Лекція 24. ІНТЕГРУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. Інтегрування Раціональних Функцій

24.1 Деякі відомості про многочлени

Означення. Многочленом m-го степеня (або цілою раціональною функцією) називається вираз вигляду

$$P_m(x) = A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \qquad (1)$$

де $m \in \mathbb{N}$ – степінь многочлена, A_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ – сталі коефіцієнти: дійсні або комплексні, $A_m \neq 0$.

Два многочлени вигляду (1) *тотожно рівні* тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти одного многочлена дорівнюють відповідним коефіцієнтам другого.

Означення. Коренем многочлена називається таке число a (дійсне або комплексне), яке обертає многочлен на нуль, тобто $P_m(a) = 0$.

Теорема Безу (Безу Етьєн (1730 - 1783) – французький математик) Число x_1 є коренем многочлену $P_m(x)$ тоді і тільки тоді, коли многочлен $P_m(x)$ ділиться без остачі на множник $x - x_1$, тобто

$$P_m(x) = (x - x_1) \cdot P_{m-1}(x)$$

де $P_{m-1}(x)$ – деякий многочлен степеня $m - 1$

Теорема Гаусса (Гаусс Карл Фрідріх (1777–1855) – німецький математик) (основна теорема алгебри). Усякий многочлен $P_m(x)$ степеня $m \geq 1$ має принаймні один корінь, дійсний або комплексний.

З цієї теореми та результату попередньої теореми випливає наступне:

Теорема. Будь-який многочлен $P_m(x)$ степеня m може бути представлений у вигляді добутку m лінійних множників вигляду $(x - x_k)$ і коефіцієнта $A_m \neq 0$ при найбільшій степені x, тобто

$$P_m(x) = A_m(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_m) \qquad (2)$$

Означення. Якщо серед коренів многочлена будь-який корінь зустрівся k разів, то він називається *коренем кратності* k. При $k = 1$ корінь називається *простим*.

Збираючи разом множники, які відповідні однаковому кореню, наприклад x_1 зустрівся k_1 разів, x_2 - k_2 разів і т.д., розклад (2) можна записати у вигляді

$$P_m(x) = A_m(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_l)^{k_l} \qquad (3)$$

де всі корені x_1, x_2, …, x_l різні і $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = m$

З формули (3) виходить, що будь-який многочлен m -го степеня має рівно m коренів, якщо кожен корінь рахувати стільки разів, яка його кратність.

Так, *наприклад*, многочлен

$$P_7(x) = 3(x - 2)^4(x - 1)^2(x + 4)$$

має наступні корені: $x_1 = 2$ – кратності 4; $x_2 = 1$ – кратності 2; $x_3 = -4$ – простий корінь.

Теорема. Якщо многочлен $P_m(x)$ з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь $x_1 = a + bi$, то спряжене комплексне число $\bar{x}_1 = a - bi$ також є коренем цього многочлена.

Тоді, за теоремою Безу маємо

$$P_m(x) = (x - x_1) \cdot (x - \bar{x}_1) \cdot P_{m-2}(x)$$

Водночас,

$$(x - x_1) \cdot (x - \bar{x}_1) = \big(x - (a + bi)\big) \cdot \big(x - (a - bi)\big) =$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q\ ,$$

де $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$

Таким чином, добуток лінійних множників, відповідних комплексно спряженим кореням, можна замінити квадратним тричленом з дійсними коефіцієнтами, дискреминант якого від'ємний. Тоді

$$P_m(x) = (x^2 + px + q\ ) \cdot P_{m-2}(x)$$

Теорема має місце і для кратних коренів.

На основі вищевикладеного будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна представити в наступній формі:

$$P_m(x) = A_m(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_s)^{k_s} \cdot$$

$$(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_tx+q_t)^{l_t} \qquad (4)$$

де $k_1+k_2+\cdots+k_s+2\cdot(l_1+l_2+\cdots+l_t)=m$

У цьому розкладі *лінійні* множники відповідають *дійсному* кореню, а *квадратні тричлени – комплексному* та *комплексно спряженим* кореням многочлена.

