимптоти.

Означення 2. Пряма $x = a$ називається *вертикальною асимптото* графіка функції $y = f(x)$, якщо справедлива хоча б одна рівність

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty \text{ або } \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$$

Відмітимо, що прям $x = a$ є вертикальною асимптотою для функції $y = f(x)$ тоді і тільки тоді, коли точка $x = a$ є точкою розриву другого роду (випадок, коли хоча б одна з односторонніх границь нескінченна) для функції $y = f(x)$.

Отже, задача знаходження вертикальних асимптот еквівалентна задачі відшукання точок розриву другого роду типу „*нескінченний стрибок*”.

Загальна схема дослідження функції

Для того, щоб дослідити функцію і за результатами дослідження побудувати її графік, потрібно:

1. Знайти область визначення заданої функції.
2. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
3. Знайти асимптоти кривої, якщо вони існують.
4. Знайти локальні екстремуми та інтервали монотонності функції.
5. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину.
6. Знайти точки перетину графіка з осями координат (якщо це можливо).
7. За результатами дослідження побудувати графік функції.

Для уточнення вигляду графіка можна додатково обчислити значення функції при декількох конкретних значеннях аргументу. Якщо дана функція є

періодичною з періодом T, то досить побудувати її графік на періоді $[0, T]$, після чого повторити цей графік на проміжках.

Якщо задана функція є парною, то достатньо провести дослідження і побудувати графік для $x \geq 0$, а потім відобразити отриманий графік симетрично відносно осі Oy. Якщо задана функція є непарною, то треба дослідити її для $x \geq 0$, а потім відобразити отриманий графік симетрично відносно початку координат.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{x+1}$ та побудувати її графік.

Функція не є періодичною. Дослідимо задану функцію на парність і непарність. $y(-x) = \dfrac{2\cdot(-x)-1}{(-x)+1} = \dfrac{-2x-1}{-x+1}$,

$y(-x) \neq y(x)$, $y(-x) \neq -y(x)$, отже, задана функція не є ні парною, ні непарною.

Знаходимо асимптоти. Функція має розрив в точці $x = -1$. Досліджуємо функцію при $x \to -1-0$ та $x \to -1+0$.

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{2x-1}{x+1} = \left\{\begin{matrix} x \to -1-0 \\ x+1 \to -0 \\ 2x-1 \to 2\cdot(-1)-1 = -3 \end{matrix}\right\} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{2x-1}{x+1} = \left\{\begin{matrix} x \to -1+0 \\ x+1 \to +0 \\ 2x-1 \to 2\cdot(-1)-1 = -3 \end{matrix}\right\} = -\infty.$$

Односторонні границі нескінченні, отже, пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою.

Знаходимо горизонтальні і похилі асимптоти.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x-1}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{0-0}{1+0} = 0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-1}{x+1}-0\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2.$$

Таким чином, при $x\to\pm\infty$ крива $y=\frac{2x-1}{x+1}$ має асимптоту $y=0\cdot x+2,\quad y=2$.

Знаходимо першу похідну

$$y'=\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)'=\frac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-(2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}.$$

Знаходимо критичні точки I роду (точки, в яких похідна y' не існує, або $y'=0$). $y'=\frac{3}{(x+1)^2}$ не існує при $x=-1$. Точок, в яких $y'(x)=0$, немає. Складемо таблицю зміни знаків похідної y'. Маємо два проміжки (–∞; –1) та (–1; +∞).

$y'(-2)=\frac{3}{(-2+1)^2}=3>0$, отже, $y'(x)>0$ на проміжку (–∞; –1) і функція зростає.

$y'(0)=\frac{3}{(0+1)^2}=3>0$, отже, $y'(x)>0$ на проміжку (–1; +∞) і функція зростає.

Точок локального екстремуму немає.

x	(– ∞; –1)	–1	(–1; + ∞)
y'	+	не існує	+
y	↗	не існує	↗

Знаходимо другу похідну y''.

$$y'' = \left(\frac{3}{(x+1)^2}\right) = \left(3\,(x+1)^{-2}\right)' = 3\cdot(-2)(x+1)^{-3} = -\frac{6}{(x+1)^3}$$

Знаходимо критичні точки II роду (точки, в яких похідна y'' не існує, або $y''=0$).

y'' не існує при $x+1=0$, $x=-1$. Точок, в яких $y''(x)=0$, немає. Складемо таблицю зміни знаків похідної y''. Маємо два проміжки $(-\infty;\,-1)$ та $(-1;\,+\infty)$.

