Лекція 28. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР

28.1. Обчислення площ плоских фігур з основою на віссі Ox

Визначений інтеграл від додатної неперервної функції $f(x) > 0$, заданої на відрізку $[a, b]$, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$ та віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 1):

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

2. У разі, коли $f(x) < 0$ на $[a, b]$ (рис. 2), то площа криволінійної трапеції обчислюється

$$S = \int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

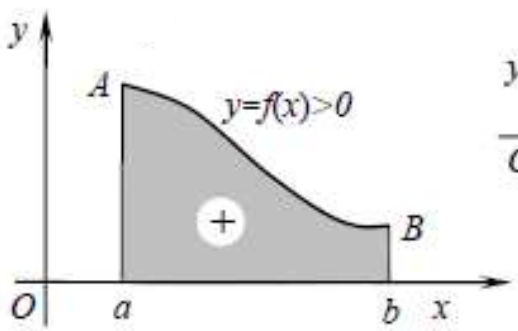


Рис. 1

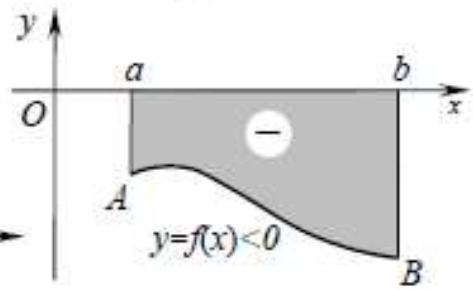


Рис. 2

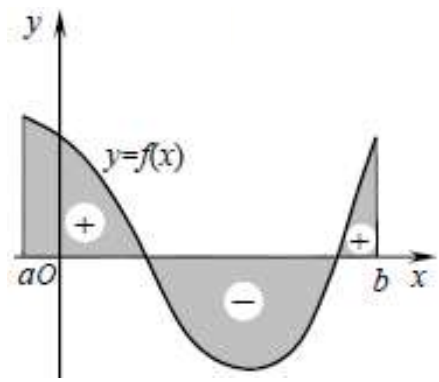


Рис. 3

Зауваження: Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ скінчене число разів змінює знак (рис. 3), то

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{3}$$

3. У загальному випадку, площу фігури, обмеженої кривими будь-яких функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$ за умови, що $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рис. 4) знаходять за формулою:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx \tag{4}$$

Зауважемо, що формула (4) є загальною для всіх наступних випадків:

(а) $f_1(x) \leq f_2(x)$	**(б)** $f_1(x) \leq f_2(x)$	**(в)** $f_1(x) \leq f_2(x)$
$f_1(x) \geq 0$	$f_1(x) \leq 0$	$f_1(x) \leq 0$
$f_2(x) \geq 0$	$f_2(x) \geq 0$	$f_2(x) \leq 0$

