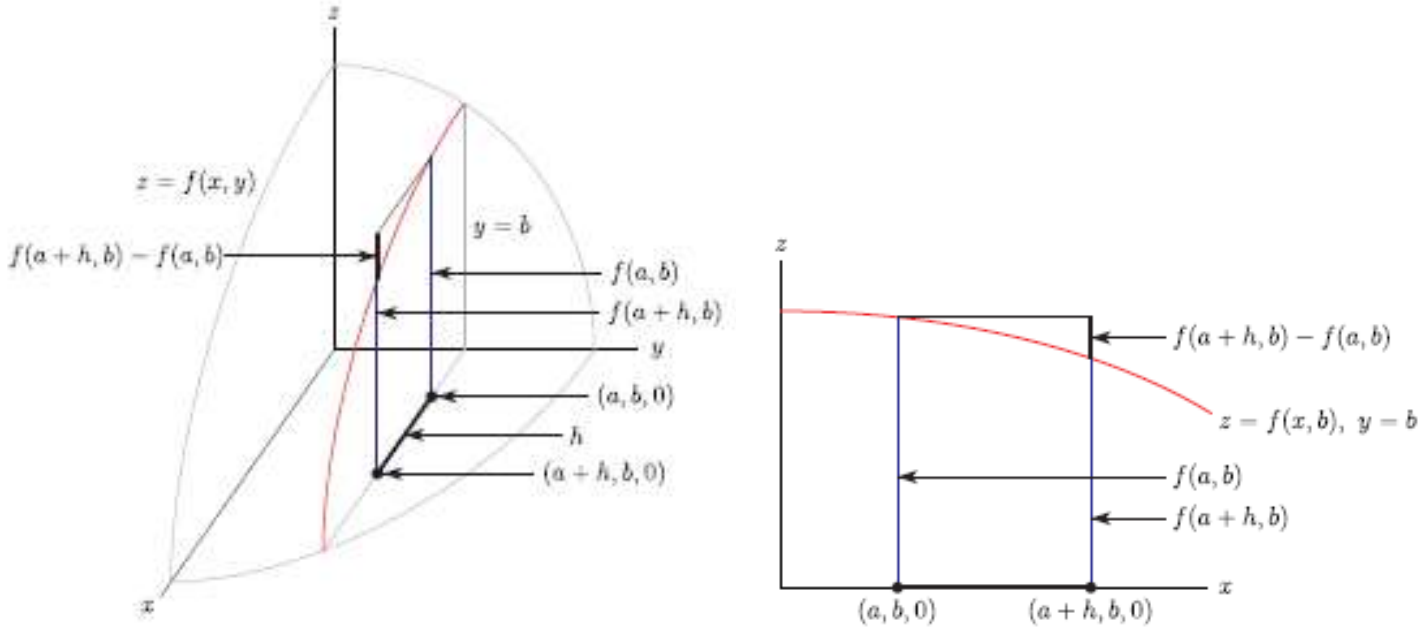
Лекція 35. Частинні похідні. Частинні похідні вищих порядків.

35.1 Частинний і повний приріст функції

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ визначена у відкритій області D і нехай незалежна змінна $y = b$ зберігає постійне значення, тоді функція $f(x, y)$ буде змінюватися в залежності від зміни x.



Надамо незалежній змінній x в точці $x = a$ приріст $\Delta x = h$, тоді $f(x, y)$ отримує приріст, який називається *частинним приростом по x*,

$$f(a + h, b) - f(a, b)$$

Якщо ми згадаємо, що функції $z = f(x, y)$ відповідає поверхня, то можна бачити, що частинний приріст $\Delta_x z$ функція отримує вздовж лінії перетину поверхні $z=f(x, y)$ з площиною $y = b = const$, яка паралельна координатній площині xOz.

Для будь-якого x, *частинний приріст* функції $f(x, y)$ *по x* позначається $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Аналогічно, якщо x зберігає постійне значення, а y отримує приріст Δy, то $f(x, y)$ отримує приріст, який називається *частинним приростом по y* і позначається $\Delta_y z$, тобто

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Взагалі, якщо одночасно надати аргументу x приріст Δx, а аргументу y приріст Δy, то отримаємо приріст Δz, який називається *повним приростом* функції $f(x, y)$ і визначається формулою:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Зауваження: Треба відмітити, що, взагалі, повний приріст не дорівнює сумі *частинних приростів*, тобто

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Приклад. Знайти частинні $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, і повний Δz прирости функції $z=xy$.

Розв'язання. Маємо

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = \Delta x \cdot y,$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = \Delta y \cdot x,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)\cdot(y + \Delta y) - xy = \Delta x \cdot y + \Delta y \cdot x + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Видно, що

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

35.2 Частинні похідні функції двох змінних

Вивчаючи похідні функцій однієї змінної, ми виявили, що одна інтерпретація похідної - це миттєва швидкість зміни функції y - залежної змінної від незалежної змінної - x Позначення Лейбніца для похідної це частка диференціалів - $\frac{dy}{dx}$.