$y''(-2) = -\dfrac{6}{(-2+1)^3} = 6 > 0$, отже, $y''(x) > 0$ на проміжку $(-\infty;\,-1)$ і функція вгнута.

$y''(0) = -\dfrac{6}{(0+1)^3} = -6 < 0$, отже, $y''(x) < 0$ на проміжку $(-1;\,+\infty)$ і функція опукла.

Оскільки при $x=-1$ функція не існує, точок перегину немає.

x	$(-\infty;\,-1)$	-1	$(-1;\,+\infty)$
y''	$+$	не існує	$-$
y	$\cup$	не існує	$\cap$

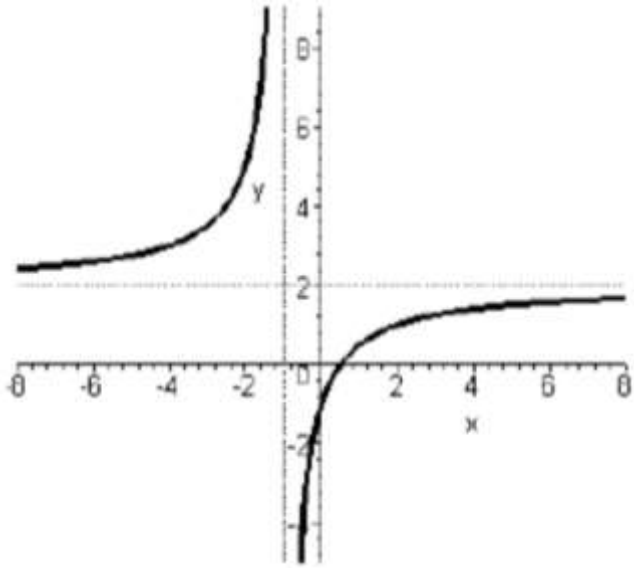
Знаходимо точки перетину з осями координат.

Вісь Ox: $y=0$, $\dfrac{2x-1}{x+1}=0$, $2x-1=0$, $x=\dfrac{1}{2}$.

Вісь Oy: $x=0$, $y=\dfrac{2\cdot 0-1}{0+1}=-1$.

Отримуємо точки $\left(\dfrac{1}{2};\,0\right)$ та $(0;\,-1)$.

За результатами дослідження будуємо графік функції.



Приклад 2. Дослідити функцію $y = (2x+1)e^{-2x}$ та побудувати її графік.

1) Функція визначена на всій числовій осі. Функція не є парною, оскільки $f(-x) \neq f(x)$; не є непарною, оскільки $f(-x) \neq -f(x)$. Функція не є періодичною.

2) Функція неперервна на всій числовій осі.

3,*а*) Оскільки функція є неперервною, вертикальних асимптот немає.

3,*б*) Шукаємо похилі асимптоти у вигляді $y = k_{1,2}x + b_{1,2}$. Тут k_1, b_1 відповідають випадку $x \to -\infty$, а k_2, b_2 - випадку $x \to +\infty$. Знайдемо невідомі коефіцієнти $k_{1,2}$, $b_{1,2}$ за формулами:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x+1)\cdot e^{-2x}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} e^{-2x} = 2\cdot(+\infty) = +\infty .$$

Отже, похилої асимптоти при $x \to -\infty$ (зліва) не існує.

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)\cdot e^{-2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x\cdot e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

за правилом Лопіталя:

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{2x} + 2xe^{2x}} = 0 ;$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left((2x+1)\cdot e^{-2x} - 0\right) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

за правилом Лопіталя:

$$b_2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2e^{2x}} = 0.$$

Отже, $y = 0$ - похила асимптота при $x \to +\infty$, (права горизонтальна асимптота).

4) Для визначення інтервалів монотонності та локальних екстремумів спочатку обчислимо похідну

$$y' = \left((2x+1) \cdot e^{-2x}\right)' = 2e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot (2x+1) = -4x \cdot e^{-2x}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y'.

Рівняння $y' = 0, \Rightarrow -4x \cdot e^{-2x} = 0$

має єдиний корінь $x = 0$ (єдина критична точка). За методом інтервалів отримуємо, що $y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ - на цьому інтервалі функція зростає і $y' < 0$ при $x \in (0, +\infty)$ - тут функція спадає. Оскільки при переході через точку $x = 0$ похідна змінює знак з „+” на „-”, то $x = 0$ є точкою локального максимуму, $y(0) = 1$.