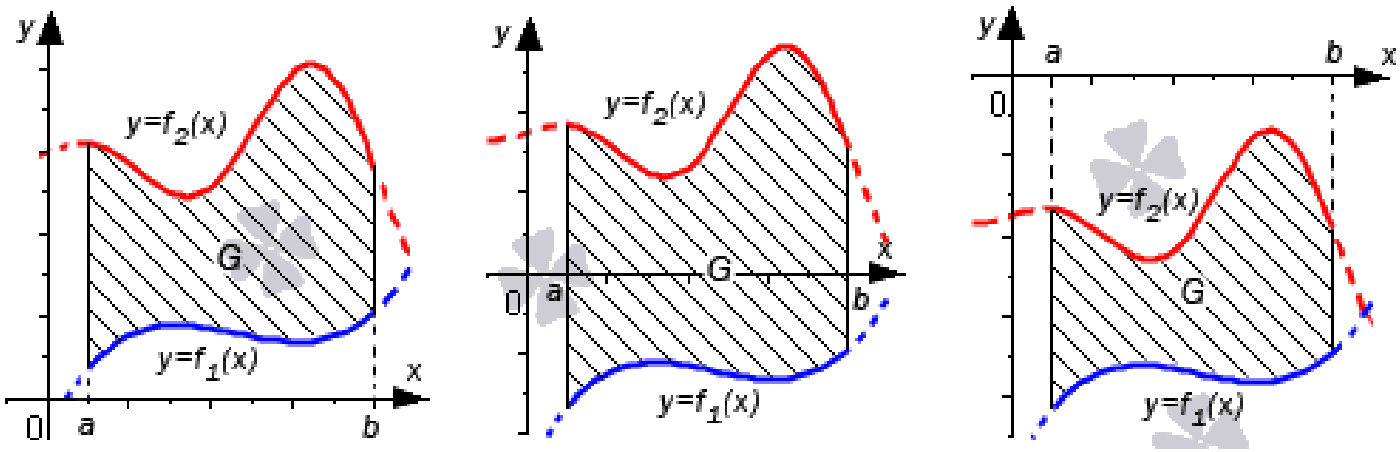


Рис. 4

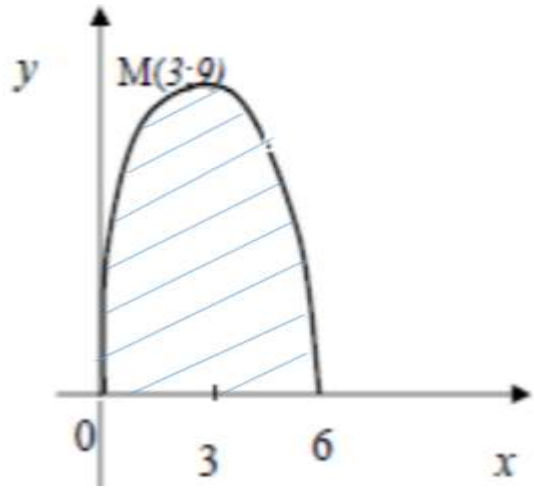
Зауваження: Якщо плоска фігура має складнішу форму, то прямими паралельними осі $0y$, її слід розбити на частини так, щоб можна було б застосувати вже відомі формули.

Приклади

1. Обчислити площу фігури обмежену параболой $y = 6x - x^2$ та віссю OX.

Розв'язання: Запишемо рівняння параболи у канонічному вигляді:

$$y - 9 = -(x-3)^2$$

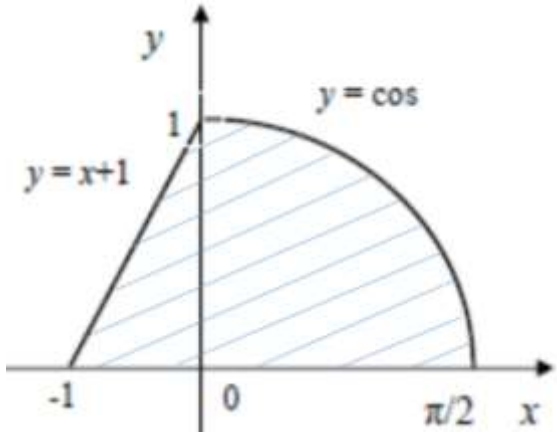


Тобто вершина параболи у точці (3,9). Знайдемо точки перетину з віссю OX:

$y = 0, \Rightarrow 6x - x^2 = 0, x_1 = 0, x_2 = 6$

Задана фігура є криволінійною трапецією, як зображено на рисунку, її площа обчислюється за формулою (1):

$$S = \int_0^6 (6x - x^2)\,dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^6 = 36$$



2. Обчислити площу фігури обмежену лініями $y = x + 1$, $y = \cos x$ і віссю OX.

Розв'язання: Функція

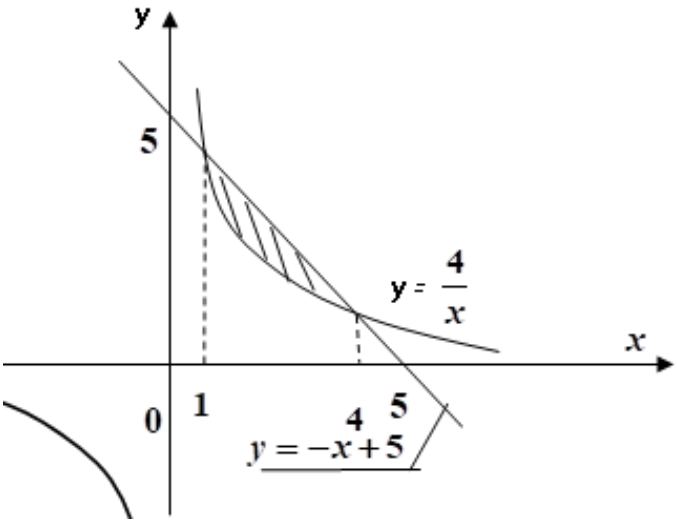
$$y = \begin{cases} x + 1, -1 \le x \le 0 \\ \cos x, 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