24.2 Деякі відомості про раціональні дроби

Означення. Раціональним дробом (дробово-раціональною функцією) називається функція, яка дорівнює частці двох многочленів.

Розглянемо дробово-раціональну функцію (раціональний дріб), яка являє собою відношення двох многочленів степенів m і n із коефіцієнтами $A_m\neq 0$ та $B_n\neq 0$ відповідно:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}+\cdots+A_1x+A_0}{B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+\cdots+B_1x+B_0} \qquad (5)$$

Означення. Раціональний дріб називають *правильним*, якщо степінь чисельника менше від степеня знаменника $m<n$. У противному разі, а саме при $m\geq n$, дріб називають *неправильним*.

Якщо раціональний дріб – *неправильний* ($m\geq n$), то діленням многочлена $P_m(x)$ на $Q_n(x)$ його можна подати у вигляді суми <u>*цілої раціональної функції*</u> (многочлену) та <u>*правильного раціонального дробу*</u>, тобто

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=L(x)+\frac{r(x)}{Q_n(x)} \qquad (6)$$

де многочлен $L(x)$ – ціла частина від ділення, а многочлен $r(x)$ - залишок від ділення.

Ця операція називається *виділенням цілої частини раціонального дробу*

Наприклад, для неправильного раціонального дробу

$$\frac{x^4-5x+9}{x-2}$$

Розділимо чисельник на знаменник в стовпчик (за правилом «ділення кутом»)

$$\begin{array}{l} _\,x^4-5x\ +9\,|x-2 \\ \quad \underline{x^4-2x^3}\quad |x^3+2x^2+4x+3 \\ \quad _2x^3-5x\ +\ 9 \end{array}$$

$$\underline{2x^3 - 4x^2}$$
$$_4x^2 - 5x + 9$$
$$\underline{4x^2 - 8x}$$
$$_\ 3x + 9$$
$$\underline{3x - 6}$$
$$15$$

Отримаємо частину $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ і залишок $r(x) = 15$. Отже,

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = \underbrace{x^3 + 2x^2 + 4x + 3}_{L(x)} + \frac{\overbrace{15}^{r(x)}}{x - 2}$$

Часто доводиться ділити многочлен на двочлен $x - c$. У цьому випадку зручно користуватися наступною схемою скороченого ділення (*схемою Горнера*[1]):

$$\begin{array}{c|c} + \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n & c \\ \quad\quad a_0c \quad b_1c \quad \dots \quad b_{n-1}c & \\ \hline a_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n = R. & \end{array}$$

Приклад 2. Знайти $(2x^4 + 3x^2 + x - 5) : (x + 2)$

○ Складемо схему Горнера:

$$\begin{array}{c|c} 2 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad -5 & -2 \\ + \quad -4 \quad 8 \quad -22 \quad 42 & \\ \hline 2 \quad -4 \quad 11 \quad -21 \quad 37 = R. & \end{array}$$

Таким чином, ми отримали частку $2x^3 - 4x^2 + 11x - 21$ і остачу 37. Отже, використовуючи (1.34), отримаємо

$$2x^4 + 3x^2 + x - 5 = (2x^3 - 4x^2 + 11x - 21) \cdot (x + 2) + 37. \ \bullet$$

Лема 1. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб. Якщо число a є дійсним коренем кратності $\alpha \geq 0$ многочлена знаменника $Q(x)$, тобто

$$Q(x) = (x - a)^k Q_*(x) \text{ і } Q_*(a) \neq 0,$$

то існують дійсне число A і многочлен $P_*(x)$ з дійсними коефіцієнтами такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{P_*(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_*(x)}, \tag{7}$$

де дріб $\frac{P_*(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_*(x)}$ також є правильним.

