## Лекція 26(2) ІНТЕГРУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ.

### 26.2 (продовження) Інтегрування квадратичих ірраціональностей

**6.** Інтеграли типу

$$\int \frac{dx}{(x-p)^k\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $k$ є *цілим додатнім числом*, за допомогою заміни

$$\left\{\begin{array}{c} t=\frac{1}{x-p} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{array}\right\} \tag{11}$$

зводиться до розглянутого вище інтегралів типу $\int \frac{At^{k-1}}{\sqrt{\tilde{a}t^2+\tilde{b}t+\tilde{c}}}dt$.

*Зауваження*: Якщо у чисельнику вихідного інтеграла стоїть поліном степеню більше за нуль, то його можна розкласти по степенях $(x-p)$ та почленним діленням звести до вихідного інтегралу.

**7.** У інтегралах вигляду

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{k+\frac{1}{2}}},$$

де $k$ є *цілим додатнім числом*, використовують наступну *підстановку Абеля*:

$$=\left\{\begin{array}{c} t=\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\Rightarrow \\ ax^2+bx+c=\frac{4ac-b^2}{4}\cdot\frac{1}{a-t^2}\Rightarrow(ax^2+bx+c)^k=\left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^k\cdot\frac{1}{(a-t^2)^k} \\ \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{dt}{(a-t^2)} \end{array}\right\}=$$

$$\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^k\int(a-t^2)^{k-1}dt$$

*Окремі випадки*

Для випадку <u>$k$=1</u> матимемо:

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)\int dt=\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)t+C$$

$$=\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+C$$

Для випадку <u>$k$=2</u> матимемо:

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^2 \int (a-t^2)dt = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^2 \cdot \left(at - \frac{t^3}{3}\right) + C$$

Для випадку $k$=3 матимемо:

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{7}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^3 \int (a-t^2)^2 dt$$
$$= \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^3 \cdot \left(a^2 t - 2a\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right) + C$$

де $t = \frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

### 26.3 Підстановки Ейлера

*Підстановки Ейлера* - підстановки, що призводять інтеграли виду

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

до інтегралу від раціональної функцій. Запропоновані Л. Ейлером в 1768 році.

1. *Перша підстановка* використовується тоді, коли $a > 0$. Тоді проводиться заміна:

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t \qquad (12)}$$

Знайдемо $x$ (далі будемо брати різну комбінацію знаків). Піднесемо вираз до квадрату

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2 \Rightarrow$$
$$bx+c = \pm 2\sqrt{a}xt + t^2 \Rightarrow$$
$$x\left(b \mp 2\sqrt{a}t\right) = t^2 - c$$

Звідси

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$
$$dx = \frac{2t \cdot \left(b \mp 2\sqrt{a}t\right) \pm 2\sqrt{a} \cdot (t^2-c)}{\left(b \mp 2\sqrt{a}t\right)^2} dt$$

Виразимо корінь через змінну $t$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}t} + t$$

Таким чином, при такій підстановці, підінтегральний вираз буде раціональною функцією від змінної інтегрування $t$.

2. *Друга підстановка* використовується тоді, коли $c > 0$. Тоді проводиться заміна:

$$\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} \qquad (13)}$$

Знайдемо $x$ (далі будемо брати різну комбінацію знаків). Піднесемо вираз до квадрату

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 \pm 2\sqrt{c}xt + c \Rightarrow$$
$$ax^2 + bx = x^2t^2 \pm 2x\sqrt{c}t \Rightarrow$$
$$ax + b = xt^2 \pm 2\sqrt{c}t$$

Звідси

$$x = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$$
$$dx = \frac{\pm 2\sqrt{c} \cdot (a - t^2) + 2t \cdot \left(\pm 2\sqrt{c}t - b\right)}{(a - t^2)^2} dt$$

Бачимо, що $x$ та $dx$ раціонально виражається через $t$, то корінь теж раціонально будуть виражатися через $t$:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2} t \pm \sqrt{c}$$

Отже інтеграл раціоналізується.