є неперервна на відрізку $[-1; \frac{\pi}{2}]$. Отже площа заданої фігури (див. рис.) обчислюється за

формулою:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{4}{x}$, $x + y - 5 = 0$



Побудуємо дані гіперболу та пряму. Для знаходження абсцис точок перетину графіків розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{x} = -x + 5 \Rightarrow 4 = -x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

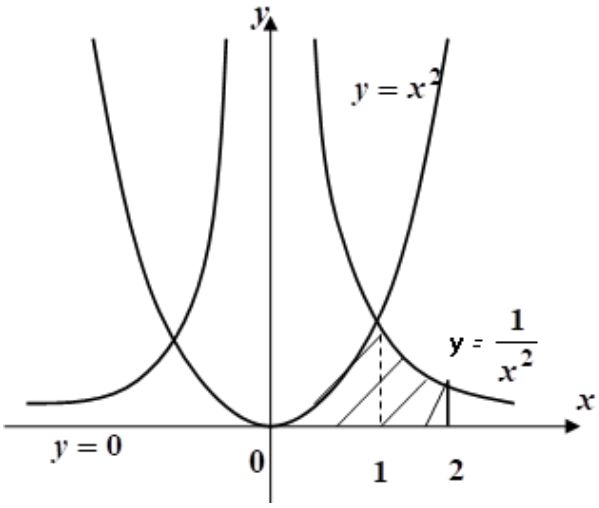
Звідки, $x_1 = 1 \quad x_2 = 4$

Отже,

$$S = \int_1^4 \left(-x + 5 - \frac{4}{x}\right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 5x - 4\ln|x|\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$(-8 + 20 - 4\ln 4) - \left(-\frac{1}{2} + 5 - 4\ln 1\right) = 12 - 4\ln 4 + \frac{1}{2} - 5 = 7{,}5 - 4\ln 4$$

4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$, $y = 0$



Точки перетину графіків:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

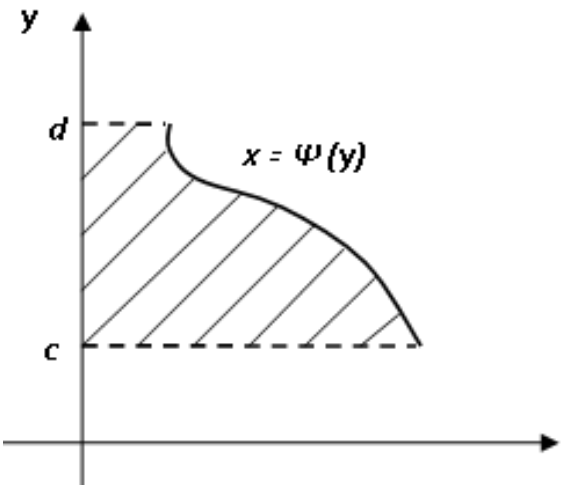
На відрізку [0,2] фігура зверху обмежена спочатку графіком функції $y = x^2$ (якщо $0 \le x \le 1$), а потім $y = \frac{1}{x^2}$, якщо $1 \le x \le 2$.

Тому площу всієї фігури знайдемо як суму двох площ, кожну з яких обчислимо за формулою (1). А саме: $S = S_1 + S_2$, де

$$S_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3},\ S_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Отримаємо: $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

28.2 Обчислення площ плоских фігур з основою на віссі Oy



У випадку, коли фігура обмежена кривою $x = \psi(y)$ $(\psi(y) \geq 0)$ та прямими $y = c$, $y = d$ і віссю Oy, її площу знаходять за формулою,

$$S = \int_c^d \psi(y)dy \qquad (5)$$

У випадку, коли фігура обмежена кривими будь-яких функцій $x = \psi_1(y)$ та $x = \psi_2(y)$ і прямими $y = c$, $y = d$ за умови, що $\psi_2(y) \geq \psi_1(y)$ (рис. 5), площу знаходять за формулою,