Для функції $z = f(x, y)$ двох змінних x і y є незалежними змінними, а z - залежною змінною. Як ми адаптуємо позначення Лейбніца для функцій двох змінних? Відповідь полягає у введенні *частинних похідних*.

Означення 1. *Частинною похідною по x від функції z=f(x, y)* називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до приросту Δx, якщо Δx прямує до нуля. Частинна похідна по x від функції $z=f(x, y)$ позначається одним із символів

$$z'_x, \quad f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

Таким чином, згідно з означенням

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}}$$

де $\Delta_x f = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ – частинний приріст функції

Аналогічно, частинна похідна функції $f(x,\ y)$ відносно y, записана як $\frac{\partial f}{\partial y}$, або f'_y, визначається як

Означення 2. *Частинна похідна* по y від функції $z=f(x,\ y)$ визначається як границя відношення частинного приросту функції $\Delta_y z$ до приросту Δy, якщо Δy прямує до нуля. Ця частинна похідна позначається одним із символів:

$$z'_y, \quad f'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Таким чином,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}}$$

$\Delta_y f = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ – частинний приріст функції

Ці означення показують вже дві відмінності.

По-перше, позначення змінюється в тому сенсі, що ми все ще використовуємо версію позначення Лейбніца, але d в оригінальному позначенні замінено символом ∂. (Це округлене "d" зазвичай називають "частинним", тому $\frac{\partial f}{\partial x}$ називають "частинним f щодо x")

По-друге, тепер у нас є дві різні похідні, які ми можемо взяти, оскільки є дві різні незалежні змінні. Залежно від того, яку змінну ми вибрали, ми можемо придумати різні частинні похідні взагалі.

З означення частинних похідних ми можемо правило їх знаходження:

- *частинною похідною по* x від функції $z=f(x,\ y)$ називається звичайна похідна по x, яку ми знаходимо для $f(x,\ y)$ при припущенні, що y є стала;
- *частинною похідною по* y від функції $z=f(x,\ y)$ називається звичайна похідна по y, яку знаходимо для $f(x,\ y)$ при припущенні, що x є стала.

З цих означень випливає, що правила знаходження частинних похідних співпадають з правилами, які вказані для функцій однієї змінної, тільки треба пам’ятати, по якій змінній шукається похідна.

Приклади Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій z:

1) $z=x^2 \sin y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

2) $z=x^y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Як практична підказка, під час обчислення частинних похідних слід розглядати всі незалежні змінні, крім змінної, відносно якої ми диференціюємо, як постійну. Потім перейти до диференцювання як функції однієї змінної. При цьому застосовуються всі правила диференцювання для диференцювання функцій однієї змінної.

3) Обчислити $\partial f/\partial x$ та $\partial f/\partial y$ для функції

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y - 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y - 12\Big] = \frac{\partial}{\partial x}[x^2] - \frac{\partial}{\partial x}[3xy] + \frac{\partial}{\partial x}[2y^2]$$
$$- \frac{\partial}{\partial x}[4x] + \frac{\partial}{\partial x}[5y] - \frac{\partial}{\partial x}[12\Big] = 2x - 3y + 0 - 4 + 0 - 0$$
$$= 2x - 3y - 4.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y - 12\Big] = \frac{\partial}{\partial y}[x^2] - \frac{\partial}{\partial y}[3xy] + \frac{\partial}{\partial y}[2y^2]$$
$$- \frac{\partial}{\partial y}[4x] + \frac{\partial}{\partial y}[5y] - \frac{\partial}{\partial y}[12\Big] = 0 - 3x + 4y - 0 + 5 - 0$$
$$= -3x + 4y + 5.$$

4) Обчислити $\partial g/\partial x$ та $\partial g/\partial y$ для функції

$$g(x,y) = \sin(x^2y - 2x + 4)$$

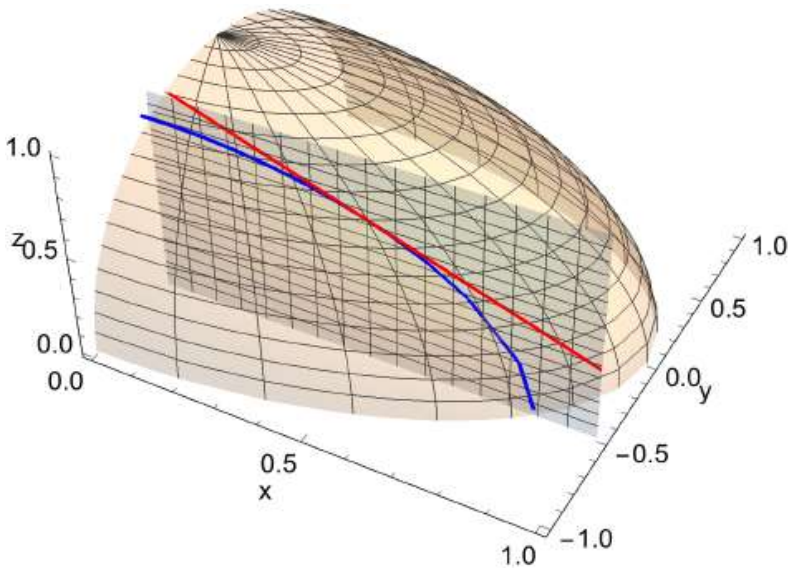
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\sin(x^2y - 2x + 4)\Big] = \cos(x^2y - 2x + 4)\frac{\partial}{\partial x}[x^2y - 2x + 4\Big]$$
$$= (2xy - 2)\cos(x^2y - 2x + 4).$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\sin(x^2y - 2x + 4)] = \cos(x^2y - 2x + 4)\frac{\partial}{\partial y}[x^2y - 2x + 4]$$
$$= x^2\cos(x^2y - 2x + 4).$$

