Лекція 25. ІНТЕГРУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. Інтегрування тригониметричних виразів

25.1 Раціональні вирази тригонометричних функції

Означення. Раціональною функцією від функцій $u_i(x)$, $i = 1,2, \ldots, n$ називається функція, яка дорівнює частці двох многочленів змінних $u_i(x)$, які у свою чергу, є функціями змінної x:

$$R(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \qquad (1)$$

Якщо змінні є елементарними тригонометричними функціями $\sin x$, $\cos x$, то складена функція $R(\sin x, \cos x)$, яка отримується, називається *раціональною* відносно елементарних тригонометричних функцій або раціональним виразом тригонометричних функції.

Прикладом такої функції є:

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x \cdot \cos x} = R(\sin x, \cos x)$$

Для раціональних виразів тригонометричних функції можно ввести наступні означення:

Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то $R(\sin x, \cos x)$ - непарна відносно $\sin x$.

Якщо $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то $R(\sin x, \cos x)$ - парна відносно $\sin x$.

Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то $R(\sin x, \cos x)$ - непарна відносно $\cos x$.

Якщо $R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то $R(\sin x, \cos x)$ - парна відносно $\cos x$.

Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то $R(\sin x, \cos x)$ - парна відносно $\sin x$ та $\cos x$.

25.2 Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Підстановкою $t = tg\frac{x}{2}$ інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ перетворюють в інтеграл від раціональної функції змінної t який завжди виражається в елементарних

функціях.

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin x &= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};\\
\cos x &= \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};\\
x &= 2\,\mathrm{arctg}\,t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.
\end{aligned}} \qquad (2)$$

Тоді

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1},\frac{1-t^2}{t^2+1}\right)\frac{2dt}{t^2+1} = \int R_1(t)dt.$$

Формули (2) називаються *універсальною тригонометричною підстановкою*.

Приклади.

1. $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \left\{\begin{matrix} t = tg\,\frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix}\right\} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+2t+t^2} =$

$\int \frac{2dt}{(1+t)^2} = \{d(1+t) = dt\} = \int \frac{2d(1+t)}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + C$

2.

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} = \left|\begin{matrix} t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+2t+17} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+16} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t+1}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{4} + C$$

Окремі випадки підстановок у інтегралах $\int R(\sin x\,,\ \cos x)dx$

Універсальна підстановка інколи приводить до порівняно громіздких раціональних дробів. Тому в окремих випадках буває зручним використовувати підстановки інші ніж універсальна тригонометрична.

Зокрема:

1) Якщо інтеграл має вид $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, або $R(\sin x\,,\ \cos x)$ *непарна* щодо $\cos x$, то застосовують підстановку:

$$t = \sin x \text{ та } dt = \cos x\,dx \tag{3}$$

2) Якщо інтеграл має вид $\int R(\cos x)\sin x\,dx$, або $R(\sin x\,,\ \cos x)$ непарна щодо $\sin x$, то застосовують підстановку:

$$t = \cos x \text{ та } dt = -\sin x\,dx \tag{4}$$

Приклад

$R(\cos x)=$

$$\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^4 x \sin x\,dx}{\cos^4 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx}{\cos^4 x} =$$

$$\left\{\begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{matrix}\right\} = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}dt = -\int \frac{dt}{t^4} + 2\int \frac{dt}{t^2} - \int dt =$$

$$\frac{4}{3t^3} - \frac{2}{t} - t + C = \frac{4}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C$$

3) Якщо підінтегральна функція в інтегралі $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ має $\cos x$ та $\sin x$ що входять тільки в парних степенях, тобто парна щодо $\cos x$ та $\sin x$, то застосовується підстановка

$$t = \tan x$$

$$x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \tag{5}$$

При цьому

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Приклад

$$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x} = \left\{\begin{matrix} z = tgx, dx = \frac{dz}{1+z^2} \\ cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}, sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2} \end{matrix}\right\} =$$

$$\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{4-3\frac{1}{1+z^2}+5\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{4+4z^2-3+5z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{9z^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3z + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + C.$$

4) Якщо інтеграл має вид $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$, то застосовується підстановка

$$t = tg\,x,\ dt = \frac{dx}{cos^2 x} \tag{6}$$

або

$$t = tg\,x,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \tag{7}$$

Приклад

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{1}{\mathrm{tg}x+1} dx = \left| \begin{array}{c} t = \mathrm{tg}x \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{t+1} \cdot \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t^2+1} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}t + C = \frac{1}{4}\ln\frac{(\mathrm{tg}x+1)^2}{\mathrm{tg}^2 x+1} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}x + C =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln(1+\sin 2x) + C\,.$$