$$S = \int_c^d (\psi_2(y) - \psi_1(y))dy \qquad (6)$$

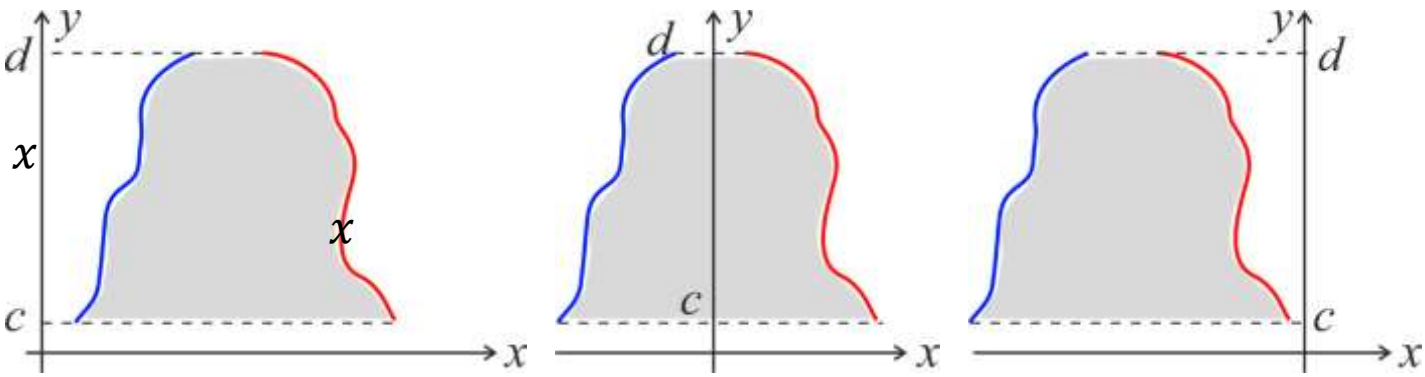
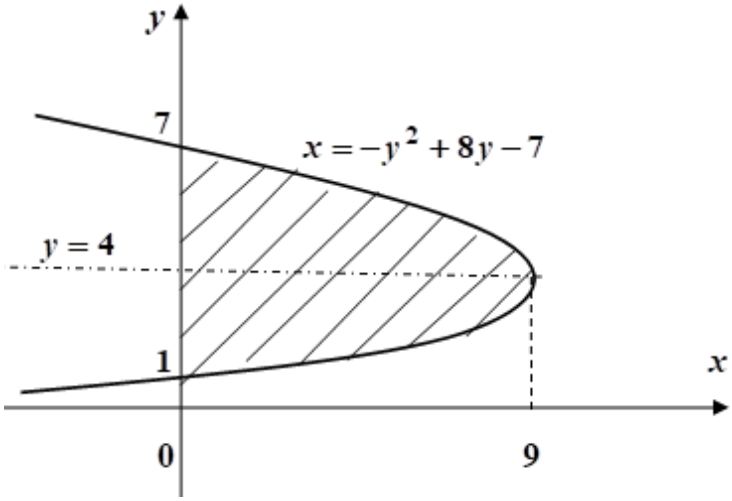


Рис. 5



Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = -y^2 + 8y - 7, \quad x = 0$

Перепишимо у вигляді

$x = -(y^2 - 8y + 16) + 16 - 7, \quad \Rightarrow$

$x - 9 = -(y - 4)^2$

Парабола симетрична відносно прямої $y = 4$, має вершину (9,4).

Точки перетину з віссю Oy

$$\begin{cases} x = -y^2 + 8y - 7 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 8y + 7 = 0$$

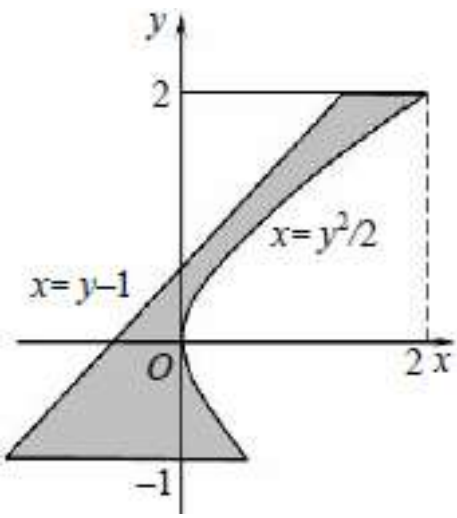
Звідки $y_1 = 1$, $y_2 = 7$.

За формулою знайдемо площу:

$$S = \int_1^7 \left(-y^2 + 8y - 7\right) dy = \left(-\frac{y^3}{3} + 8 \cdot \frac{y^2}{2} - 7y\right)\Bigg|_1^7 =$$

$$= \left(-\frac{343}{3} + 4 \cdot 49 - 49\right) - \left(-\frac{1}{3} + 4 - 7\right) = -\frac{343}{3} + 196 - 49 + \frac{1}{3} + 3 = 36$$

2. Обчислити площу фігури, обмежену прямими $y = -1$, $y = 2$, $y - x = 1$ і параболою $y^2 = 2x$.