Доведення: Напишемо тотожність

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{P(x)-AQ_*(x)}{(x-a)^{\alpha}Q_*(x)},$$

яка справджується при будь-якому A і визначимо сталу A так, щоб многочлен $P(x) - AQ_*(x)$ ділився на $x - a$, тобто визначимо A з умови

$$P(a) - AQ_*(a) = 0$$

Оскільки, за умовою, $Q_*(a) \neq 0$, то звідси $A = \frac{P(a)}{Q_*(a)}$. При такому A матимемо

$$P(x) - AQ_*(x) = P(x) - \frac{P(a)}{Q_*(a)}Q_*(x) = (x-a)P_*(x),$$

і другий доданок в правій частині формули можна скоротити на $x - a$, в результаті одержимо дріб вигляду $\frac{P_*(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_*(x)}$. ■

Лема 2. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб. Якщо комплексне число $z = a + ib$ є коренем кратності $\beta \geq 0$ многочлена $Q(x)$, тобто

$$Q(x) = (x^2 + px + q\ )^{\beta}Q_*(x) \text{ і } Q_*(z) \neq 0,$$

а $x^2 + px + q = (x - z) \cdot (x - \bar{z})$ то існують дійсні числа M і N і многочлен $P_*(x)$ з дійсними коефіцієнтами такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}} + \frac{P_*(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}Q_*(x)} \tag{8}$$

де дріб $\frac{P_*(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}Q_*(x)}$ також є правильним.

Доведення: Напишемо тотожність

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}} + \frac{P(x)-(Mx+N)Q_*(x)}{(x^2+px+q)^{\beta}Q_*(x)},$$

яка справджується при будь-яких M і N. Виберемо M і N так, щоб многочлен $P(x) - (Mx + N)Q_*(x)$ ділився на $x^2 + px + q = (x - z)(x - \bar{z})$, тобто визначимо M і N з умови

$$P(z) - (Mz + N)Q_*(z) = 0.$$

Оскільки, за умовою, $Q_*(z) \neq 0$, то звідси $Mz + N = \frac{P(z)}{Q_*(z)}$.

Нехай $\frac{P(z)}{Q_*(z)} = A + iB$, при такому одержимо M і N як $M(a+ib) + N = A + iB$ $\Rightarrow M = \frac{B}{b}$ і $N = A - \frac{a}{b}B$.

Тоді матимемо $P(x) - (Mx+N)Q_*(x) = (x^2+px+q)P_*(x)$, і другий доданок в правій частині формули можна скоротити на x^2+px+q, в результаті одержимо дріб вигляду $\frac{P_*(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}Q_*(x)}$. ■

На основі вищевикладеного для будь-якого правильного раціонального дробу має місце твердження:

Теорема. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб, $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами. Якщо многочлен знаменника може бути розкладений за лінійними та квадратними множниками,

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$$

де x_i, $i = 1, \ldots, s$ - різні дійсні корені многочлена $Q(x)$ кратності k_i, $i = 1, \ldots, s$, а $x^2+p_jx+q_j = (x-z_j)\cdot(x-\bar{z}_j)$, $j = 1, \ldots, t$ - різні комплексні корені многочлена $Q(x)$ кратності l_j, $j = 1, \ldots, t$, то існують дійсні числа $A_i^{(\alpha)}$, $i = 1, \ldots, s$, $\alpha = k_i$, $i = 1, \ldots, s$ та $N_j^{(\beta)}$ і $M_j^{(\beta)}$, $j = 1, \ldots, t$, $\beta = l_j$, $j = 1, \ldots, t$ такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{k_1}^{(1)}}{x-x_1} + \frac{A_{k_1}^{(2)}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}^{(s)}}{(x-x_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{A_{k_s}^{(1)}}{x-x_s} + \frac{A_{k_s}^{(2)}}{(x-x_s)^2} + \cdots$$
$$+ \frac{A_{k_s}^{(s)}}{(x-x_s)^{k_s}} + \frac{N_{l_1}^{(1)}x + M_{l_1}^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{N_{l_1}^{(2)}x + M_{l_1}^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{N_{l_1}^{(t)}x + M_1^{(t)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \cdots$$
$$+ \frac{N_{l_t}^{(1)}x + M_{l_t}^{(1)}}{x^2+p_tx+q_t} + \frac{N_{l_t}^{(2)}x + M_{l_t}^{(2)}}{(x^2+p_tx+q_t)^2} + \cdots + \frac{N_{l_t}^{(t)}x + M_{l_t}^{(t)}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} \tag{9}$$