3. *Третя підстановка* використовується тоді, коли підкореневий вираз має два дійсні корені, тобто $x^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Тоді проводиться заміна:

$$\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1); \text{ або } \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_2) \qquad (14)}$$

Піднесемо вираз до квадрату

$$a(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)^2 t^2 \Rightarrow$$
$$a(x - x_2) = (x - x_1)t^2 \Rightarrow$$

Звідси

$$x = \frac{ax_2 - t^2 x_1}{a - t^2}$$

Також і диференціал $dx$ буде раціональною функцією від $t$ на $dt$,

$$dx = \frac{-2tx_1(a-t^2) + 2t(ax_2 - t^2x_1)}{(a-t^2)^2}dt$$

а квадратний корінь

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\left(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2} - x_1\right)$$

Отже інтеграл раціоналізується.

***Приклад.*** Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

Підінтегральна функція є раціональною функцією від $x$ і $\sqrt{x^2+x+1}$. Так як коефіцієнт перед $x^2$ більше нуля (тобто $1 > 0$), то використовуємо *першу підстановку Ейлера*:

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{1}\cdot x + t; \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1} = x + t$$

$$\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 = (x+t)^2 \Rightarrow x^2+x+1 = x^2+2xt+t^2 \Rightarrow$$

$$x - 2xt = t^2 - 1 \Rightarrow x(1-2t) = t^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{1-2t}$$

$$dx = \left(\frac{t^2-1}{1-2t}\right)' dt = \frac{2t(1-2t)-(t^2-1)\cdot(-2)}{(1-2t)^2}dt = \frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = x + t = \frac{t^2-1}{1-2t} + t = \frac{t^2-1+t(1-2t)}{1-2t} = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}.$$

Отже

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt}{\frac{t^2-1}{1-2t}+\frac{-t^2+t-1}{1-2t}} = \int \frac{(-2t^2+2t-2)dt}{(1-2t)^2\cdot\left(\frac{t^2-1}{1-2t}+\frac{-t^2+t-1}{1-2t}\right)} =$$

$$= \int \frac{(-2t^2+2t-2)dt}{(1-2t)\cdot(t^2-1+(-t^2+t-1))} = \int \frac{(-2t^2+2t-2)dt}{(1-2t)(t-2)} \boxed{=}$$

$$\frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)(t-2)} = \frac{-2t^2+2t-2}{-2t^2+5t-2} = \frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2} = \frac{2t^2-2t+2-3t+3t}{2t^2-5t+2} =$$

$$\frac{2t^2-5t+2+3t}{2t^2-5t+2} == \frac{2t^2-5t+2}{2t^2-5t+2} + \frac{3t}{2t^2-5t+2} = 1 + \frac{3t}{2t^2-5t+2};$$

$$\frac{3t}{2t^2-5t+2} = \frac{3t}{2\cdot(t-\frac{1}{2})(t-2)} = \frac{\frac{3}{2}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)},$$ де

$$\frac{\frac{3}{2}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)} = \frac{A}{t-\frac{1}{2}} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2)+B\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)} \Rightarrow \frac{3}{2}t = A(t-2) + B\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

$t = \frac{1}{2}$: $\frac{3}{4} = A \cdot \left(-\frac{3}{2}\right); \Rightarrow A = -\frac{1}{2};$

$t = 2$: $3 = B \cdot \frac{3}{2}; \Rightarrow B = 2.$

Звідки

$$\frac{\frac{3}{2}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}} + \frac{2}{t-2}$$

$$\int \frac{(-2t^2+2t-2)dt}{(1-2t)(t-2)} = \int\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-\frac{1}{2}} + \frac{2}{t-2}\right)dt$$

$$= t - \frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right| + 2\ln|t-2| + C = \left\{t = \sqrt{x^2+x+1} - x\right\}$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - x - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+x+1} - x - \frac{1}{2}\right| + 2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1} - x - 2\right| + C$$

***Приклад.*** Знайти інтеграл $\int \frac{(x+1)dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$

*Розв'язання:* Скористаємось третьою підстановкою Ейлера.