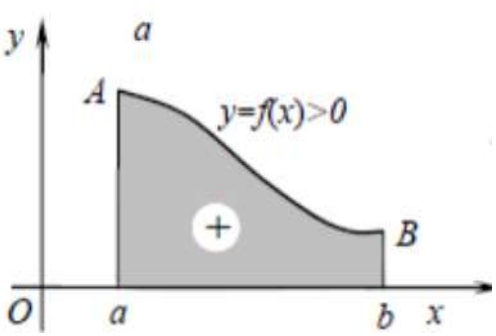
Фігура має вигляд (рис.). Знаходимо її площу за формулою (6)

$$S = \int_{-1}^{2} \left(\frac{y^2}{2} - y + 1\right) dy = \frac{y^3}{6} - \frac{y^2}{2} + y\Big|_{-1}^{2} = 3$$

28.3 Площа фігури обмеженої параметричними кривими

Якщо крива $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2$$



де $x(t)$, $y(t)$ - неперервні функції, що мають неперервні похідні на відрізку $[t_1, t_2]$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та відрізком $[a, b]$ осі Ox, визначається за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\, dt \qquad (7)$$

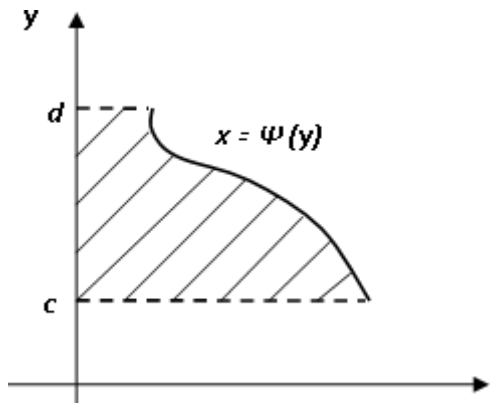
де t_1 і t_2 - значення параметра t, при яких $x = x(t_1) = a$, $x = x(t_2) = b$ (де

$y(t) \geq 0, t_1 \leq t \leq t_2$).

Дійсно, це випливає з формули площі фігури обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та відрізком $[a, b]$ осі Ox, в які виконали заміну змінної:

$$S = \int_a^b y(x)\,dx = \begin{cases} x = x(t) & x(t_1) = a, x(t_2) = b \\ y = y(t) & dx = x'(t)dt \end{cases} = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\,dt$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями



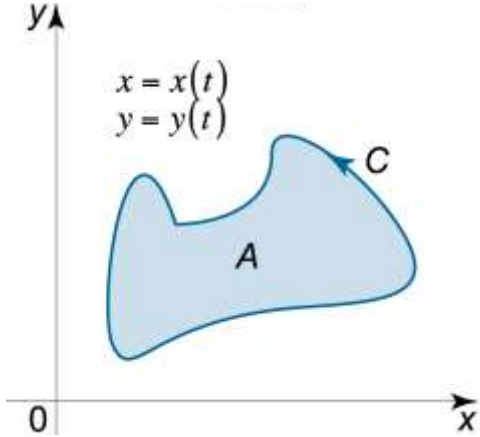
$$x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$$

де $x(t)$, $y(t)$ - неперервні функції, що мають неперервні похідні на відрізку $[t_1, t_2]$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, прямими $y = c$, $y = d$ та відрізком $[c, d]$ осі Oy, визначається за формулою:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} y'(t) \cdot x(t)\,dt \qquad (8)$$

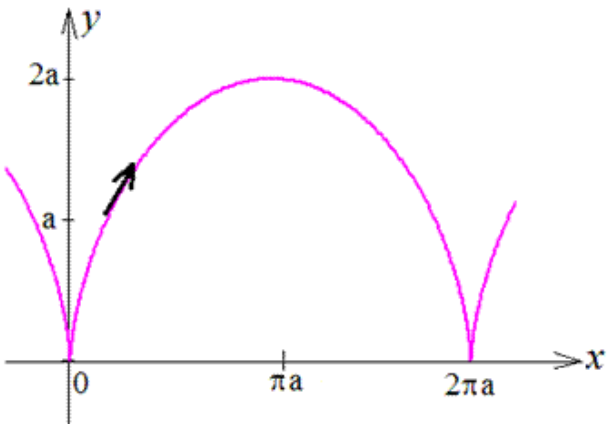
де t_1 і t_2 - значення параметра t, при яких $y = y(t_1) = c$, $y = y(t_2) = d$ (де $x(t) \geq 0, t_1 \leq t \leq t_2$)