Тобто правильна раціональна дроб може бути представлена скінченною сумою *найпростіших раціональних функцій*

1-го типу: $\frac{A}{x-a}$, 2-го типу: $\frac{A}{(x-a)^n}$, 3-го типу: $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, та 4-го типу: $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$,

де тричлен $x^2 + px + q$ з дійсними коефіцієнтами має від'ємний дискреминант.

Приклади розкладання раціонального дробу на елементарні дроби. Метод невозначених коефіцієнтів

Приклад 1.

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x}$$

Розв'язок. функція $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x}$ — це правильний раціональний дріб, знаменник якого $x^3 + 2x^2 - 8x$ розкладається на множники $x(x - 2)(x + 4)$, тому даний дріб розкладається на суму найпростіших дробів типу I:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+4}.$$

Невідомі коефіцієнти A, B, C будемо знаходити методом невизначених коефіцієнтів. Для цього праву частину одержаної вище рівності необхідно привести до спільного знаменника. Отримаємо

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 + 8x} = \frac{A^{(x-2)(x+4)}}{x} + \frac{B^{x(x+4)}}{x-2} + \frac{C^{x(x-2)}}{x+4} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x+4) + Bx(x+4) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+4)} =$$

$$= \frac{Ax^2 + 2Ax - 8A + Bx^2 + 4Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x+4)}.$$

Знаменники в обох частинах рівні, тому і чисельники повинні бути рівні, тобто

$$x^2 - 2x + 2 = Ax^2 + 2Ax - 8A + Bx^2 + 4Bx + Cx^2 - 2Cx,$$
$$x^2 - 2x + 2 = (A + B + C)x^2 + (2A + 4B - 2C)x - 8A.$$

Остання рівність можлива лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності рівні, тобто

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B+C=1 \\ x & 2A+4B-2C=-2 \\ x^0 & -8A=2 \end{array}\Bigg\}$$

Отримали систему рівнянь, з якої знаходимо невизначені коефіцієнти

$$\begin{cases} B+C=\dfrac{4}{5} \\ 2B-C=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{6},\ C=\frac{13}{12}$$

Підставляємо знайдені значення A, B, C в схему розкладу і отримуємо розклад підінтегральної функції:

$$\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x} = \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{\frac{13}{12}}{x+4}.$$

24.3 Інтегрування раціональних дробів

Отже, при інтегруванні дробно-раціональній функції (6), маємо що

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx = \int L(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{Q_n(x)}\,dx,$$

де інтеграл від $L(x)$ знаходеться за правилами інтегрування степеневої функції, а інтеграл від правильної раціональної дробі $\frac{r(x)}{Q_n(x)}$ за теоремою (9). Прицьому, інтегрування правильної раціональної дробі за теоремою (9) зводиться до знаходження серії інтегралів виду:

$$1.\ \int \frac{A}{x-a}\,dx;\ 2.\ \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx;\ 3.\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx;\ 4.\ \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$

24.3.1 Інтегрування найпростіших дробів

Серед правильних дробів розрізняють чотири типи так званих найпростіших дробів.

Означення. Раціональні дроби вигляду

$$1.\ \frac{A}{x-a};\ 2.\ \frac{A}{(x-a)^n};\ 3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ 4.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

де A, M, N, a, p, q – дійсні числа, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, а тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4\,q < 0$ називаються *найпростішими дробами* першого, другого, третього та четвертого типів.