Маємо: $\sqrt{-x^2+3x-2} = (x-1)t \quad \Rightarrow \; -x^2+3x-2 = (x-1)^2 t^2 \quad \Rightarrow$

$$-(x-1)(x-2) = (x-1)^2 t^2 \quad \Rightarrow \; -(x-2) = (x-1)t^2 \quad \Rightarrow \; -x - xt^2 = -t^2 - 2 \quad \Rightarrow$$

$$x(1+t^2) = t^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2+2}{t^2+1}.$$

Тоді $x+1 = \frac{t^2+2}{t^2+1} + 1 = \frac{t^2+2+t^2+1}{t^2+1} = \frac{2t^2+3}{t^2+1}$; і $x-1 = \frac{t^2+2}{t^2+1} - 1 = \frac{t^2+2-t^2-1}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1}$.

$$dx = \frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2+2)}{(t^2+1)^2}dt = \frac{2t(t^2+1-t^2-2)}{(t^2+1)^2}dt = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt$$

Підставимо отримані вирази в наш інтеграл і отримаємо:

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}} = -2\int \frac{(2t^2+3)(t^2+1)^2 t}{(t^2+1)^3 t}dt = -2\int \frac{2t^2+3}{t^2+1}dt =$$

$$= -2\int \left( \frac{2t^2+2}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = -4\int dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = -4t - 2arctg\, t + C =$$

$$= -4\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} - 2arctg\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + C$$

*Відповідь:* $-4\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} - 2arctg\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + C$.

## 26.4 Інтегрування диференціальних біномів. Підстановки Чебишева

*Означення.* Вираз виду

$$x^m(a+bx^n)^p,$$

де $m, n, p, a, b$ - сталі числа, називається *диференціальним біномом*.

Інтеграли від диференціального бінома

$$\int x^m(a+bx^n)^p\, dx, \tag{11}$$

якщо $m$, $n$, $p$ - раціональні сталі числа, зводяться до інтегралів від раціональної функції відносно нової змінної (тобто виражається через елементарні функції) лише в трьох випадках ($a \neq 0$, $b \neq 0$):

1) $p$ - ціле число (додатне, від'ємне чи нуль), тоді треба виконати підстановку

$$\boxed{x = t^s, \qquad (12)}$$

де $s$ – найменший спільний знаменник дробів $m$ і $n$;

2) $\frac{m+1}{n}$ - ціле число (додатне, від'ємне чи нуль), тоді треба виконати підстановку

$$\boxed{a + bx^n = t^r, \qquad (13)}$$

де $r$ –знаменник дробу $p$;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ - ціле число (додатне, від'ємне чи нуль), тоді треба виконати підстановку

$$\boxed{ax^{-n} + b = t^r, \qquad (14)}$$

де $r$ –знаменник дробу $p$;

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається.

***Приклади***

*Приклад 1*. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

*Розв'язок.*

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} m=-\frac{1}{2};\, n=\frac{1}{4};\, p=\frac{1}{3}; \quad \text{тоді } \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 - \text{ціле число;} \\ \text{тобто маємо випадок 2) ; виконуємо підстановку} \\ 1+x^{\frac{1}{4}} = t^3 \Rightarrow x = \left(t^3-1\right)^4 \Rightarrow dx = 4\left(t^3-1\right)^3 \cdot 3t^2 dt = \\ = 12t^2\left(t^3-1\right)^3 dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \left(\left(t^3-1\right)^4\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(t^3\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 12t^2\left(t^3-1\right)^3 dt = \int \left(t^3-1\right)^{-2} \cdot \left(t^3-1\right)^3 \cdot t \cdot 12t^2 dt =$$

$$= 12\int \left(t^3-1\right)\cdot t^3 dt = 12\int \left(t^6-t^3\right)dt = 12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C =$$

$$= \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7}\left(t^3\right)^2 \cdot t - 3t^3 \cdot t + C =$$

$$= \frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} - 3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\cdot \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C.$$

*Приклад 2*. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$.

*Розв'язання*: Видно, що підінтегральний вираз, є диференціальним біномом. Перепишемо його у вигляді $x^m(a+bx^n)^p$.

Отримаємо: $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = x^{-1/2}(x^{1/4}+1)^{-10}$, тоді: $m=-\frac{1}{2}, \quad n=\frac{1}{4} \quad p=-10$

Перевіримо якою з підстановок необхідно скористатися.

