Лекція 23 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.

У цьому розділі, переходячи до викладу основ інтегрального числення, спочатку розглянемо невизначений інтеграл і методи його знаходження. Слід зазначити, що операція інтегрування складніша за диференціювання. Якщо диференціювання функцій проводиться за встановленими правилами і формулами, то інтегрування вимагає індивідуального підходу до кожної функції. Потрібні навички, щоб швидко і впевнено проводити перетворення підінтегрального виразу для приведення інтеграла до табличного вигляду.

Зауважимо, що таке перетворення далеко не завжди вдається виконати. Це пов'язано з тим, що навіть для порівняно простих функцій, невизначений інтеграл не завжди виражається за допомогою елементарних функцій.

23.1 Невизначений інтеграл та його властивості

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на інтервалі (a,b), якщо $F(x)$ диференційовна на (a,b) і для всіх $x \in (a,b)$ виконується

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

або

$$dF(x) = f(x)dx \tag{2}$$

Наприклад,

1) первісною функції $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$ є функція $F(x) = \frac{1}{5}x^5$ *х* тому що

$$F'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5\right)' = x^4 = f(x)$$

Але первісними будуть також функції

$F_1(x) = \frac{1}{5}x^5 + 1$, $F_2(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}$, і взагалі $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$ де C - довільна стала, оскільки $F'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5 + C\right)' = x^4, x \in \mathbb{R}$

2) первісною функції $f(x) = \sin x$ є функція $F(x) = -\cos x + C$ (де $x \in \mathbb{R}$, C - довільна стала), бо $F'(x) = (-\cos x + C)' = \sin x = f(x)$

Очевидно, що будь-яка з функцій $F(x) + C$, де C - довільна стала, також є первісною функції $f(x)$ на заданому проміжку. Тобто, задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно: якщо для функції $f(x)$ існує первісна

$F(x)$, то ця первісна не одна. Виникає запитання: як знайти всі первісні даної функції, якщо відома хоча б одна з них?

Теорема . Якщо функції $F_1(x)$ і $F_2(x)$ первісні функції $f(x)$ на інтервалі (a, b), то різниця між ними, дорівнює константі C.

Доведення. Так як $F_1(x)$ і $F_2(x)$ первісні функції $f(x)$ на інтервалі (a, b), то

$$f(x) = F_1{}'(x) \text{ і } f(x) = F_2{}'(x), \forall x \in (a, b).$$

Нехай $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$, тоді

$$\varphi'(x) = \left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Але з рівності $\varphi'(x) = 0$ випливає, що $\varphi(x) = C, \forall x \in (a, b)$

Таким чином, $F_1(x) - F_2(x) = C \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + C$. ■

З цієї теореми випливає, що множина функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ - одна з первісних функції $f(x)$, а C - довільна стала, визначає всю сукупність первісних заданої функції.

Означення. Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на проміжку (a, b) називається *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ для всіх } x \in (a, b) \qquad (3)$$

Тут знак $\int -$ називається *інтегралом*, $f(x)$ - *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ - *підінтегральним виразом*, C - довільною сталою.

Таким чином, з попередніх прикладів можемо записати:

$$\frac{1}{5}x^5 + C = \int x^4 dx \Leftrightarrow \int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$$

і також

$$-\cos x + C = \int \sin x\, dx \Leftrightarrow \int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

Операція знаходження невизначеного інтеграла від деякої функції називається *інтегруванням* цієї функції.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла

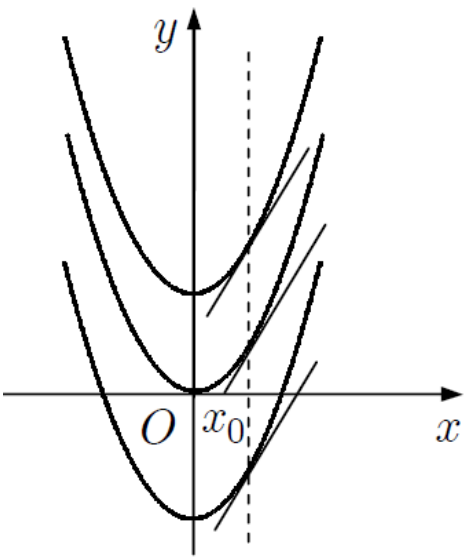
Означення. Графік первісної функції $y = F(x)$ називають *інтегральною кривою*.