35.3 Геометрична інтерпретація частинних похідних

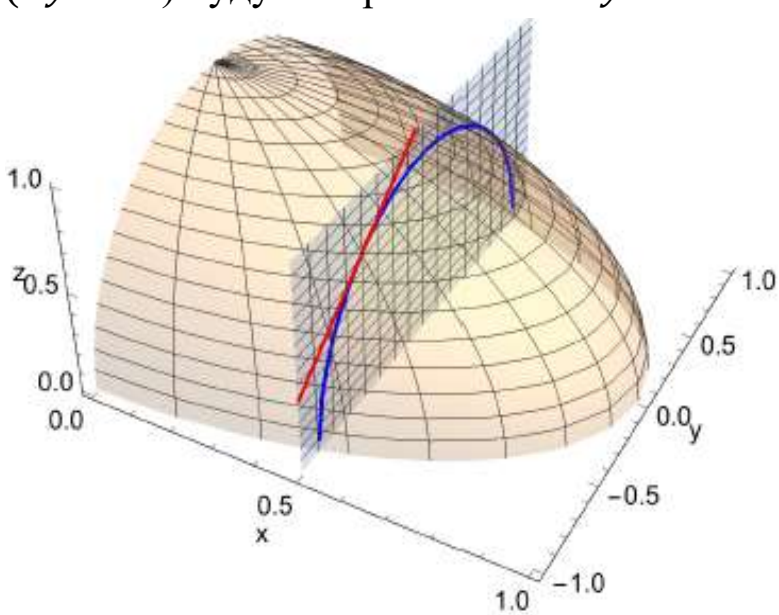
Ми можемо інтерпретувати ці частинні похідні наступним чином. Якщо побудувати графік $f(x,\ y)$ та $f(x\ +\ \Delta x,\ y)$ (тобто y вважається *постійною*) для довільної точки $(x,\ y)$, то нахил січної лінії, що проходить через ці дві точки, дорівнює

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$



Ця пряма паралельна осі x. Отже, нахил січної лінії являє собою середню швидкість зміни функції $f(x, y)$, коли ми рухаємося паралельно осі x. Коли Δx наближається до нуля, нахил січної лінії наближається до нахилу дотичної лінії до кривої в точці $(x,\ y,\ f\ (x,\ y))$, як показано на малюнку.

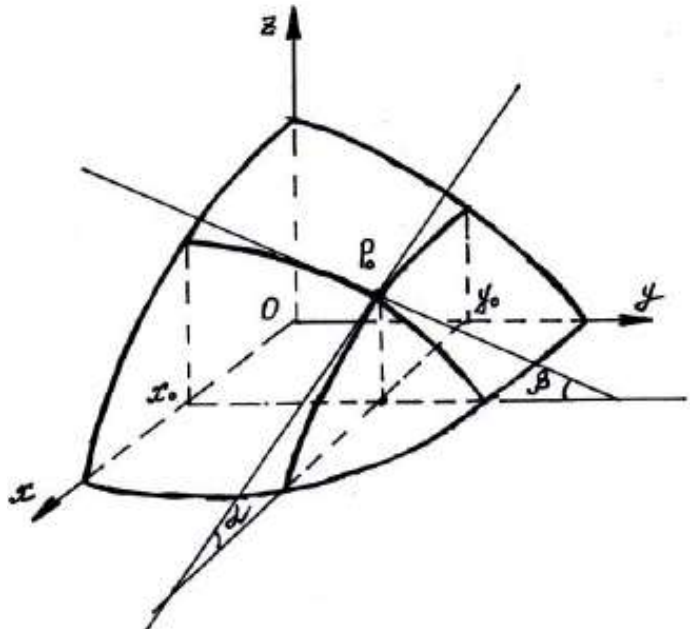
Якщо ми змінемо y замість x (тобто x вважається *постійною*) при одному і тому ж прирісту значення Δy, то січна лінія $\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$, як і дотична лінія ($\Delta y \to 0$) будуть паралельна осі y.



Отже, $\frac{\partial f}{\partial x}$ представляє нахил дотичної лінії, що проходить через точку $(x,\ y,\ f\ (x,\ y))$, паралельну осі x, а $\frac{\partial f}{\partial y}$ являє собою нахил дотичної лінії, що проходить через точку $(x,\ y,\ f\ (x,\ y))$, паралельну осі y, як показано на іншому малюнку.

Частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ чисельно дорівнює *тангенсу кута*(α – кут між віссю Ox

та дотичною) *нахилу дотичної* до кривої, яку ми отримуємо при перетині поверхні *z=f(x, y)* площиною *y=const*, а частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ чисельно дорівнює *тангенсу кута* (β – кут між віссю Oy та дотичною) *нахилу дотичної* до кривої, яку ми отримуємо при перетині поверхні *z=f(x, y)* площиною *x=const*.



Коментар: Кажуть, що функція має частинну похідну у відкритій області *D*, якщо вона має частинну похідну в кожній точці цієї області.

Похідна функції більше двох змінних

Припустимо, ми маємо функцію від трьох змінних, таких як $w = f\,(x,\, y,\, z)$. Ми можемо обчислити частинні похідні w відносно будь-якої незалежної змінної просто як розширення визначень для часткових похідних функцій двох змінних.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x{}'(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y{}'(x,y,z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z{}'(x,y,z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z f(x,y,z)}{\Delta z}$$

Для обчислення частинної похідної функції трьох змінних, використовується та ж сама ідея, як для функції двох змінних. Наприклад, якщо у нас є функція f від x, y та z, і ми хочемо обчислити $\frac{\partial f}{\partial x}$, тоді ми розглядаємо інші дві незалежні змінні так, ніби вони є постійними, а потім диференціюємо відносно x. Так само для інших змінних.

Це правило узагальнюється на функції будь-якого числа змінних $u = f(x_1, x_2, x_3, \ \dots, x_n)$: у загальному випадку функцій з будь-яким числом незалежних змінних, означення частинних похідних дається як наступне:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_1} = f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

при припущенні, що границя існує; або по всім змінним

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}'(x_1, x_2, x_3, \ \dots, x_n) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(x_1, x_2, x_3, \ \dots, x_n)}{\Delta x_i}}$$

$i = 1,2,3, \ \dots, \ n$

35.4 Повний диференціал функції двох змінних

Якщо незалежній змінній x надати приріст Δx та одночасно, незалежній змінній y надати приріст Δy, та розглянути різницю між значеннями функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y)$ та в точці $M(x_0, \ y_0)$, отримаємо *повний приріст функції в точці* $M(x_0, \ y_0)$, який позначається

$$\Delta f(x_0, \ y_0) \equiv \Delta z(x_0, \ y_0) = f(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y) - f(x_0, \ y_0)$$

Слід зазначити, що повний приріст функції не дорівнює сумі частинних приростів, тобто

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

Зупинимося на аналізі структури приросту функції. Якщо його можна зобразити у вигляді суми лінійної (відносно Δx та Δy) частини та “добавки” (доданків більш високого порядку)

$$\Delta f\left(x_0, y_0\right) = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

де ε_1, ε_2 – нескінені малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$; A і B - деякі константи, то функція $z = f(x, y)$ зветься диференційованою, а вираз

$$A\Delta x + B\Delta y$$

– її *повним диференціалом*, який позначають df або dz, тобто

$$df \equiv dz = A\Delta x + B\Delta y$$

Зміст визначення диференційованості розкривається, якщо перетворити рівняння для повного приросту функції:

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) = f(x_0,\ y_0) + \Delta f(x_0,\ y_0)$$
$$= f(x_0,\ y_0) + A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Звідки, якщо $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$, то значення функції в точці $f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ приблизно дорівнює значенню функції в точці $f(x_0,\ y_0)$ плюс лінійний приріст $A\Delta x + B\Delta y$, при умові що $\varepsilon_1 \Delta x$ та $\varepsilon_2 \Delta y$ є нескінчено малі вищого порядку ніж Δx і Δy.

Отримаємо наближене значення функції:

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0,\ y_0) + A\Delta x + B\Delta y = f(x_0,\ y_0) + df$$

Обчислимо коефіцієнти A і B:

Для визначення коефіцієнта A припустимо $\Delta y = 0$, тоді

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) = A\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$$

Поділивши обидві частини рівності на Δx, перейдемо до границі за умовою $\Delta x \to 0$ до границі

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + 0) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta x} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1}_{=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Аналогічно можна знайти

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Звідки, отримали остаточний вираз для повного приросту функції $z = f(x, y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$

$$\Delta f(x_0,\ y_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)$$
$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Означення. Головну частину повного приросту функції двох змінних $\Delta f(x_0,\ y_0)$, яка лінійно залежить від приросту аргументів, і називається *повним диференціалом функції* $z = f(x, y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$:

$$df(x_0,\, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \Delta y$$

або незалежно від точки де він обчислюється

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Оскільки для незалежних змінних їх прирости і диференціали співпадають, тобто $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ остаточно формула для повного диференціала має вигляд

$$\boxed{df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

Основною властивістю диференціала є інваріантність форми першого диференціала, тобто рівність $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ виконується незалежно від того, чи є змінні x та y незалежними або самі є функціями інших аргументів.