Оскільки $p=-10\in Z$, тоді $x=t^4$;

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = \int x^{-1/2}(x^{1/4}+1)^{-10}dx = \begin{vmatrix} p=-10\in Z \\ x=t^4 \quad dx=4t^3dt \end{vmatrix} = \int\frac{4t^3}{t^2(t+1)^{10}}dt =$$

$$=4\int\frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt = 4\int\frac{1}{(t+1)^9}dt - 4\int\frac{1}{(t+1)^{10}}dt = \frac{4}{-8(t+1)^8}+\frac{4}{9(t+1)^9}+C =$$

$$=-\frac{1}{2(t+1)^8}+\frac{4}{9(t+1)^9}+C = -\frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8}+\frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}+C$$

*Відповідь:* $-\frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8}+\frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}+C$

*Приклад 3*. Знайти інтеграл $\int\frac{x^3dx}{(4-x)\sqrt{4-x^2}}$.

*Розв'язання:* Подамо підінтегральний вираз у вигляді $x^3(4-x^2)^{-3/2}$. Тоді: $m=3, \quad n=2 \quad p=-\frac{3}{2}$.

Перевіримо якою з підстановок необхідно скористатися.

Оскільки 1) $p=-\frac{3}{2}\notin Z$;

2) $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}\in Z$ тоді $4-x^2=t^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=4-t^2; \quad 2xdx=-2tdt$.

Отже:

$$\int\frac{x^3dx}{(4-x)\sqrt{4-x^2}} = \int x^3(4-x^2)^{-3/2}dx = \int x^2(4-x^2)^{-3/2}xdx = -\int(4-t^2)t^{-3}tdt = -\int\frac{4-t^2}{t^2}dt =$$

$$=-\int\frac{4}{t^2}dt+\int dt == \frac{4}{t}+t+C = \frac{4+t^2}{t}+C = \frac{4+4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+C = \frac{8-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+C$$

*Відповідь:* $\frac{8-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+C$;

*Приклад 4*. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

*Розв'язання:* Подамо підінтегральну функцію у вигляді $x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}$. Тоді: $m=-4, \quad n=2 \quad p=-\frac{1}{2}$ .

Перевіримо якою з підстановок необхідно скористатися.

Оскільки 1) $p=-\frac{1}{2}\notin Z$;

2) $\frac{m+1}{n}=\frac{-4+1}{2}=-\frac{3}{2}\notin Z$

3) $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-4+1}{2}-\frac{1}{2}=-2\in Z$, тоді

$$x^{-2}+1=t^2 \quad \Rightarrow x^{-2}=t^2-1 \quad \Rightarrow \quad x^2=(t^2-1)^{-1} \quad \Rightarrow \quad x=(t^2-1)^{-1/2}.$$

$$-2x^{-3}dx=2tdt; \quad dx=-\frac{tdt}{x^{-3}}=-\frac{tdt}{(t^2-1)^{3/2}}.$$

Отже:

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}dx=-\int(t^2-1)^2\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-1/2}\frac{tdt}{(t^2-1)^{-3/2}}=$$

$$=-\int\frac{(t^2-1)^2t^{-1}t}{(t^2-1)^{-1/2}(t^2-1)^{3/2}}dt=-\int(t^2-1)dt=-\frac{t^3}{3}+t+C=\sqrt{x^{-2}+1}-\frac{\left(\sqrt{x^{-2}+1}\right)^3}{3}+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3x^3}+C=\frac{(2x^2-1)\sqrt{x^2+1}}{3x^3}+C$$

*Відповідь:* $\frac{(2x^2-1)\sqrt{x^2+1}}{3x^3}+C$.

## 26.5 Невизначені інтеграли, що не виражаються в елементарних функціях

Якщо первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ є елементарною функцією, то кажуть що інтеграл $\int f(x)\,dx$ виражається в елементарних функціях. Але не будь-який інтеграл від елементарних функцій виражається в елементарних функціях.

Розглянемо кілька прикладів інтегралів, що не виражаються через елементарні функції. До таких інтегралів ставиться інтеграл виду

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx,$$

де $P(x)$ – багаточлен ступеня вище *другого*. Ці інтеграли називаються *еліптичними*.