Розглянемо методи їх інтегрування:

$$I.\quad \int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

$$II.\quad \int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{A}{-n+1}\cdot(x-a)^{1-n} + C.$$

Приклади

1. $\int \frac{dx}{x+5}dx = \left\| \begin{matrix} t = x+5 \\ dt = dx \end{matrix} \right\| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+5| + C$

2. $\int \frac{dx}{2x-7}dx = \left\| \begin{matrix} t = 2x-7 \\ dt = 2dx, \\ dx = dt/2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-7| + C$

3. $\int \frac{dx}{(x-3)^5}dx = \left\| \begin{matrix} t = x-3 \\ dt = dx \end{matrix} \right\| = \int \frac{dt}{t^5} = -\frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{4(x-3)^4} + C$

$$III.\quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx =$$

Для знаходження інтегралів від функцій, що містять квадратний тричлен, для перетворення їх до формул інтегрування необхідно спочатку виділити повний квадрат із квадратного тричлена, в результаті чого він перетвориться на квадратний двочлен.

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a})=$$

$$=a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})=a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2})=$$

$$=a((x+\frac{b}{2a})^2\pm k^2).$$

Подальші інтеграли вказаних видів можна звести до табличних формул інтегрування.

Приклад 1. $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$

Розв'язок. Виділимо із квадратного тричлена повний квадрат $x^2+4x+8=x^2+2\cdot 2x+2^2-2^2+8=(x+2)^2+4=(x+2)^2+2^2$.

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+2^2}.$$

Позначемо $u=x+2$, $a=2$, тоді $du=d\,(x+2)=dx$. Використаємо формулу (14) табличних інтегралів:

$$\int\frac{du}{u^2+2^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}+C=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}+C$$

Приклад 2. $\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$.

Розв'язок. Нехай $t=x^2-2x-5$, звідки $dt=(2x-2)dx$. Щоб одержати в чисельнику $(2x-2)dx$, спочатку вираз $(x+3)$ помножимо на 2, а потім поділимо на 2. Одержали $\frac{1}{2}(2x+6)$, а потім від одержаного виразу віднімемо 2, та додамо таке ж число:

$$\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+3)}{x^2-2x-5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6-2+2}{x^2-2x-5}dx.$$

Розіб'ємо на доданки так, щоб перший інтеграл зводився до формули $\int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C$.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+6-2+2}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-2}{x^2-2x-5}+\frac{6+2}{x^2-2x-5}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x-5}dx + \frac{1}{2}\int\frac{8}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot 8\int\frac{8}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4\int\frac{dx}{x^2-2x-5}.$$

В останньому інтегралі виділимо повний квадрат:

$$x^2-2x-5 = x^2-2x+1-1-5 = (x-1)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2.$$

Тоді

$$\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4\int\frac{dx}{(x-1)^2-(\sqrt{6})^2} =$$

Позначемо $u = x-1$, $a = \sqrt{6}$, тоді $du = d\,(x-1) = dx$. Використаємо формулу (16) табличних інтегралів:

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C.$$

Зауважемо, вищевикладений підхід щодо інтегрування дробів 3-го типу також застосовується для інтегрування дробів *з квадратним коренем від квадратного тричлену в знаменнику дробу*

Приклад 3. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

Розв'язок. Перетворимо тричлен $2-6x-9x^2$, виділивши повний квадрат:

$$2-6x-9x^2 = -(9x^2+6x-2) = -((3x)^2+2\cdot 3x+1-1-2) =$$

$= -((3x+1)^2 - 3) = 3 - (3x+1)^2 = (\sqrt{3})^2 - (3x+1)^2.$

Маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(3x+1)^2}}.$$

Позначимо через $u = 3x + 1$, $a = \sqrt{3}$, звідки $3dx = du$, $dx = \frac{1}{3}du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(3x+1)^2}} = \int \frac{1/3du}{(\sqrt{3})^2-u^2} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{u}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}} +$$
$$+ C.$$

Приклад 4. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx.$

Розв'язок. Квадратний тричлен $x^2 + 4x + 10 = t$, звідси $dt = (2x + 4)dx$. Перетворимо чисельник так, щоб він містив вираз $dt = (2x + 4)dx$.