З погляду геометрії, невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ являє собою сімейство всіх інтегральних кривих $y = F(x) + C$, кожна з яких може бути отримана з однієї інтегральної кривої $y = F(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Oy (зсувом кривої паралельно самій собі уздовж осі Oy)

Означення. Сукупность кривих $y = F(x) + C$ називають *сімейством інтегральними кривими*, усі дотичні до кривих у точках з абсцисами $x = x_0$ паралельні між собою.

Справді

$$(F(x) + C)'|_{x = x_0} = F'(x_0) = f(x_0) = k_{\text{дот.}}$$



Наприклад, $\int 2xdx = x^2 + C$, тут сімейством інтегральних кривих є сукупность парабол $y = x^2 + C$ з дотичними у точці $x = x_0$ що визначені кутовим коефіцієнтом $k_{\text{дот.}} = 2x_0$.

Крім того, криві сукупності не перетинають одна одну і не дотикаються одна до одної. Через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива.

Тобто, щоб з цієї множини кривих виділити певну інтегральну криву $F(x)$ достатньо задати її значення $F(x_0)$ в якій – небудь точці $x_0 \in (a, b)$.

Властивості невизначеного інтеграла

1 Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Дійсно, якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

2 Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Дійсно, якщо $dF(x) = f(x)dx$, то

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$$

3 Невизначений інтеграл від диференціалу деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Дійсно, якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

4 Сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$$

Дійсно,

$$\left(\int C \cdot f(x)dx\right)' = C \cdot f(x)$$

і

$$\left(\int C \cdot f(x)dx\right)' = C \cdot \left(\int f(x)dx\right)' = C \cdot f(x)$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох (і більше) функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Дійсно,

$$\left(\int (f(x) \pm g(x))dx\right)' = f(x) \pm g(x)$$

і

$$\left(\int (f(x) \pm g(x))dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) \pm g(x)$$

6. *Інваріантність формули інтегрування*: Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ - довільна функція, яка має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Дійсно, внаслідок інваріантності форми першого диференціала і властивості 3 маємо

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du,$$

Тоді

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C \blacksquare$$

Тобто, формула для невизначеного інтеграла залишається незмінною незалежно від того, чи є змінна інтегрування *незалежною змінною* або будь-якою *функцією* від неї, яка має неперервну похідну.

Наприклад, маємо що

$$\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$$

Користуючись властивістю 6, одержимо формулу для будь-якої неперервної функції $u = \varphi(x)$

$$\int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + C$$

Нехай, наприклад, $u = \sin x$, тоді можемо знайти невизначений інтеграл

$$\int \sin^4 x \, d \sin x = \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

або $u = \ln x$, $\int \ln^4 x \, d \ln x = \frac{1}{5}\ln^5 x + C$ і т.д.

Таким чином, кількість інтегралів, які обчислюються (або, як кажуть, ”*беруться*”), необмежено збільшується.

Виникає запитання: чи для всякої функції існує невизначений інтеграл? Виявляється, що не для всякої. Проте вірна теорема:

Теорема. Всяка *неперервна* на відрізку $[a; b]$ функція має на цьому відрізку *первісну*.

У зв’язку з цим надалі вважатимемо, що підінтегральна функція розглядається лише на тих відрізках, де вона *неперервна*.

Таблиця основних невизначених інтегралів

Знаходження первісної від даної функції є задачею складнішою, ніж задача знаходження за даною функцією її похідної.

Для полегшення інтегрування складається *таблиця основних інтегралів*,

яка формується на основі означення невизначеного інтеграла, властивостей інтегрування і таблиці похідних. Зазначимо, що в таблиці основних інтегралів змінна інтегрування може позначати як незалежну змінну x, так і функцію від незалежної змінної $u(x)$.