Якщо степінь багаточлена $P(x)$ вище *четвертого*, то інтеграл називається *гіпереліптичним*.

Якщо все-таки інтеграл такого виду виражається через елементарні функції, то він називається *псевдоеліптичним*.

Не можуть бути виражені через елементарні функції *також* наступні інтеграли:

1. $\int e^{-x^2} dx$ – інтеграл Пуассона (Сімеон Дені Пуассон – французький математик (1781–1840) )

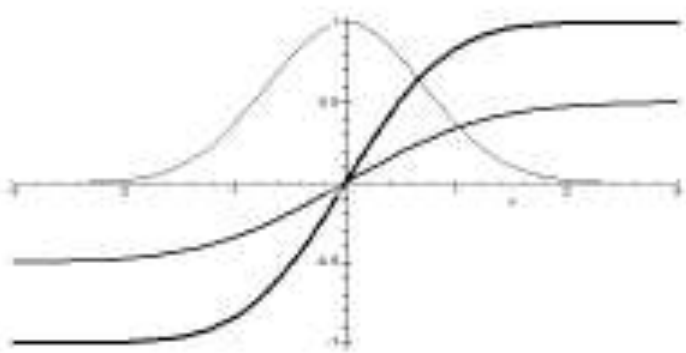
Функція помилок:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Отже $\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(x) + C$. Зазначимо, що вона непарна: $erf(0) = 0$; $erf(-x) = -erf(x)$.

Функція $\Phi_0(x) = \frac{1}{2} erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ називається *інтегралом імовірності* (Ейлера- Пуасона).

На малюнку праворуч зображені: функція $y = e^{-x^2}$ – крива Гауса (самою тонкою лінією «дзвіночок»); функція $y = erf(x)$ – самою товстою лінією, її амплітуда в двічі більша за амплітуду інтеграла імовірності (зображено середньою за товщиною лінією).



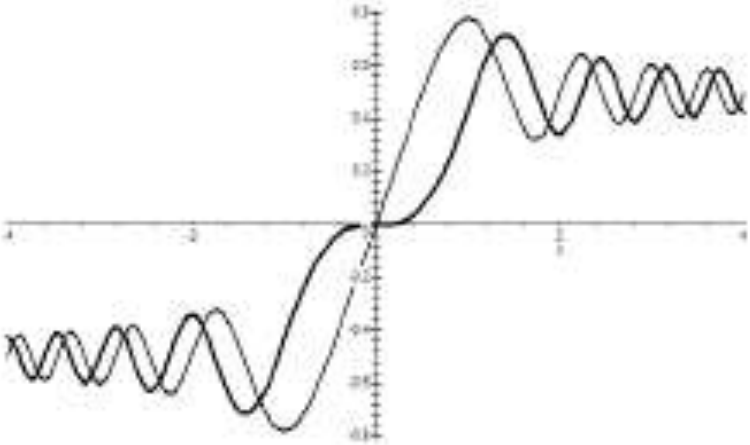
2. $\int \sin x^2\, dx$ та $\int \cos x^2\, dx$ – інтеграли Френеля (Жан Огюстен Френель – французький вчений (1788–1827) – теорія хвильової оптики та ін.)

$S(x) \equiv \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt;\ C(x) \equiv \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$ Отже

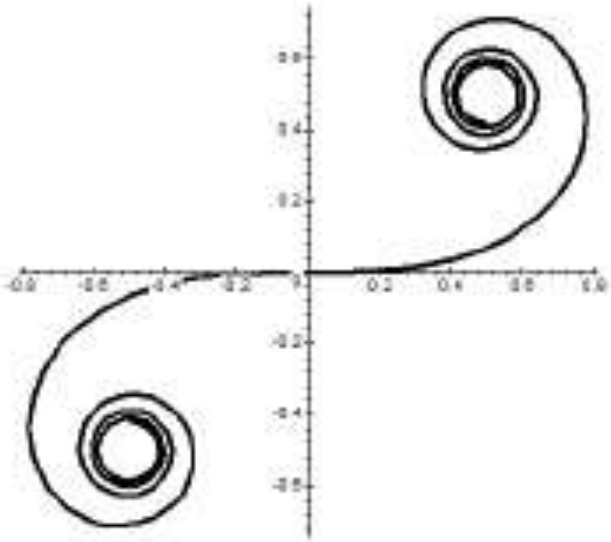
$\int \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = S(x) + C;\ \int \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = C(x) + C.$ Ці функції непарні:

$S(0) = 0; C(0) = 0; S(-x) = -S(x); C(-x) = -C(x)$.