25.3 Інтеграли вигляду $\int sin^m x \cdot cos^n x dx$, m і n – цілі, додатні або від'ємні

1. Якщо хоча б одне з чисел m або n — непарне, то відокремлюють від непарного степеня один співмножник і виражають із допомогою формули $\sin^2 x + \cos^2 = 1$ парний степінь, що залишився. Отже

$$m = 2k-1, k \in \mathbb{N}.\ \ \sin^{2k-1} x dx = \sin x (\sin x)^{2k-2} dx = -(1-\cos^2 x)^{k-1} d(\cos x);$$
$$n = 2k-1, k \in \mathbb{N}.\ \ \cos^{2k-1} x dx = (1-\sin^2 x)^{k-1} d(\sin x). \tag{8}$$

Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) =$$

$$\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} = -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

2. Якщо ж n та m — парні числа, то степені *понижують*, переходячи до подвійного аргументу за допомогою формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{9}$$

Отже,

$$\sin^{2k} x \cos^{2l} x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l, k,l \in \mathbb{N}.$$

Приклади

$$\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx =$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{\sin^2 2x}{4} dx =$$

$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x) dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

3. Якщо $n + m = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, то зручно підинтегральний вираз виражати через $t = tgx$ та $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$ або $t = ctgx$ та $dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

Приклад

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \mathrm{tg}^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left\{ \begin{matrix} t = tgx \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix} \right\}$$

$$= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{3} + C$$

4. Якщо $n = m = 1$, то інтеграли безпосередньо обчислюються, якщо в них підінтегральні функції перетворити за формулами

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right]$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right]$$

Приклад

$$\int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin x) dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C$$

Лекція 26. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Розглянемо тепер інтеграли від деяких ірраціональних функцій і покажемо, що в ряді випадків вони зводяться до інтегралів від раціональних функцій (або, як кажуть, раціоналізуються).

26.1 Лінійні та дробово-лінійні ірраціональності

Нехай $R(u;\ v;\ \dots;\ s)$ раціональна функція від змінних $u, v, \dots, s$, тобто така функція, в якій над зазначеними змінними та дійсними числами виконується скінченна кількість чотирьох арифметичних дій: додавання, віднімання, множення і ділення та піднесення до цілого степеня.

1. Інтеграли виду $\boxed{\int R\left(x;\ x^{\frac{m}{n}},\ \dots,\ x^{\frac{r}{s}}\right)dx}$ раціоналізується підстановкою

$$\begin{Bmatrix} x = t^k \\ dx = kt^{k-1}dt \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n},\ \dots, \frac{r}{s}$.

Зауваження: Цією підстановкою кожна дробова степінь змінної x виразиться через цілу степінь змінної t , отже підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію від t.

Приклад Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx = \begin{Bmatrix} x = t^6, t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5dt \end{Bmatrix} = \int \frac{\sqrt{t^6}}{t^6-\sqrt[3]{(t^6)^2}}6t^5dt =$$

$$\int \frac{t^3}{t^6-t^4}6t^5dt = \int \frac{t^3}{t^4\cdot(t^2-1)}6t^5dt = 6\int \frac{t^4}{t^2-1}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^4-1+1}{t^2-1}dt = 6\int \frac{(t^2-1)\cdot(t^2+1)}{t^2-1}dt + 6\int \frac{1}{t^2-1}dt =$$

$$6\int (t^2+1)\,dt + 6\int \frac{1}{t^2-1}dt = 6\frac{t^3}{3} + 6t + 6\frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$6\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C = 6\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C$$

2. Інтеграл виду $\boxed{\int R\left(x;\ (ax+b)^{\frac{m}{n}},\ \dots,\ (ax+b)^{\frac{r}{s}}\right)dx}$ раціоналізується підстановкою

$$\begin{Bmatrix} ax+b = t^k \\ dx = \frac{k}{a}t^{k-1}dt \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \ \dots, \frac{r}{s}$.

Цією підстановкою кожна дробова степінь змінної x виразиться через цілу степінь змінної t , отже підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію від t.