1	$\int dx = x + C$ або $\int du = u + C$	2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ або $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ або $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ або $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
5	$\int e^x dx = e^x + C$ або $\int e^u du = e^u + C$	6	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ або $\int \sin u\, du = -\cos u + C$
7	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ або $\int \cos u\, du = \sin u + C$	8	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ або $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ або $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$	10	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$ або $\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C$
11	$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$ або $\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C$	12	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$ або $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$
13	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$ або $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$	14	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ або $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C, a \neq 0$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ або $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C, a \neq 0$	16	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ або $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C, a \neq 0$
17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$ або $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C, a \neq 0$		

Правильність інтегрування перевіряються безпосередньо диференціюванням. Наприклад,

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)' =$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

23.2 Методи обчислення невизначеного інтегралу

Майстерність інтегрування полягає в умінні за допомогою властивостей невизначених інтегралів перетворити підінтегральний вираз до табличного, або спочатку хоча б спростити його. Для цього застосовуються різні методи інтегрування. Методи знаходження первісних (тобто інтегрування функцій) зводяться до вказівки ряду прийомів, виконання яких у багатьох випадках призводить до мети. Варто відзначити, що один і той же інтеграл може бути обчислений не єдиним методом.

23.2.1 Метод безпосереднього інтегрування

Суть цього методу полягає в *тотожному перетворенні* підінтегральної функції і *застосуванні властивостей* невизначеного інтеграла так, щоб початковий інтеграл зводився до одного або декількох табличних інтегралів.

1. $\int\left(x^2-2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x}\right)dx$.

Користуючись властивостями 4 та 5, будемо мати:

$$\int\left(x^2-2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x}\right)dx=\int x^2dx-\int 2x\sqrt{x}dx+\int 3\sqrt[3]{x}dx+\int\frac{5}{x}dx=\int x^2dx-2\int x^{3/2}dx+$$

$$+3\int x^{\frac{1}{3}}dx+5\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^{5/2}}{5/2}+3\frac{x^{4/3}}{4/3}+5\ln|x|+C=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}\sqrt{x^5}+\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4}+5\ln|x|+C.$$

2. $\int\left(5^x-\frac{3}{\cos^2 x}+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\int 5^x dx-3\int\frac{dx}{\cos^2 x}+4\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{5^x}{\ln 5}-3tgx+$

$+4\arcsin x+C$.

3. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}\right)^2dx=\int\left(x-2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{3}{\sqrt[5]{x}}+\frac{9}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx=\int\left(x-6x^{\frac{3}{10}}+9x^{-\frac{2}{5}}\right)dx=\frac{x^2}{2}-$

$$-6\cdot\frac{x^{13/10}}{13/10}+9\cdot\frac{x^{3/5}}{3/5}+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{60}{13}\sqrt[10]{x^{13}}+15\sqrt[5]{x^3}+C.$$

4. $$\int \frac{\sqrt[3]{x}+2x-x^4}{x^5}dx=\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^5}dx+2\int \frac{x}{x^5}dx-\int \frac{x^4}{x^5}dx=\int\left(x^{-\frac{14}{3}}+2x^{-4}-x^{-1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^{-11/3}}{-11/3}+2\frac{x^{-3}}{-3}-ln|x|+C=-\frac{3}{11\sqrt[3]{x^{11}}}-\frac{2}{3x^3}-ln|x|+C.$$

5. $$\int \frac{x^2dx}{1+x^2}=\int \frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}dx=\int 1dx-\int \frac{dx}{1+x^2}=x-arctgx+C.$$

Інтеграл не є табличним, тому за допомогою алгебраїчних перетворень треба підінтегральну функцію подати у такому вигляді, щоб можна було застосувати властивості невизначеного інтеграла та обчислити його. Для цього в чисельнику дробу додамо і віднімемо 1. Поділивши почленно $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})-\mathbf{1}$ на $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})$, отримаємо алгебраїчну суму двох табличних інтегралів.