5) Визначимо інтервали опуклості (вгнутості) і точки перегину.

Для цього обчислимо спочатку y'':

$$y'' = \left(-4x \cdot e^{-2x}\right)' = -4\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) = 4(2x-1)e^{-2x}.$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y''.

Рівняння $y'' = 0, \Rightarrow 4(2x-1) \cdot e^{-2x} = 0$

має єдиний корінь $x = \frac{1}{2}$. За методом інтервалів отримуємо, що $y'' < 0$ при $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ - тому на цьому інтервалі графік функції опуклий; $y'' > 0$ при $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ - графік угнутий.

Оскільки при переході через точку $x = \frac{1}{2}$ друга похідна змінює знак, то $x = \frac{1}{2}$ є точкою перегину, тобто $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$. Отже перегин: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{\mathrm{e}}\right)$.

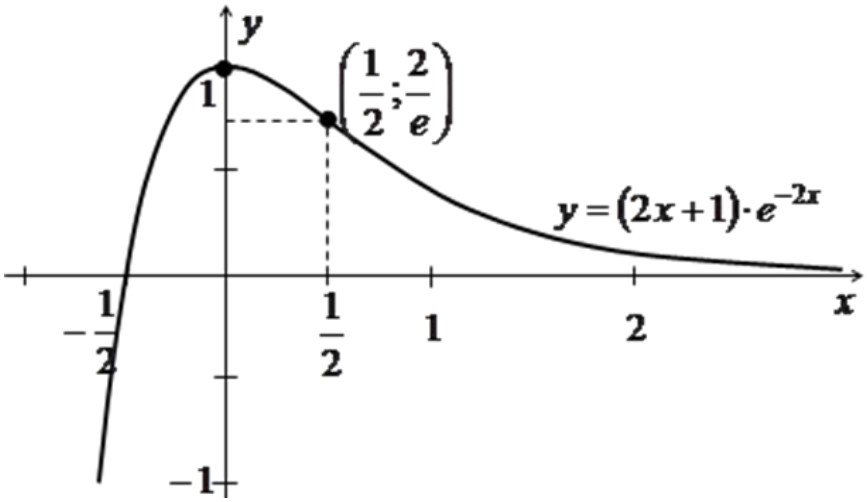
6) Знайдемо точки перетину графіка з координатними осями.

Графік функції перетинає вісь абсцис, якщо

$$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, \text{ отже, маємо точку } \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Графік перетинає вісь ординат, якщо $x = 0 \Rightarrow y = 1$, маємо точку (0,1).

7) За результатами дослідження будуємо ескіз графіка даної функції.



21.5 Найбільше і найменше значення функції на відрізку

При розв'язанні оптимізаційних задач велике значення мають задачі на знаходження найбільшого і найменшого значень (*глобального максимуму і глобального мінімуму*) або інакше *глобального екстремуму* функції на деякому проміжку.

Розглянемо функцію $f(x)$, що є визначеною і неперервною на відрізку $[a, b]$.

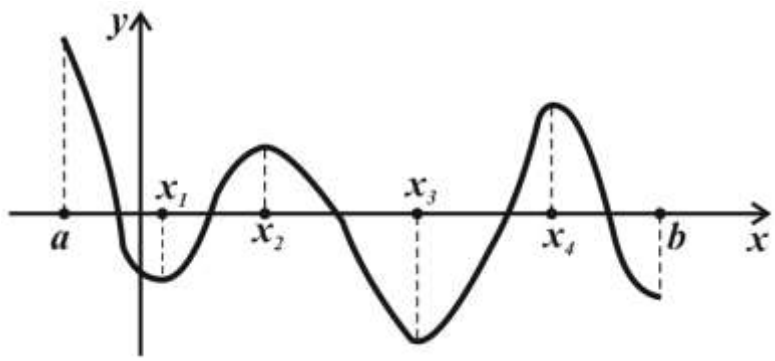
Неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $y = f(x)$, в силу другої теореми Веєрштрасса, досягає на цьому відрізку хоча б один раз найбільшого значення M і найменшого значення m. Тобто на $[a, b]$ знайдеться хоча б одна точка x_1, у якій $f(x_1) \geq f(x)$, де x – будь-яка інша точка відрізку, і знайдеться хоча б одна точка x_2, у якій $f(x_2) \leq f(x)$. Тут $f(x_1) = M, f(x_2) = m$.