Правило знаходження повного диференціалу узагальнюється на функції будь-якого числа змінних $u = f(x_1, x_2, x_3,\ \dots, x_n)$:

$$\boxed{df(x_1, x_2, x_3,\ \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3,\ \dots, x_n)}{\partial x_i} dx_i}$$

Приклади обчислення повного диференціалу функції двох змінних

Приклад. Знайти повні диференціали функцій:

а) $z = x^3y^2$.

Розв'язання. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y$ підставляємо до формули повного диференціалу функції двох змінних

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy.$$

б) $z = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Аналогічно прикладу а).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x^2}=-\frac{y}{x^2\cos\frac{y}{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x\cos^2\frac{y}{x}};$$

$$dz=\frac{-y}{x^2\cos^2\frac{y}{x}}dx+\frac{1}{x\cos^2\frac{y}{x}}dy.$$

Застосування повного диференціалу до наближеного обчислення значення функції в точці

Формулу повного диференціалу функції двох змінних зручно використовувати для наближеного обчислення значення функції в точці:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx f(x_0,\ y_0)+df=f(x_0,\ y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\Delta y$$

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{(4.05)^2+(2.93)^2}$.

Розв'язання. Припустимо, що ми знаємо значення функції $z=f(x,y)$ в деякій точці $(x_0,\ y_0)$, а нам необхідно знайти її значення в точці, близькій до даної $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$.

Розглянемо функцію $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Близькими до заданих значень аргументів та такими, що обчислення буде достатньо простим є значення

$$x_0=4,\ y_0=3,\ f(x_0,\ y_0)=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

Тоді, так як

$$x=x_0+\Delta x \text{ і } y=y_0+\Delta y,$$

то

$$\Delta x=0.05,\ \text{ а } \Delta y=-0.07.$$

Залишилось знайти диференціал в точці $(x_0,\ y_0)=(4{,}3)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dz\Big|_{\substack{x=4\\y=3}} = \frac{4}{\sqrt{16+9}}\cdot 0,05 - \frac{3}{\sqrt{16+9}}\cdot 0,07 = -0,002$$

Звідки

$$z\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) = \sqrt{\left(4,05\right)^2 + (2,93)^2} \approx 5 - 0,002 = 4,998$$

35.5 Диференціювання складених функцій

В диференційному численні функцій однієї змінної ми виявили, що одним з найбільш корисних правил диференцювання є правило «ланцюга», яке дозволяє знайти похідну скланеної функції (композиції двох або більше функцій). Те саме стосується диференційного числення функцій багатьох змінних, але цього разу нам доведеться мати справу з кількома формами правила «ланцюга».

Нагадаємо, що правило «ланцюга», для похідної скланеної функції - композиції двох функцій можна записати у формі

$$\frac{d}{dx}(f(u(x))) = f'\big(u(x)\big)u'(x\Big)$$

У цьому рівнянні і $f\,(x)$, і $u\,(x)$ є функціями однієї змінної. Тепер припустимо, що f є функцією двох змінних, а $u(x)$ - функцією однієї змінної. Або, можливо, вони обоє є функціями двох змінних, а то й більше. Як би ми обчислили похідну в цих випадках? Наступна теорема дає нам відповідь на випадок однієї незалежної змінної

Теорема 1. Нехай функція $z = f(x,\, y)$ – диференційована функція аргументів x та y , які у свою чергу є диференційованими функціями незалежної змінної t:

$$x = x(t),\, y = y(t),$$

тоді складена функція $z = f\,[x(t),\, y(t)]$ також диференційована і визначається за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

де звичайні похідні беруться за змінною t, а часткові похідні – за x та y

Зауваження: Два члени з'являються в правій частині формули, так як f є функцією двох змінних. Ця формула також працює з функціями більше двох змінних $u = f\,[x_1(t), x_2(t), \ \dots, x_n(t)]$:

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}}$$

Приклад. Обчислити $\frac{dz}{dt}$ наступної функції:

$$z = f(x, y) = 4x^2 + 3y^2, \text{де } x = x(t) = \sin t, y = y(t) = \cos t$$

Для використання правила ланцюга нам потрібні чотири величини:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x, \frac{dx}{dt} = \cos t, \frac{\partial z}{\partial y} = 6y, \frac{dy}{dt} = -\sin t$

Таким чином,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (8x)(\cos t) + (6y)(-\sin t) = 8x\cos t - 6y\sin t.$$

Ця відповідь містить три змінні. Щоб звести його до однієї змінної, скористайтесь тим, що $x(t) = \sin t$ та $y(t) = \cos t$. Отримуємо

$$\frac{dz}{dt} = 8x\cos t - 6y\sin t = 8(\sin t)\cos t - 6(\cos t)\sin t = 2\sin t\cos t.$$

Цю похідну також можна обчислити, спочатку підставивши $x(t)$ та $y(t)$ в $f(x, y)$, потім диференціювання щодо t :

$$z = f(x, y) = f(x(t), y(t)) = 4(x(t))^2 + 3(y(t))^2 = 4\sin^2 t + 3\cos^2 t.$$

Тоді,

$$\frac{dz}{dt} = 2(4\sin t)(\cos t) + 2(3\cos t)(-\sin t) = 8\sin t\cos t - 6\sin t\cos t$$
$$= 2\sin t\cos t,$$

що є тим самим рішенням. Однак не завжди це легко диференціювати у такій формі.