6. $$\int ctg^2xdx=\int\left(\frac{1}{sin^2x}-1\right)dx=\int \frac{dx}{sin^2x}-\int dx=-ctgx-x+C.$$

7. $$\int\left(3sin6x-\frac{2}{5x-1}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx=3\int sin6xdx-2\int \frac{dx}{5x-1}+\int e^{\frac{x}{3}}dx=$$

Тут, крім властивостей 4 та 5, застосуємо правила інтегрування 6 – властивість інваріантності. Дістанемо:

$$3\int \sin 6x\,dx \boxed{=}$$

За таблицею маємо: $\int \sin \boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{x}=-\cos \boldsymbol{x}+C$

Або у загальному випадку, для будь-якої $u(x)$, наприклад, $u(x)=\mathbf{6x}$ маємо $\int \sin \underbrace{\mathbf{6x}}_{u}\,d(\underbrace{\mathbf{6x}}_{u})=-\cos \mathbf{6x}+C$

Створимо таку ж саму ситуацію у вхідному інтегралі, $\int \sin 6x\,dx$, де бракує нам $d6x$. Нагадаємо, що $d(\mathbf{6x})=(\mathbf{6x})'dx=\mathbf{6}dx$, тоді введемо множинники $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\cdot\int \sin \mathbf{6x}\cdot\underbrace{\mathbf{6}dx}_{=d(\mathbf{6x})}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\int \sin \mathbf{6x}\,d(\mathbf{6x})=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\cos \mathbf{6x}+C$

$$\boxed{=}\ 3\left(-\frac{1}{6}\cos 6x+C\right)$$

$$2\int\frac{dx}{5x-1}=\left\{\begin{array}{c}\int\frac{d\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}}=\ln|\boldsymbol{x}|+C,\text{або для } u=\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}\\ \int\frac{d(\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})}{\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}=\ln|\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|+C\\ d(\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})=(\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})'dx=\mathbf{5}dx\end{array}\right\}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\cdot\int\frac{1}{5x-1}\cdot\underbrace{\mathbf{5}dx}_{=d(\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})}=$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\int\frac{d(\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})}{\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}=2\left(\frac{1}{5}\ln|5x-1|+C\right)$$

$$\int e^{x/3}\,dx=\left\{\begin{array}{c}\int e^{\boldsymbol{x}}\,d\boldsymbol{x}=e^{\boldsymbol{x}}+C\text{ або } u=\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\\ \int e^{\boldsymbol{x}/\mathbf{3}}\,d\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\right)=e^{\boldsymbol{x}/\mathbf{3}}+C,\\ d\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\right)'dx=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}dx\end{array}\right\}=\mathbf{3}\cdot\int e^{\boldsymbol{x}/\mathbf{3}}\cdot\underbrace{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}dx}_{=d(\boldsymbol{x}/\mathbf{3})}=\mathbf{3}\int e^{\boldsymbol{x}/\mathbf{3}}\,d(\boldsymbol{x}/\mathbf{3})$$

$$=3e^{x/3}+C$$

Остаточно,

$$-\mathbf{2}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{ln}|\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|+\mathbf{3}\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}}+\boldsymbol{C}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{cos}\,\mathbf{6}\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{ln}|\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|+\mathbf{3}\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}}+\boldsymbol{C}.$$