Приклад Знайти інтеграл $\int \frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}dx$

$$\int \frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}dx = \begin{Bmatrix} 2x-3=t^4, \\ t=\sqrt[4]{2x-3} \\ dx=2t^3dt \end{Bmatrix} = \int \frac{t^4+3+\sqrt{t^4}}{3\sqrt[4]{t^4}+\sqrt[4]{(t^4)^3}}2t^3dt =$$

$$2\int \frac{t^4+t^2+3}{3t+t^3}t^3dt = 2\int \frac{t^2\cdot(t^4+t^2+3)}{t^2+3}dt = 2\int \frac{t^6+t^4+3t^2}{t^2+3}dt =$$

$$\left\{\frac{t^6+t^4+3t^2}{t^2+3} \ = t^4-2t^2+9-\frac{27}{t^2+3}\right\} = 2\int(t^4-2t^2+9)\,dt - 54\int\frac{dt}{t^2+3} =$$

$$2\frac{t^5}{5}-4\frac{t^3}{3}+18t-54\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C = \frac{2}{5}\sqrt[4]{(2x-3)^5}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(2x-3)^3}+$$

$$18\sqrt[4]{2x-3}-\frac{54}{\sqrt{3}}arctan\frac{\sqrt[4]{2x-3}}{\sqrt{3}}+C$$

3. Інтеграл виду $\boxed{\int R\left(x;\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ \dots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx}$ раціоналізується підстановкою

$$\begin{Bmatrix} \frac{ax+b}{cx+d}=t^k \\ d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=kt^{k-1}dt \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \ \dots, \frac{r}{s}$

Цією підстановкою кожна дробова степінь змінної x виразиться через цілу степінь змінної t , отже підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію від t.

Приклад Знайти інтеграл $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{(1+x)^2}$

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{(1+x)^2} = \begin{Bmatrix} \frac{1-x}{1+x}=t^3, t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \\ 1-x=t^3(1+x)\Rightarrow x=\frac{1-t^3}{1+t^3} \\ dx=\frac{-3t^2(1+t^3)-3t^2(1-t^3)}{(1+t^3)^2}dt=-\frac{6t}{(1+t^3)^2}dt \end{Bmatrix} =$$

$$=\int t\cdot\frac{-6t^2}{\left(1+t^3\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1-t^3}{1+t^3}\right)^2}dt=\int\frac{-6t^3}{\left(1+t^3\right)^2}\cdot\frac{\left(1+t^3\right)^2}{2^2}dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\int t^3dt=-\frac{3}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=-\frac{3}{8}\cdot t^3\cdot t+C=-\frac{3}{8}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}+C=$$

$$=\frac{-3(1-x)\sqrt[3]{1-x}}{8(1+x)\sqrt[3]{1+x}}+C.$$

26.2 Квадратичні ірраціональності

1. Інтеграли виду

$$\boxed{\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,}$$

де a – довільна стала, заміною

$$\left\{\begin{matrix} x=a\cos t \\ dx=-a\sin t\,dt \end{matrix}\right\} \text{ або } \left\{\begin{matrix} x=a\sin t \\ dx=a\cos t\,dt \end{matrix}\right\} \qquad (4)$$

та з використанням тригонометрічних рівнянь $a^2-a^2\cos^2 t=a^2\sin^2 t$ або $a^2-a^2\sin^2 t=a^2\cos^2 t$, відповідно, зводяться до інтегралів $\int R(\sin t\,;\cos t)dt$

2. Інтеграли виду

$$\boxed{\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,}$$

де a – довільна стала, заміною

$$\left\{\begin{matrix} x=a\tan t \\ dx=\frac{adt}{\cos^2 t} \end{matrix}\right\} \text{ або } \left\{\begin{matrix} x=a\cot t \\ dx=-\frac{adt}{\sin^2 t} \end{matrix}\right\} \qquad (5)$$

та з використанням тригонометрічних рівнянь $a^2+a^2\tan^2 t=\frac{a^2}{\cos^2 t}$ або $a^2+a^2\cot^2 t=\frac{a^2}{\sin^2 t}$, відповідно, зводяться до інтегралів $\int R(\sin t\,;\cos t)dt$

Зауваження. Інтеграли виду $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, де a – довільна стала, заміною

$$\left\{\begin{matrix} x=a\,\mathrm{sh}\,t \\ dx=a\,\mathrm{ch}\,t \end{matrix}\right\} \qquad (6)$$