У *загальному випадку*, якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ – параметричні рівняння гладкої кусково-замкненої кривої рух вздовж якої виконується проти годинникової стрілки так що обмежує область ліворуч (рис.), то площа області визначається наступними інтегралами:



$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt=-\int_{t_1}^{t_2} y'(t)x(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(y(t)x'(t)-y'(t)x(t)\right)dt$$

Приклади



1. Знайти площу фігури обмеженої віссю Ox та однією аркою циклоїди

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t).$$

Поглянемо на вигляд цієї кривої. Параметр t буде змінюватися від $t_1=0$ до $t_2=2\pi$.

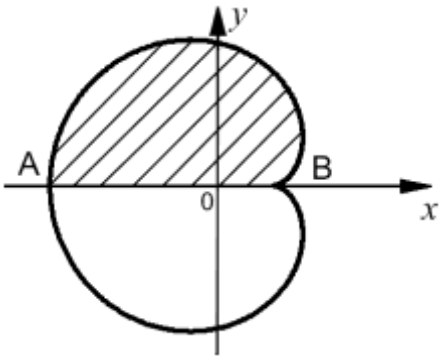
Використавши формулу (7) маємо:

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot(a(t-\sin t))'\,dt=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=a^2\left[\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi-2\sin 2\pi+\frac{1}{4}\sin 4\pi\right)-0\right]=$$

$$=a^2\cdot 3\pi=3\pi a^2$$



2. Знайти площу, обмежену кардіоїдою

$$x=a(2\cos t-\cos 2t),\ y=a(2\sin t-\sin 2t)$$

Крива симетрична відносно осі Ox. Обчислимо половину площі і подвоємо результат. Точкам A та B відповідають значення параметрів $t_1=\pi$ до $t_2=0$. За формулою (7) маємо:

$$\frac{1}{2}S=\int_\pi^0 a(2\sin t-\sin 2t)\cdot 2a(\sin 2t-\sin t)dt=2a^2\int_\pi^0\left(2\sin t\sin 2t-2\sin^2 t-\right.$$

$$\left.-\sin^2 2t+\sin t\sin 2t\right)dt=2a^2\int_\pi^0\left(3\sin t\sin 2t-2\sin^2 t-\sin^2 2t\right)dt=$$

$$=2a^2\int_\pi^0\left[\frac{3}{2}(\cos t-\cos 3t)-(1-\cos 2t)-\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\right]dt=2a^2\int_\pi^0\left(\frac{3}{2}\cos t-\frac{3}{2}\cos 3t+\right.$$

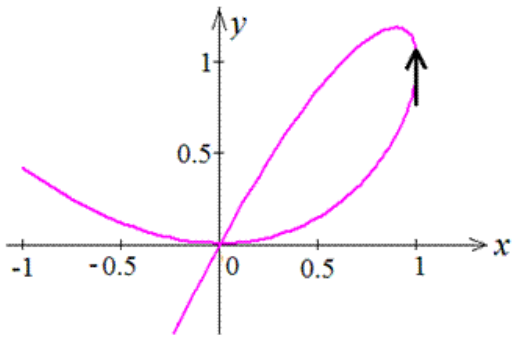
$$\left.+\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t-\frac{3}{2}\right)dt=2a^2\left(\frac{3}{2}\sin t-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4t-\frac{3}{2}t\right)\Bigg|_\pi^0=$$

$$= 2a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \pi = 3\pi a^2$$

$$S = 2 \cdot 3\pi a^2 = 6\pi a^2$$

3. Обчислити площу фігури, яка обмежена параметричними кривими

$$x = 2t - t^2 \text{ , } x = 2t^2 - t^3$$



Обчислимо похідні по змінній t від функцій:

$$x'=2-2t;\ y'=4t-3t^2.$$

Знайдемо межі інтегрування – точки перетину кривої, що обмежує задану фігуру: $x=0$ при $t_1=0$, $t_2=2$ і $y=0$ при $t_1=0$, $t_2=2$

Тому маємо період рівний $T=2$.