8. $$\int\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}+\mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}\right)\boldsymbol{dx}=\int\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}+\left(\sqrt{\mathbf{5}}\boldsymbol{x}\right)^{\mathbf{2}}}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\left(\mathbf{2}\boldsymbol{x}\right)^{\mathbf{2}}}}\right)\boldsymbol{dx}=$$

$$3\int\frac{dx}{\left(\sqrt{8}\right)^2+\left(\sqrt{5}x\right)^2}=\left\{\begin{array}{c}\int\frac{d\boldsymbol{x}}{a^2+\boldsymbol{x}^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{\boldsymbol{x}}{a}+C\\ d\left(\sqrt{\mathbf{5}}\boldsymbol{x}\right)=\sqrt{\mathbf{5}}dx,dx=\frac{d\left(\sqrt{5}x\right)}{\sqrt{5}}\\ \int\frac{d\left(\sqrt{\mathbf{5}}\boldsymbol{x}\right)}{\sqrt{5}\left\{\left(\sqrt{8}\right)^2+\left(\sqrt{\mathbf{5}}\boldsymbol{x}\right)^2\right\}}\end{array}\right\}=\frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{8}}\arctan\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{8}}+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}=\left\{\begin{array}{c}\int\frac{d\boldsymbol{x}}{\sqrt{1-\boldsymbol{x}^2}}=\arcsin\boldsymbol{x}+C\\ d(\mathbf{2}\boldsymbol{x})=\mathbf{2}dx,dx=\frac{d(2x)}{2}\\ \int\frac{d(\mathbf{2}\boldsymbol{x})}{2\sqrt{1-(\mathbf{2}\boldsymbol{x})^2}}\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$$

Остаточно,

$$=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{10}}}\boldsymbol{arctg}\frac{\sqrt{\mathbf{5}}\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{arcsin}\,\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}.$$

23.2.2 Метод підстановки (заміни змінної)

У багатьох випадках вдається введенням замість змінної інтегрування x нової змінної t звести даний інтеграл $\int f(x)dx$ до нового інтегралу, який або міститься в таблиці основних інтегралів, або легко знаходиться іншим способом. Такий метод називається *методом підстановки* або *методом заміни змінної*.

Заміна змінної у невизначеному інтегралі виконується за допомогою підстановок *двох типів*:

1. Нехай потрібно знайти інтеграл $\int f(x)dx$.

Зробимо заміну змінної в підінтегральному виразі, вважаючи $x = \varphi(t)$, де функція $\varphi(t)$ - неперервна монотонна функція та має обернену $t = \varphi^{-1}(x)$, а також має неперервну похідну $\varphi'(t)$, тобто $dx = \varphi'(t)dt$. Тоді має місце рівність

$$\int f(x)dx = \begin{Bmatrix} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt \end{Bmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

Щоб довести рівність (4), доведемо, що диференціали її лівої і правої частин збігаються. Згідно властивості 2 невизначного інтегралу, диференціал лівої частини

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

де замість x і dx підставлені їх вирази через змінну t. Диференціал правої частини, згідно тієї ж властивості, дорівнює

$$d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Припустимо, що інтеграл, який стоїть в правій частині формули (4), знайдений, тобто

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C$$

Остаточно, для знаходження інтеграла у вигляді функції від x , необхідно розв'язати рівняння $x = \varphi(t)$, відносно t , тобто знайти обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$, і підставити її в $\Phi(t)$:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C \qquad (5)$$

(тут мається на увазі, що після інтегрування в правій частині рівності замість

змінної t ми підставимо її вираз через x , знайдений із заміни $x = \varphi(t)$).

Іноді зручніше виконати підстановку вказувати не x, як функцію від t, а, навпаки, визначати t як функцію від x.

2. Так, якщо інтеграл має вигляд

$$\int f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)dx$$

то його можна спростити за допомогою підстановки $t = \psi(x)$, $dt = \psi'(x)dx$ і знайти інтеграл аналогічно (5), тобто

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \begin{Bmatrix} t = \psi(x), \\ dt = \psi'(x)dx \end{Bmatrix} = \int f(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi(\psi(x)) + C \tag{6}$$

Підстановку $t = \psi(x)$ що застосовується для випадку коли підінтегральний вираз має форму

$$\boxed{f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)dx}$$

ще називають *інтегрування методом підведення під знак диференціалу*.

Зауваження: Підстановки $x = \varphi(t)$ або $t = \psi(x)$ підбирають так, щоб одержані після перетворень нові інтеграли були табличними, або зводились до табличних.