та з використанням тригонометрічного рівняння $a^2+a^2\mathrm{sh}^2 t=a^2\mathrm{ch}^2 t$ зводяться до інтегралів $\int R(\mathrm{sh}\,t\,;\mathrm{ch}\,t)dt$

3. Інтеграли виду

$$\boxed{\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,}$$

де a – довільна стала, заміною

$$\left\{\begin{array}{c} x=\frac{a}{\cos t} \\ dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt \end{array}\right\} \text{ або } \left\{\begin{array}{c} x=\frac{a}{\sin t} \\ dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt \end{array}\right\} \tag{7}$$

та з використанням тригонометрічних рівнянь $\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2=a^2\tan^2 t$ або $\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2=a^2\cot^2 t$, відповідно, зводяться до інтегралів $\int R(\sin t\,;\cos t)dt$

Зауваження Інтеграли виду $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, де a – довільна стала, заміною

$$\left\{\begin{array}{c} x=a\,\mathrm{ch}\,t \\ dx=a\,\mathrm{sh}\,t \end{array}\right\} \tag{8}$$

та з використанням тригонометрічного рівняння $a^2\mathrm{ch}^2 t-a^2=a^2\mathrm{sh}^2 t$ зводяться до інтегралів $\int R(\mathrm{sh}\,t\,;\mathrm{ch}\,t)dt$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=\left\{\begin{array}{c} x=2\sin t\,,\ t=\arcsin\frac{x}{2} \\ dx=2\cos t\,dt \end{array}\right\}=$$

$$\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}2\cos t\,dt=\int\frac{\sqrt{4\cos^2 t}}{2\sin^2 t}\cos t\,dt=\int\frac{2\cos^2 t}{2\sin^2 t}dt=$$

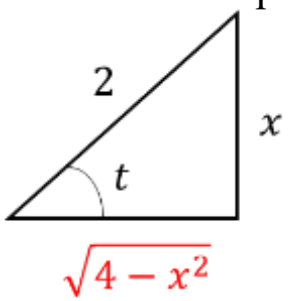
$$=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int dt=-ctgt-t+C=$$

Для повернення до змінної інтегрування x треба виконати наступні тригонометричні перетворення з урахуванням $\sin t=\frac{x}{2}$ та $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$: $\cot t=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

Звідки

$$=C-\arcsin\frac{x}{2}-ctg\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)=C-\arcsin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

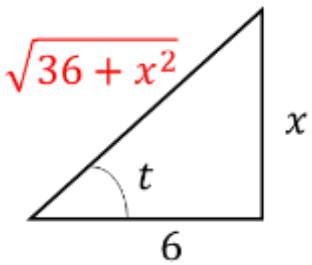
Або теж саме з розгляду прямокутного трикутника,



$$\left\{\begin{array}{c} x=2\sin t \\ \Rightarrow\sin t=\frac{x}{2} \\ \Rightarrow\cot t=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$= -\cot t - t + C = C - \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$



$$\int \frac{dx}{\sqrt{(36+x^2)^3}} = \int \frac{\frac{6}{cos^2 t}}{\sqrt{\left(\frac{36}{cos^2 t}\right)^3}} dt = \int \frac{6cos^3 t}{6^3 cos^2 t} dt = \frac{1}{36}\int cos\, t\, dt =$$

$$\frac{1}{36} sin\, t + C =$$

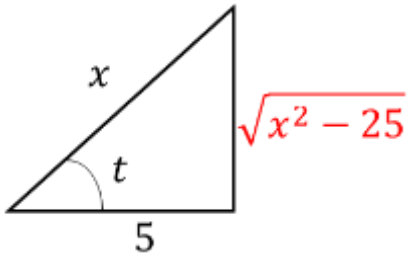
$$\left\{\begin{array}{c} x = 6\tan t\,,\ dx = \frac{6dt}{\cos^2 t} \\ \Rightarrow \tan t = \frac{x}{6} \\ \Rightarrow \sin t = \frac{x}{\sqrt{36+x^2}} \end{array}\right\} = \frac{1}{36}\frac{x}{\sqrt{36+x^2}} + C$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4} dx$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4} dx = \left\{\begin{array}{c} x = \frac{5}{cos\, t},\ t = arccos\frac{5}{x} \\ dx = \frac{5\, sin\, t}{cos^2 t} dt \end{array}\right\} = \int \frac{\sqrt{\frac{25}{cos^2 t} - 25}}{\frac{5^4}{cos^4 t}} \left(\frac{5\, sin\, t}{cos^2 t}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{\tan t \cdot \sin t}{\frac{1}{\cos^2 t}} dt = \frac{1}{25}\int \sin^2 t \cos t\, dt = \{d \sin t = \cos t\, dt\} =$$