Розглянемо складніший випадок.

Нехай $z = f\,(x, y)$ є функцією x та y, а вони обидві у свою чергу є функціями незалежних змінних u та v такі як

$$x = g(u, v) \text{ та } y = h(u, v)$$

Теорема 2. Нехай $x = g(u, v)$ та $y = h(u, v)$ є диференційованими функціями u і v, а $z = f(x, y)$ є диференційованою функцією x та y. Тоді $z = f(g(u, v), h(u, v))$ є диференційованою функцією u та v, і

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

та

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Приклад: Використати правило ланцюга для диференціювання складеної функцій двох змінних $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$ функції:

$$z = f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2, x = x(u, v) = 3u + 2v, y = y(u, v) = 4u - v$$

Для реалізації правила ланцюга для двох змінних нам потрібні шість частинних похідних:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 3, \frac{\partial x}{\partial v} = 2, \frac{\partial y}{\partial u} = 4, \frac{\partial y}{\partial v} = -1.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 3(6x - 2y) + 4(-2x + 2y) = 10x + 2y$$

Далі підставляємо $x(u, v) = 3u + 2v$ та $y(u, v) = 4u - v$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 10x + 2y = 10(3u + 2v) + 2(4u - v) = 38u + 18v$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2(6x - 2y) + (-1)(-2x + 2y) = 14x - 6y$$

Підставляємо $x(u, v) = 3u + 2v$ та $y(u, v) = 4u - v$:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 14x - 6y = 14(3u + 2v) - 6(4u - v) = 18u + 34v$$

Узагальнене правило ланцюга стверджує:

Нехай $w = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ - диференційована функція від m незалежних змінних, і для кожного $i \in 1,2,\ldots,m$, нехай $x_i = x_i(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$ - диференційована функція з n незалежних змінних. Тоді

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t_j} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_j}}$$

для будь-якого $j \in 1,2,\ldots,n$.

Приклад: Використання узагальненого правила ланцюга

$w = f(x,y,z) = 3x^2 - 2xy + 4z^2$,

$x = x(u,v) = e^u \sin v$, $y = y(u,v) = e^u \cos v$, $z = z(u,v) = e^u$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Отже, існує дев'ять різних частинних похідних, які потрібно обчислити та замінити. Нам потрібно розрахувати кожен з них. Тоді

$$\frac{\partial w}{\partial u} = (6x - 2y)e^u si\,n\,v - 2xe^u co\,s\,v + 8ze^u$$
$$= (6e^u si\,n\,v - 2euco\,s\,v)e^u si\,n\,v - 2(e^u si\,n\,v)e^u co\,s\,v + 8e^{2u}$$
$$= 6e^{2u}\sin^2 v - 4e^{2u} si\,n\,v\,co\,s\,v + 8e^{2u}$$
$$= 2e^{2u}(3\sin^2 v - 2si\,n\,v\,co\,s\,v + 4).$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = (6x - 2y)e^u \cos v - 2x(-e^u \sin v)$$
$$= (6e^u \sin v - 2e^u \cos v)e^u \cos v + 2(e^u \sin v)(e^u \sin v)$$
$$= 2e^{2u}\sin^2 v + 6e^{2u}\sin v \cos v - 2e^{2u}\cos^2 v$$
$$= 2e^{2u}(\sin^2 v + \sin v \cos v - \cos^2 v)$$

35.6 Диференціювання неявно заданих функцій

Теорема: Нехай функція $z = f(x, y)$ неявно визначає y як функцію $y = g(x)$ від x через рівняння $F(x, y) = 0$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

при умові $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Це випливає з

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = 0, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

Якщо рівняння $F(x,\ y,\ z) = 0$ неявно визначає $z = f\ (x,\ y)$ як диференційовану функцію x та y, то

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}\end{gathered}}$$

Приклад 1. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4y - 4$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ та } \frac{\partial f}{\partial y} = 6y + 4$$

Звідси

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{2x}{6y+4} = -\frac{x}{3y+2},$$

Приклад 2. $f(x, y, z) = x^2 e^y - yze^x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y - yze^x, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y - ze^x \text{ та } \frac{\partial f}{\partial z} = -ye^x$$

Звідси

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} = -\frac{2xe^y - yze^x}{-ye^x} = \frac{2xe^y - yze^x}{ye^x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z} = -\frac{x^2 e^y - ze^x}{-ye^x} = \frac{x^2 e^y - ze^x}{ye^x}$$

35.7 Частинні похідні вищих порядків

Нехай функція декількох змінних $u = f\ (x_1, x_2, x_3,\ \ldots, x_n)$ має частинні похідні. В загальному випадку вони є знову функціями декількох змінних. Тому від них можна знову знайти частинні похідні.