Приклади:

1. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Поклавши $x = t^3$, знайдемо $dx = 3t^2dt$. Ця підстановка призведе до того, що під знаком синуса з'явиться змінна інтегрування, а не корінь з неї. Отримаємо:

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{\sin t \cdot 3t^2dt}{\sqrt[3]{t^6}} = 3\int \sin tdt = -3\cos t + C.$$

Відповідь повинна бути виражена через початкову змінну x. Підставляючи в результат інтегрування $t = \sqrt[3]{x}$, дістанемо:

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}} = -3\cos\sqrt[3]{t} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left| \begin{array}{l} 1+e^x = t^2 \\ e^x dx = 2tdt \\ dx = \frac{2tdt}{t^2-1} \\ t = \sqrt{1+e^x} \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)\cdot\sqrt{t^2}} = \int \frac{2dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}} =$

Введемо змінну за формулою: $t = 1 + 2x^2$, тоді $dt = d(1 + 2x^2) = 4xdx$, тобто

$$\left| \begin{array}{l} 1+2x^2 = t \\ 4xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{4}tdt \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + C.$$

4. $\int \frac{\left(2\,ln\,x+3\right)^3}{x}dx =$

Введемо змінну за формулою: $t = 2\ln x + 3$, тоді $dt = d(2\ln x + 3) = \frac{2}{x}dx$, тобто

$$\left| \begin{array}{l} 2\,ln\,x+3 = t \\ \frac{2dx}{x} = dt \\ \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^3 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8}\left(2\,ln\,x+3\right)^4 + C.$$

Зауваження: Приклади 7,8 попереднього параграфу можно віднести до методу заміни змінної за другим типом - підведення під знак диференціалу, тоді u треба розглядати як нову змінну, для якої знаходемо її диференціал.

23.2.3 Метод інтегрування частинами

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ - функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int u(x)dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)du(x) \qquad (7)$$

Доведення: Диференціал добутку двох неперервних функцій $u(x)$ та $v(x)$ дорівнює

$$d\big(u(x) \cdot v(x)\big) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, отримаємо

$$\int d\big(u(x) \cdot v(x)\big) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x)$$

або

$$\int u(x)dv(x) = \int d\big(u(x) \cdot v(x)\big) - \int v(x)du(x)$$

Звідки

$$\int u(x)dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)du(x)$$

Тут вважається заданою ліва частина формули, тобто $\int udv$. Обчислення цього інтеграла зводиться до знаходження диференціала du функції $u(x)$ та функції $v(x)$ за відомим її диференціалом dv. Функція визначається неоднозначно, з точністю до довільної сталої C, тому вибирають ту функцію, яка має найпростіший вигляд (як правило, покладають $C = 0$)

Методом інтегрування частинами зручно обчислювати такі типи інтегралів:

1) інтеграли виду $\int P(x) \cdot a^{kx} dx$, $\int P(x) \cdot e^{kx} dx$, $\int P(x) \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$, де $P(x)$ - многочлен n-ого степеня від x, k - дійсне число . У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv - вираз, що залишився;

Приклади:

1. $\int x \cos x dx$.

Покладемо $u = x$, $dv = \cos x dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$.

Використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Надалі розв’язання прикладів наводяться в конспективному вигляді: після умови вказано вирази u, dv і du, v.

2. $\int (2x-3)\cdot 4^x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x-3, du = 2dx \\ dv = 4^x dx, v = \dfrac{4^x}{ln4} \end{array} \right| = (2x-3)\cdot \dfrac{4^x}{ln4} - \int \dfrac{2\cdot 4^x dx}{ln4} =$

$= \dfrac{1}{ln4}(2x-3)\cdot 4^x - \dfrac{2}{ln4}\int 4^x dx = \dfrac{1}{ln4}(2x-3)\cdot 4^x - \dfrac{2}{ln4}\cdot \dfrac{4^x}{ln4} + C = \dfrac{1}{ln4}(2x-3)\cdot 4^x -$