Запишемо підінтегральну функцію за формулою

$$x'*y-x*y'$$

(оскільки крива проходить проти годинникової стрілки):

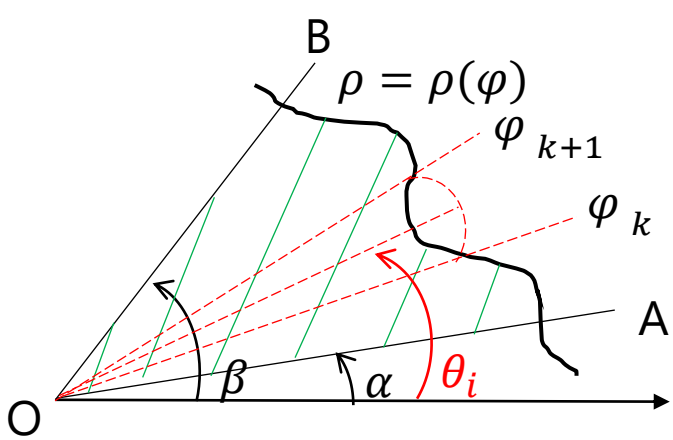
$$x \cdot y' - x' \cdot y = (2t - t^2) \cdot (4t - 3t^2) - (2 - 2t) \cdot (2t^2 - t^3) =$$
$$= 8t^2 - 6t^3 - 4t^3 + 3t^4 - 4t^2 + 2t^3 + 4t^3 - 2t^4 = t^4 - 4t^3 + 4t^2 .$$

Обчислимо площу фігури, що обмежена заданою кривою:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T (x \cdot y' - x' \cdot y)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)dt =$$
$$= \frac{32}{10} - \frac{16}{2} + \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{8}{15}$$

28.4 Площа фігури обмеженої кривими, які задані в полярних координатах

Розглянемо випадок, коли крива, що обмежує криволінійну трапецію, яка задана рівнянням в полярних координатах. Нехай така фігура має вигляд, зображений на рис., тобто вона обмежена кривою $\widetilde{AB}$, рівняння якої $\rho = \rho(\varphi)$, і двома променями OA і OB, рівняння яких є $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$. Таку фігуру називають *криволінійним сектором*.



Припустимо, що функція $\rho = \rho(\varphi)$ на відрізку $[\alpha;\ \beta]$ є неперервною. Розіб'ємо відрізок $[\alpha;\ \beta]$ на n довільних частин точками:

$$\alpha = \varphi_{\ 0} < \varphi_{\ 1} < \varphi_{\ 2} < \cdots < \varphi_{\ k} < \varphi_{\ k+1} < \cdots < \varphi_{\ n} = \beta$$

Позначимо елементарні криволінійні сектори круговими секторами з радіусами $\rho_i = \rho(\theta_i)$, $i = 1, \dots, n$. Площа таких секторів дорівнює

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho^2(\theta_i)\Delta\varphi_i$$

де $\Delta\varphi_i = \varphi_{\ i+1} - \varphi_{\ i}$

Позначимо суму площ цих секторів відповідно через

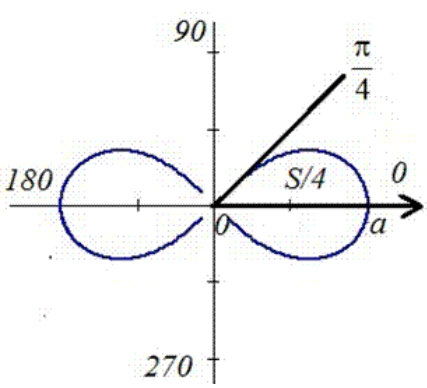
$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\theta_i)\Delta\varphi_i$$

Як бачимо, σ є інтегральна сума, побудована на відрізку $[\alpha;\ \beta]$ для неперервної функції $\frac{1}{2}\rho^2(\theta_i)$. Якщо ця сума внаслідок неперервності функції $\frac{1}{2}\rho^2(\theta_i)$ має границю при $\lambda = \max\limits_{1<i<n}\Delta\varphi_i \to 0$ та $n \to \infty$, яка не залежить ані від способу розбиття відрізка $[\alpha;\ \beta]$ на частинні відрізки, ані від вибору проміжних точок θ_i у кожному з частинних відрізків, то вона є визначеним інтегралом функції $\rho(\varphi)$ на відрізку $[\alpha;\ \beta]$, тобто площа криволінійного сектору обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi \qquad (9)$$

Приклад.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $\rho^2 = a^2\cos(2\varphi)$ (лемніската Бернуллі).