Розглянемо функцію двох змінних $z=f(x, y)$. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ є функціями змінних x і y. Тому від них знову можна знаходити частинні похідні. Ці похідні називаються *другими* частинними похідними. Для функції двох змінних *других частинних похідних* буде чотири. Вони позначаються таким чином:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = f''_{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = f''_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,)}{\partial y}\right] = f''_{y^2}$$

При цьому приймаємо такі угоди:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$ - функція $f(x, y)$ диференцюється послідовно два раза по x.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$ є *мішана* похідна. Тут функція $f(x, y)$ спочатку диференцюється по x, а потім результат диференцюється по y.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$ є *мішана* похідна. Тут функція $f(x, y)$ спочатку диференцюється по y, а потім результат диференцюється по x.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$ функція $f(x, y)$ послідовно диференцюється по y два раза.

Частинні похідні вищого порядку, обчислені щодо різних змінних, таких як f''_{yx} та f''_{xy} (тобто вирізняються послідовністю диференціювання) зазвичай називають *змішаними частинними похідними*.

Приклад 1: Обчисліть всі чотири другі частинні похідні для функції.

$$f(x,y) = xe^{-3y} + \sin(2x - 5y).$$

Спочатку обчислюємо $\partial f/\partial x$: $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-3y} + 2\cos(2x - 5y)$.

Тоді,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial f}{\partial x}] = \frac{\partial}{\partial x}[e^{-3y} + 2\cos(2x - 5y)] = -4\sin(2x - 5y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial f}{\partial x}] = \frac{\partial}{\partial y}[e^{-3y} + 2\cos(2x - 5y)] = -3e^{-3y} + 10\sin(2x - 5y)$$

Також, обчислюємо $\partial f/\partial y$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3xe^{-3y} - 5\cos(2x - 5y).$$

Тоді , можемо обчислити

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial f}{\partial y}] = \frac{\partial}{\partial y}[-3xe^{-3y} - 5\cos(2x - 5y)] = 9xe^{-3y} - 25\sin(2x - 5y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial f}{\partial y}] = \frac{\partial}{\partial x}[-3xe^{-3y} - 5\cos(2x - 5y)] = -3e^{-3y} + 10\sin(2x - 5y)$$

Зауважемо, що

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3e^{-3y} + 10\sin(2x - 5y)$$

Приклад 2. Знайти другі частинні похідні $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ функції

$$z = f(x,y) = x^2 y + y^3$$

Розв'язання.

Маємо $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 2x$.

Зауважемо, що в розглянутому прикладі також $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

За певних умов це завжди виконується. Так як це є прямий наслідок наступної теореми:

Теорема Клеро (*Рівність змішаних частинних похідних*)

Припустимо, що $z = f\ (x,\ y)$ визначено на відкритому диску D, що містить точки $(x,\ y)$. Якщо функції $f''_{yx}(x,\ y)$ та $f''_{xy}(x,\ y)$ неперервні на D, то

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ або } f''_{yx} = f''_{xy}}$$

Ця теорема узагальнюється на функції більше двох змінних, тобто $u = f(x_1, x_2, x_3,\ \ldots, x_n)$

Теорема Клеро гарантує, що поки змішані похідні другого порядку безперервні, порядок, в якому ми обираємо диференціювання функції (тобто яка змінна йде першою, потім другою тощо), не має значення.

У свою чергу, похідні 2-го порядку можна знову диференціювати як по *x,* так і по *y* тобто можно визначити частинні похідні вищих порядків, наприклад отримаємо частинні похідні третього порядку:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Коментар: При цьому згідно теореми Клеро результат багаторазового диференціювання функції по різним змінним не залежить від послідовності диференціювання за цими змінними. Істотним є лише те, щоб обчислювані частинні похідні були неперервними. *Тобто правило (теорема) Клеро поширюється також на похідні вищого порядку.*

Приклад. Для функції $u = e^{xyz}$обчислити $\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz \cdot e^{xyz}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(yz \cdot e^{xyz}) = y^2 z^2 e^{xyz}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 z^2 e^{xyz}) = 2yz^2 e^{xyz} + xy^2 z^3 e^{xyz} = yz^2 e^{xyz}(2 + xyz)$$

Тобто можна стверджувати, що при повторному (багатократному) диференціюванні функції двох змінних, можна як завгодно змінювати

порядок диференціювання, якщо тільки отримані в результаті похідні задовільняють умови теореми.

Взагалі, *частинна похідна n-го порядку – є перша частинна похідна від частинної похідної (n-1) порядку.*

Наприклад, $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ - є частинною похідною n-го порядку. Тут спочатку функцію $z = f(x, y)$ p раз диференцюють по x, а потім $(n - p)$ раз - по y.

Для функції будь-якого числа змінних частинні похідні вищих порядків визначаються аналогічно.