$$\frac{1}{25}\int \sin^2 t\, d \sin t = \frac{\sin^3 t}{75} + C =$$



$$\left\{\begin{array}{c} x = \frac{5}{\cos t} \\ \Rightarrow \cos t = \frac{5}{x} \\ \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} \end{array}\right\} = \frac{1}{75}\frac{\sqrt{(x^2-25)^3}}{x^3} + C$$

4. Інтеграли виду

$$\boxed{\int R\left(x; \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,}$$

де a, b, c – довільні сталі, виділенням повного квадрату

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

та заміною

$$\left\{z = x + \frac{b}{2a}\ ,\ p^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\} \qquad (9)$$

зводиться до одного з інтегралів вже розглянутого типу 1-3, тобто до інтегралів:

$$\int R\left(z; \sqrt{p^2 - z^2}\right)dz,\ \int R\left(z; \sqrt{p^2 + z^2}\right)dz,\ \int R\left(z; \sqrt{z^2 - p^2}\right)dx,$$

де p – відома стала.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}dx$

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x+1=z \\ x=z-1 \\ dx=dz \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int \sqrt{4-z^2}\,dz = \left\{\begin{matrix} z = 2\sin t \Rightarrow \sin t \Rightarrow \frac{z}{2} \Rightarrow t = \arcsin\frac{z}{2} \\ dz = 2\cos t\,dt \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int \sqrt{\cos^2 t}\cdot \cos t\,dt = 4\int \cos t\cdot\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$$

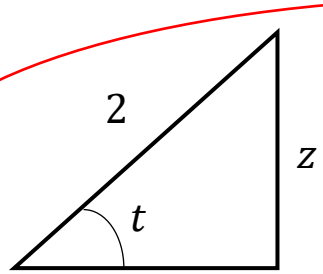
$$= 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2\int dt + 2\int \cos 2t\,dt = 2t + 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2t + C =$$

$$= 2t + \sin 2t + C = 2t + 2\sin t\cdot\cos t + C = 2t + 2\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{z}{2} + 2\cdot\frac{z}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{z^2}{4}} + C = 2\arcsin\frac{z}{2} + z\cdot\sqrt{\frac{4-z^2}{4}} + C =$$

$$= 2acr\sin\frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)\cdot\sqrt{4-(x+1)^2}}{2} + C =$$

$$= 2acr\sin\frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)\cdot\sqrt{3-2x-x^2}}{2} + C.$$



$$\left\{\begin{matrix} z = 2\sin t \\ \Rightarrow \sin t = \frac{z}{2} \\ \Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \sqrt{\frac{4-x^2}{4}} \end{matrix}\right\}$$

$\sqrt{4-x^2}$

5. Інтеграли виду

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

де $P_n(x)$ - це многочлен степені $n \geq 1$ можна обчислювати, користуючись формулою

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{10}$$

Тут $Q_{n-1}(x)$ - це многочлен степені $n-1$ з невизначеними коефіцієнтами та λ теж невизначений коефіцієнт

Всі невизначені коефіцієнти знаходяться з тотожності, отриманої диференціюванням обох частин рівності

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \equiv \left(Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

після чого необхідно прирівняти коефіцієнти при однакових степенях невідомої x.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$

За формулою (10) маємо:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = (Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2} + \lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

Диференціюючи цю рівність, отримаємо:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \equiv A\cdot\sqrt{1-2x-x^2} + (Ax+B)\cdot\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

Порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях чисельника:

$$x^2 \equiv A(1-2x-x^2) + (Ax+B)(-1-x) + \lambda \Rightarrow$$

$$x^2 \equiv A - 2Ax - Ax^2 - Ax - B - Ax^2 - Bx + \lambda$$

Звідси

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 1=-A-A \\ x^1 & 0=-2A-A-B,\ A=-\dfrac{1}{2}\quad B=\dfrac{3}{2}\quad \lambda=2 \\ x^0 & 0=A-B+\lambda, \end{array}$$

Отже,

$$I=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

$$1-2x-x^2=-(x^2+2x-1)=-\left((x+1)^2-2\right)=2-(x+1)^2$$