Таким чином, найбільше (найменше) значення функція $f(x)$ може приймати або у внутрішній точці відрізка $[a, b]$ (тоді воно збігається з одним із локальних екстремумів функції), або на одному з кінців даного відрізка. Звідси зрозуміло, що для знаходження найбільшого M і найменшого m значень неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ потрібно:

1) знайти критичні точки, які належать відрізку $[a, b]$;

2) обчислити значення функції в цих критичних точках і в точках a і b;

3) з усіх отриманих значень вибрати найбільше M і найменше m і відмітити точки, в яких ці значення досягаються.



Скорочено записують так: $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1)$. Читають – найбільше значення (глобальний максимум) функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ дорівнює M і досягається в точці x_1. Аналогічно, $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2)$.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 1$ на відрізку $[-2,1]$.

Знаходимо похідну: $f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 15x^2$

Прирівнюємо її до нуля: $f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 + 20x^3 + 15x^2 = 0$.

Розв'язавши це рівняння отримаємо критичні точки: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, причому $x_1 = -3 \notin [-2,1]$. Обчислимо значення функції в критичних точках : x_2 і x_3, а також на кінцях відрізка $a = -2$, $b = 1$.

$f(-1) = -2$, $f(0) = -1$, $f(-2) = 7$ та $f(1) = 10$.

Отже,

$$\max_{x\in[-2,1]} f(x) = f(1) = 10, \ \min_{x\in[-2,1]} f(x) = f(-1) = -2$$

Відмітимо, що у випадку, коли неперервна функція має на відрізку лише одну точку локального максимуму (мінімуму), то можна стверджувати, що це і є точка глобального максимуму (мінімуму).

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ на відрізку $[-2,1]$.

Знаходимо похідну: $f'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

Стаціонарні точки: $x^3-2x^2-3x=0 \Rightarrow x\left(x^2-2x-3\right)=0 \Rightarrow x_1=0$ – перша стаціонарна точка.

Розв'яжемо квадратне рівняння $x^2-2x-3=0$ і одержимо ще дві стаціонарні точки: $x_2=-1$, $x_3=3$. Точка $x_3=3$ не належить заданому відрізку.

Знайдемо значення функції в стаціонарних точках, які належать заданому відрізку й на кінцях відрізка:

$$y(-2)=\frac{16}{3},\quad y(-1)=\frac{17}{12},\quad y(0)=2,\quad y(1)=\frac{1}{12}.$$

Найбільше значення дорівнює $y(-2)=\frac{16}{3}$, найменше значення дорівнює $y(1)=\frac{1}{12}$.

У прикладних екстремальних задачах, знаходження найменшого (найбільшого) значення функції, як правило, зводиться до знаходження мінімуму (максимуму). А тому, більший практичний інтерес мають не самі мінімуми і максимуми, а ті значення аргументу, при яких вони досягаються.

Приклад 3. Визначити розміри відкритого басейну, який має квадратне дно, щоб на облицювання стін і дна пішла найменша кількість матеріалу, якщо об'єм цього басейну повинен дорівнювати 32 m^3.

Позначимо сторону основи через x, а висоту через h. Тоді об'єм басейну буде дорівнювати $V = x^2 \cdot h = 32$. Звідси $h = \frac{32}{x^2}$.

Площа всієї поверхні басейну дорівнює:

$$S = x^2 + 4x \cdot h = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$$

Обчислимо похідну цієї функції:

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}$$

Знайдемо стаціонарні точки:

1)прирівняємо до нуля першу похідну: $2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2x^3-128}{x^2} = 0,$

$2x^3 - 128 = 0, \Rightarrow x^3 - 64 = 0, \Rightarrow x_1 = 4$

2)визначимо точки, у яких перша похідна $S'(x)$ не існує: $x^2 = 0, \Rightarrow x_2 = 0$

Стаціонарна точка $x_2 = 0$ за змістом задачі не підходить, тому що сторона основи басейну не може дорівнювати нулю. Тоді значення $x_1 = 4$ і буде єдиною відповіддю задачі. Зрозуміло, що це значення потрібно перевірити: чи дійсно при значенні $x_1 = 4$ кількість матеріалу буде найменшою. Перевірку проводять за допомогою дослідження знака похідної в околі точки $x_1 = 4$.

Якщо $x_1 = 4$, то висота басейна буде дорівнювати $h(4) = \frac{32}{4^2} = 2$. Тобто оптимальні розміри басейну: $x = 4$, $h = 2$.

Обчислимо в цьому випадку кількість матеріалу:

$$S = x^2 + 4x \cdot h = 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 48 \text{ m}^3$$