$$(5x+3) = \frac{5}{2}(\frac{2}{5}(5x+3) = \frac{5}{2}(2x+\frac{6}{5}) = \frac{5}{2}(2x+4+\frac{6}{5}-4) =$$

$$= \frac{5}{2}((2x+4) - \frac{14}{5}) = \frac{5}{2}(2x+4) - 7.$$

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \int \frac{5/2(2x+4)-7}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx -$$

$$-7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} - 7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C = \frac{5}{2}\frac{\sqrt{t}}{1/2} -$$

$$-7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C = 5\sqrt{x^2+4x+10} -$$

$$-7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C.$$

Інтегрування найпростіших правильних дробів IV типу виконується за формулою:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = -\frac{M}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{m-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot I_m$$

для $m \geq 2$.

Якщо зазначити $t = x + \frac{p}{2}$ та $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, тоді інтеграл I_m має вигляд:

$$Im = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$$

та визначається $m-1$ кратним застосуванням рекурентної формули ()

$$I_m = \frac{1}{2a^2(m-1)}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot I_{m-1}$$

де $I_{m-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}}$

Приклад 5.

$$J_3 = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3}$$

Тут $a^2 = 1$, $m = 3$. Оскільки

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C$$

то

$$J_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}J_1 + \frac{t}{2\cdot(2-1)\left(t^2+1\right)} = \frac{1}{2}arctgt + \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + C$$

Звідки

$$J_3 = \frac{3}{4}J_2 + \frac{t}{4\left(t^2+1\right)} = \frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}arctgt + \frac{t}{2\left(t^2+1\right)}\right) + C$$

24.3.2 Алгоритм інтегрування раціональних функцій

1. Розглянути дробово-раціональну функцію (раціональний дріб), якщо раціональний дріб неправильний, то діленням можна подати його у вигляді суми цілої раціональної функції та правильного раціонального дробу;

2. Розкласти многочлен у знаменнику на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням;

3. Розкласти правильний дріб за теоремою на елементарні дроби невизначені коефіцієнти;

4. Знайти невизначені коефіцієнти;

5. Обчислити інтеграли від цілої раціональної функції та суму інтегралів від знайдених елементарних дробів

Приклад. $$\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx.$$

Розв'язок. Підінтегральна функція – це правильний нескоротний дріб, знаменник якого: $x^4+x=x(x^3+1)=x(x+1)(x^2-x+1)$. Маємо, що знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники, та два дійсних кореня $x=0$ та $x=-1$, то даний дріб розкладається на суму найпростіших дробів I-го та III-го типу

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Невідомі коефіцієнти A, B, M та N будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів. Для цього праву частину рівності потрібно привести до спільного знаменника, отримаємо:

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{A(x^3+1)+B_x(x^2-x+1)+(Mx+N)(x^2+x)}{x(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях букви x ,ми отримуємо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів A, B, M, N

$$\begin{array}{c|c} x^3 & A+B+M=1, \\ x^2 & -B+M+N=4, \\ x & B+N=-2, \\ x^0 & A=1. \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} B+M=0, \\ -B+M+N=4, \\ B+N=-2, \\ A=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M=2, \\ N=0, \\ B=-2, \\ A=1. \end{cases}$$

Отже, розклад підінтегральної функції приймає вигляд

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{1}{x}+\frac{-2}{x+1}+\frac{2x+0}{x^2-x+1}.$$

Інтегруючи цю рівність, отримаємо:

$$\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{-2}{x+1}dx+\int\frac{2xdx}{x^2-x+1}=$$

$$=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx=\ln|x|-2\ln|x+1|+$$

$$+\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\ln|x|-2\ln|x+1|+\ln|x^2-x+1|+$$

$$+\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\ln|x|-2\ln|x+1|+\ln|x^2-x+1|+$$

$$+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\ln|x|-2\ln|x+1|+\ln|x^2-x+1|+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

24.3.3 Інші методи знаходження невизначених коефіцієнтів

Крім методу невизначених коефіцієнтів існують інші підходи щодо обчислення невідомих коефіцієнтів у розкладі (9) правильної дробово-раціональної функції.