$- \dfrac{2}{ln^2 4}\cdot 4^x + C.$

2) інтеграли виду $\int P(x) ln\, x dx$, $\int P(x) arcsin\, x dx$, $\int P(x) arccos\, x dx$, $\int P(x) arctgx dx$, $\int P(x) arcctgx dx$. У цих інтегралах слід взяти за u множник $ln\, x$, $arcsin\, x$, $arccos\, x$, $arctgx$, $arcctgx$, а за dv - $P(x)dx$;

Приклади:

3. $\int lg\, x dx = \left| \begin{array}{l} u = lg\, x, du = \dfrac{dx}{x\, ln10} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x\, lg\, x - \dfrac{1}{ln10}\int x\cdot \dfrac{dx}{x} = x\, lg\, x - \dfrac{1}{ln10}x + C.$

4. $\int x\cdot arctgx dx = \left| \begin{array}{l} u = arctgx, du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \dfrac{x^2}{2}\cdot arctgx - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{x^2 dx}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{2} arctgx -$

$- \dfrac{1}{2}\int \dfrac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx = \dfrac{x^2}{2} arctgx - \dfrac{1}{2}\int \left(1 - \dfrac{1}{1+x^2}\right) dx = \dfrac{x^2}{2} arctgx - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} arctgx + C.$

3) інтеграли виду $\int e^{\alpha x}\cdot sin\, \beta x dx$, $\int e^{\alpha x}\cdot cos\, \beta x dx$, де α, β - дійсні числа.

Тут після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв’язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклад:

5. $\int e^{2x} cos\, 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{2x}, du = 2e^{2x} dx \\ dv = cos\, 3x dx, v = \dfrac{1}{3} sin\, 3x \end{array} \right| = e^{2x}\cdot \dfrac{1}{3} sin\, 3x - \dfrac{2}{3}\int e^{2x} sin\, 3x dx.$

Складається враження, що інтегрування частинами не призвело до цілі, інтеграл не спростився. Проте спробуємо ще раз застосувати цей метод до

отриманого інтеграла.

Нехай $\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = I$.

$$I = \left| \begin{matrix} u = e^{2x}, du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin 3x dx, v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}e^{2x} \cdot \sin 3x - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx \right] = \frac{1}{3}e^{2x} \cdot \sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx.$$

Застосувавши двічі інтегрування частинами, дістали рівняння, яке містить шуканий інтеграл у якості невідомого. Ми отримали, що

$$\mathbf{I} = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\mathbf{I}.$$

З цього рівняння знаходимо **I:**

$$\mathbf{I} + \frac{4}{9}\mathbf{I} = e^{2x}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x\right), \quad \mathbf{I} = \frac{9}{13}e^{2x}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x\right) + C.$$

Також інтегрування частинами призводить до *рекурентної формули*, тобто формули, яка дозволяє послідовно обчислювати інтеграли, виходячи з відомого початкового інтеграла.

Знайти

$$I_k = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^k}$$

Проведемо над підінтегральною функцією тотожні перетворення

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{(a^2 + x^2) - x^2}{(a^2 + x^2)^k} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{(a^2 + x^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^k}$$

Тобто

$$I_k = \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^k} =$$

До останнього інтегралу застосуємо формулу (7) інтегрування частинами

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^k} = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{x dx}{(a^2+x^2)^k} & v = -\frac{1}{2(k-1)(a^2+x^2)^{k-1}} \end{matrix} \right\} =$$

$$-\frac{x}{2(k-1)(a^2 + x^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{k-1}}$$

Підставляючи останній результат в отриманий раніше вираз даного інтегралу, матимемо

$$I_k = \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{2(k-1)(a^2+x^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{2(k-1)} \underbrace{\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{k-1}}}_{=I_{k-1}}$$

або

$$I_k = \frac{1}{a^2} \cdot I_{k-1} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{2(k-1)(a^2+x^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{2(k-1)} \cdot I_{k-1}$$

$$\boxed{I_k = \frac{x}{2a^2(k-1)(a^2+x^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot I_{k-1}}$$