На малюнку праворуч приведено графік функцій $y = C(x)$ и $y = S(x)$ (функція $S(x)$ має в початку координат нульову похідну).



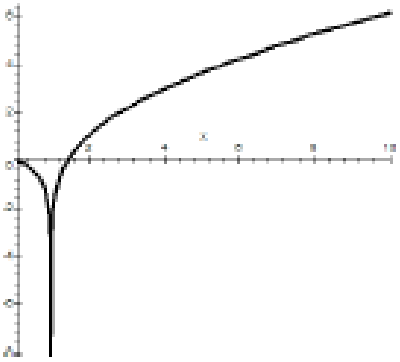
На малюнку праворуч побудовано графік кривої $\{x = C(t); y = S(x)\}$, що задана параметрично («вуса» симетричні відносно начала координат). Ця крива має назви: «спіраль Корню[3]» або «клотоїда[4]». У цієї кривій кривизна змінюється лінійно як функція від довжини дуги. Вона використовується як перехідна дуга при будівництві доріг. Коли ділянка дороги має форму клотоїди, кермо повертається рівномірно. Така форма дороги дозволяє здійснювати поворот без суттєвого зниження швидкості.



[3] М.А.Корню – французький фізик, використовував цю криву для полегшення обрахунку дифракції в прикладних задачах оптики.
[4] Клото́ (греч. Κλωθώ, «Пряха») – у давньогрецькій міфології одна з трьох богинь долі і призначення людей та богів, що пряла нить життя.

3. $Li(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм

Отже $\int \frac{dx}{\ln x} = Li(x) + C \quad (x > 0,\ x \neq 1)$. Графік $Li(x)$ наведено праворуч. Зазначимо зв'язок $Li(x) = Ei(\ln x)$ та $Ei(x) = Li(e^x)$, а також формулу $\int \frac{x^n dx}{\ln x} = Li(x^{n+1}) + C$

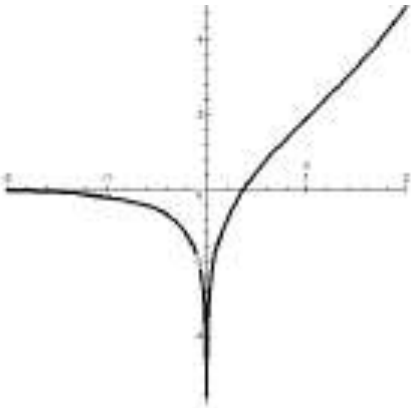


4. $Ei(x) = \int \frac{e^x}{x} dx$ – інтегральна експонента, приводиться до інтегрального логарифма

Отже $\int \frac{e^x}{x} dx = Ei(x) + C$, $(x \neq 0)$. Графік $Ei(x)$ наведено праворуч. При цьому $Ei(x) = \gamma + \ln|x| + o(x)$, якщо $x \to 0$, де

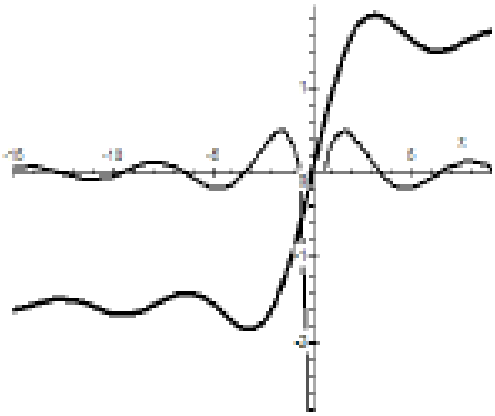
$\gamma = 0,5772156649...$ – стала Ейлера.