2. *Спосіб зручних значень.* Сутність методу продемонструємо на розкладанні дробу $\frac{6x^3-11x^2+10x-9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$ на суму елементарних.

Отже,

$$\frac{6x^3-11x^2+10x-9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$

$$= \frac{A(x-2)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}.$$

Звідки маємо рівність

$$6x^3-11x^2+10x-9 =$$

$$= A(x-2)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x-2).$$

Підставимо в цю рівність значення

$$x=1 \Rightarrow -4=-2A \Rightarrow A=2;$$

$$x=2 \Rightarrow 15=5B \Rightarrow B=3;$$

$$x=0 \Rightarrow -9=-2A-B+2D \Rightarrow D=-1;$$

$$x=-1 \Rightarrow -3=-\frac{A}{2}-\frac{B}{3}+\frac{-C+D}{2} \Rightarrow C=1.$$

Перші два «зручних» значення — дійсні корені знаменника. Отже,

$$\frac{6x^3-11x^2+10x-9}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}+\frac{x-1}{x^2+1}.$$

3. *Спосіб домноження (викреслювання).* Нехай

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-a)^\alpha\varphi(x)}, \quad \varphi(a)\neq 0.$$

Кратному дійсному кореню $x=a$ відповідає в розкладі дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ низка елементарних дробів:

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}.$$

Коефіцієнт A_α знаходять за формулою

$$A_\alpha=\left.\frac{P_n(x)}{\cancel{(x-a)^\alpha}\varphi(x)}\right|_{x=a}=\frac{P_n(a)}{\varphi(a)},$$

а решту коефіцієнтів за формулами:

$$A_{\alpha-k}=\frac{1}{(\alpha-k)!}\left.\left(\frac{P_n(x)}{\cancel{(x-a)^\alpha}\varphi(x)}\right)^{(\alpha-k)}\right|_{x=a}, k=\overline{1,\alpha-1}.$$

Приклад

Розкладімо дріб $\dfrac{4x}{(x-1)^2(x+3)}$ на елементарні дроби

❍Заданий дріб правильний. Записуємо розклад дробу на суму елементарних з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

Знаходимо коефіцієнти методом викреслювання:

$$B = \left.\frac{4x}{\cancel{(x-1)^2}(x+3)}\right|_{x=1} = 1.$$

$$C = \left.\frac{4x}{(x-1)^2\cancel{(x+3)}}\right|_{x=-3} = -\frac{3}{4};$$

$$A = \frac{1}{1!}\left.\left(\frac{4x}{x+3}\right)'\right|_{x=1} = 4\left.\frac{(x+3)-x}{(x+3)^2}\right|_{x=1} = \frac{3}{4}.$$

Отже,

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{x+3}. \bullet$$

24.3.4 Інтегрування раціональних функцій без застосування загального алгоритму

Приклад 1. $\int \frac{x^4}{x^2-2}dx$

$$\int \frac{x^4}{x^2-2}dx = \int \frac{(x^2)^2 - 2^2 + 4}{x^2-2}dx = \int \frac{(x^2-2)(x^2+2)+4}{x^2-2}dx =$$

$$\int \frac{(x^2-2)(x^2+2)}{x^2-2}dx + \int \frac{4}{x^2-2}dx = \int (x^2+2)dx + 4\int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$\frac{x^3}{3} + 2x + 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C$$

Приклад 2. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)^2}dx = \int \frac{(x^2+1)}{x^2(x^2+1)^2}dx - \int \frac{x^2}{x^2(x^2+1)^2}dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)}dx - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \boxed{=}$$

Тут

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(2-1)(x^2+1)} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2} I_1 =$$
$$\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

Звідки

$$\boxed{=} -\frac{2}{x} - \arctan x - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan x + C =$$
$$= -\frac{2}{x} - \frac{3}{2}\arctan x + -\frac{x}{2(x^2+1)} + C$$