Лемніската Бернуллі – геометричне місце точок, добуток відстаней від яких до двох фіксованих точок (фокусів) залишається постійним і дорівнює квадрату половини відстані між фокусами.

1) Функція $\rho(\varphi)$ є π періодичною, можемо розглянути її на проміжку: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2) Також функція $\rho(\varphi)$ є парною, тобто можемо

розглянути її на половині проміжка: $[0,\frac{\pi}{2}]$, а друга половина функції – її віддзеркалення від віссі Оу.

3) Знайдемо допустимі кути для яких $\rho(\varphi) \geq 0$ на проміжку $[0,\frac{\pi}{2}]$, маємо

$$\cos(2\varphi) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

4) Функція $\rho(\varphi)$ є квадратичною, тобто віддзеркалюється від віссі Ох.

Оскільки задана функція осями координат ділиться на чотири рівні частини і досягає своїх критичних значень при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, то формула для знаходження четвертої частини її площи:

$$S_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos(2\varphi)\, d\varphi = a^2 \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}$$

Отже

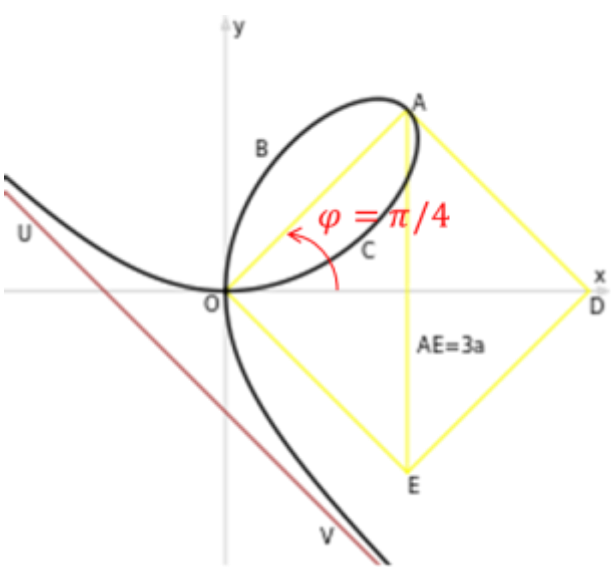
$$S = 4S_0 = 4\frac{a^2}{2} = 2a^2$$

2. Обчислити площу, обмежену петлею декартового листа, який визначається рівнянням $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

Для обчислення площі перейдемо до полярних координат, поклавши:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$$

Отримаємо:



$$\rho^3\cos^3\varphi + \rho^3\sin^3\varphi - 3a\cdot\rho\cos\varphi\rho\sin\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\rho^3\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) - 3a\rho^2\cos\varphi\sin\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$

Так як крива симетрична відносно прямої $y = x$. Тому шукану площу $OCAB$ можна розглядати як подвоєну площу OCA. При цьому радіус-вектор OA повертається від початкового положення $\varphi = 0$ на кут $\varphi = \pi/4$.

Отже

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\right)^2 d\varphi=$$

$$\frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^6\varphi+2\sin^3\varphi\cos^3\varphi+\cos^6\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^6\varphi\left(\frac{\sin^6\varphi}{\cos^6\varphi}+\frac{2\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi}+1\right)}d\varphi=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi\left(tg^6\varphi+2tg^3\varphi+1\right)}d\varphi=$$

$$=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{tg^2\varphi}{\cos^2\varphi\left(tg^3\varphi+1\right)^2}d\varphi\quad\left\{\begin{matrix}t=\tan\varphi\\ d\varphi=\frac{dt}{\cos^2 t}\end{matrix}\quad t_1=\tan 0=0,\ t_2=\tan\frac{\pi}{4}=1\right\}$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{9}{2}a^2\int_0^1\frac{t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}\quad\left\{\begin{matrix}z=t^3+1\\ dz=3t^2dt\end{matrix}\quad z_1=0^3+1=1,\ z_2=1^3+1=2\right\}$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{9}{2}a^2\int_1^2\frac{\frac{1}{3}dz}{z^2}=\frac{3}{2}a^2\int_1^2 z^{-2}dz=\frac{3}{2}a^2\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}a^2\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}a^2\ \Rightarrow\ S=2\cdot\frac{3}{4}a^2=\frac{3}{2}a^2$$