Рекурентна формула $I_n = \frac{e^x}{x^{n-1}} - I_{n-1}$ дозволяє обчислювати інтеграли вигляду $I_n = \int \frac{e^x}{x^n} dx$.

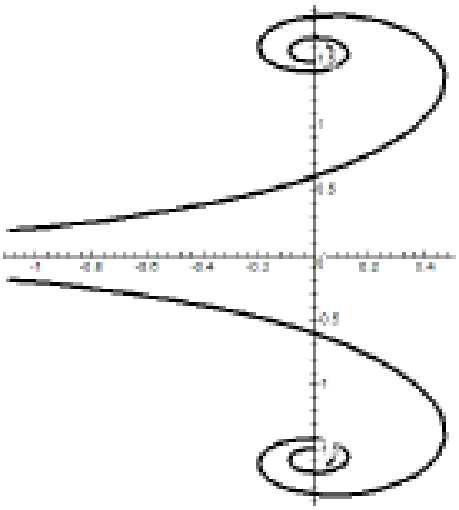


5. $Si(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx$ – інтегральний синус та $Ci(x) = \int \frac{\cos x}{x} dx$ – інтегральний косинус

На малюнку праворуч графік функції $Si(x)$ проходить через початок координат, а $Ci(x)$ симетричний відносно осі ординат. $Si(0) = 0$; $Si(-x) = -Si(x)$ – непарна; $Ci(-x) = Ci(x)$ – парна та при $x \to 0$ має асимптотику: $Ci(x) = \gamma + \ln|x| + o(x)$.

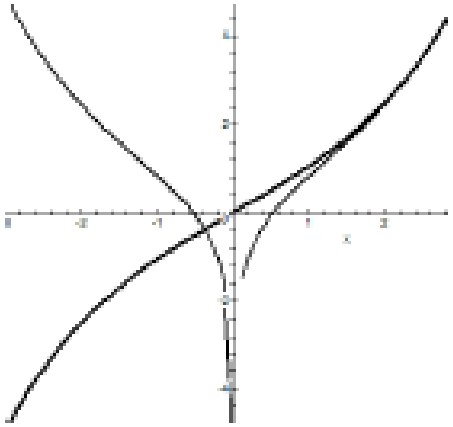


На малюнку праворуч наведено графік кривої $x = Ci(t)$; $y = Si(x)$, заданої параметрично («вуса» симетричні відносно осі абсцис).



6. Інтегральні гіпербилічні синус та косинус: $Shi(x) = \int \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$, $Chi(x) = \int \frac{\operatorname{ch} x}{x} dx$

На малюнку праворуч графік функції $Shi(x)$ проходить через начало координат, а $Chi(x)$ симетричний відносно осі ординат. Як і звичайні інтегральний синус та косинус $Shi(0) = 0$, $Shi(-x) = -Shi(x)$ – непарна;



*Приклад,* обчислення *інтегралу Пуассона*. Одним із способів обчисленння інтегралу Пуассона є використання *подвійного невласного інтеграла 1-го роду* по всій площині. Реалізовано перехід від повторного інтеграла до подвійного (теорема Фубіні), та обчислення в полярній системі

координат по вичерпуючим множинам, що є кругами радіуса, збіжного до нескінченності.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Знайдемо добуток двох інтегралів Пуассона за різними змінними інтегрування:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\ dxdy =$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \begin{Bmatrix} x = \rho\cos\varphi & x^2 + y^2 = \rho^2 \\ y = \rho\sin\varphi & dxdy = \rho d\rho d\varphi \\ \mathbb{R}^2 \to D_{\rho\varphi} & 0 \le \rho < +\infty, 0 \le \varphi \le 2\pi \end{Bmatrix} =$$

$$\iint_{D_{\rho\varphi}} e^{-\rho^2}\, \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\, \rho d\rho = \varphi|_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\, d(-\rho^2) =$$

$$(2\pi - 0)\left(-\frac{1}{2}\right) \lim_{\rho\to+\infty} \left(e^{-\rho^2} - e^0\right) = -\pi(0-1) = \pi$$

Таким чином,

$$I^2 = \pi$$

Звідки

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$