35.8 Диференціали вищих порядків

Нехай функція декількох змінних $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ має неперервні частинні похідні 1-го порядку. Очевидно, диференціал цієї функції du, це також функція n-змінних, і тому ми можемо знайти загальний диференціал цієї функції du, тобто $d(du)$ який називається *диференціалом 2-го порядку* і позначається як d^2u

Аналогічно ми можемо знайти $d(d^2u) = d^3u$ - диференціал 3-го порядку і т. д. Таким чином, диференціал n-го порядку набуває вигляду:

$$d^n u = d(d^{n-1}u)$$

Зауваження: Прирости незалежних змінних $dx_1, dx_2, dx_3, \dots, dx_n$ вважаються постійними, і при переході від одного диференціала до іншого вони залишаються незмінними.

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Тоді,

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right)z$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

Отже,

$$d^2 z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$d^3 z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

і т.д.

Для диференціалів вищих функцій декількох змінних $u = f(x_1, x_2, x_3, \ \dots, x_n)$ порядків має місце наступна формула:

$$d^m u = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^m u$$

Приклад. Для функції $z = \arctan\frac{x}{y}$ обчислити $d^2 z$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2/y^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + x^2/y^2} \cdot (-\frac{x}{y^2}) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Тоді

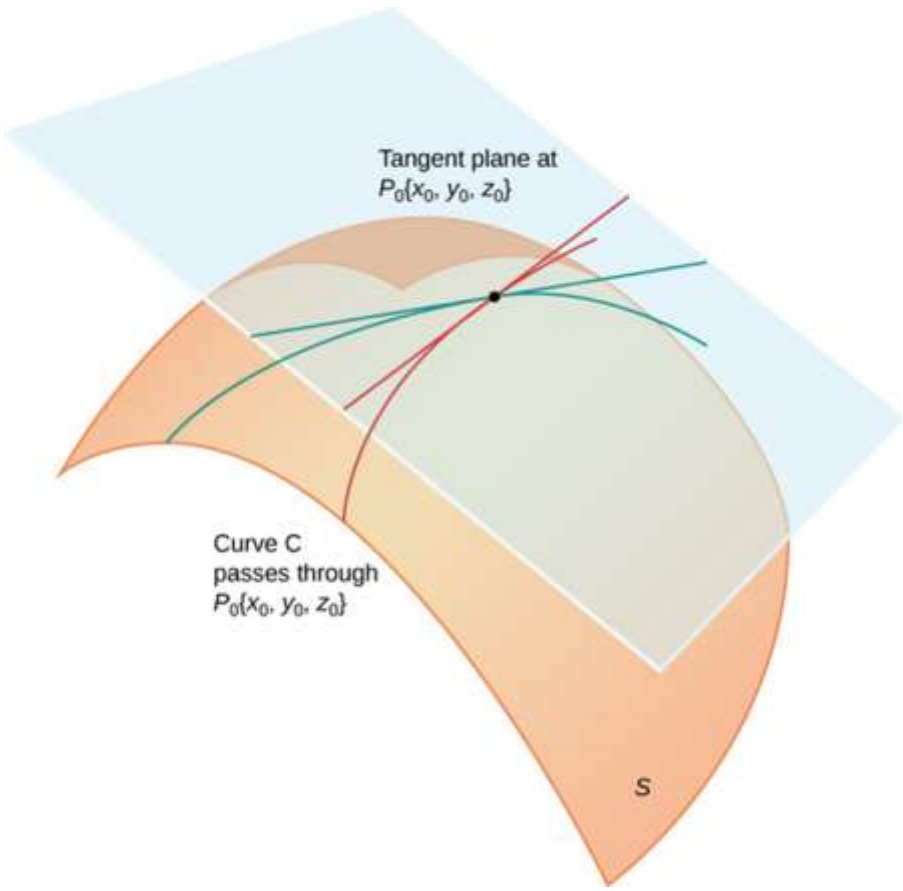
$$d^2 z = \frac{2xy(dy^2 - dx^2) + 2(x^2 - y^2)dxdy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

35.9 Рівняння дотичної площини до поверхні. Рівняння нормалі

Нехай деяка поверхня S задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Якщо в точці $P_0\ (x_0, y_0, z_0) \in S$ всі три похідні $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ неперервні і хоча б одна з них не дорівнює нулю, то точка P називається *звичайною*. Якщо всі три похідні

дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує, то точка P називається *особливою* (вершина конічної поверхні). Якщо всі точки поверхні S є звичайними, то поверхня називається *гладкою* (*простою*).

Означення. Дотичною прямою до поверхні у звичайній точці називається дотична до деякої кривої, яка розміщена на цій поверхні і проходить через дану точку $P_0\ (x_0 y_0,\ z_0)$.



Теорема. Усі дотичні прямі до гладкої поверхні у звичайній точці лежать в одній площині.

Площина, яка містить усі дотичні до кривих, що розміщені на поверхні і проходять через дану точку, називається *дотичною площиною*.

Означення 1: Нехай S - поверхня, що визначається диференційованою функцією $z = f\ (x,\ y)$, і нехай $P_0\ (x_0, y_0)$ - точка в множині значень функції f. Тоді рівняння *дотичної площини* до S в точці $P_0\ (x_0, y_0,\ z_0)$, де $z_0 = f\ (x_0, y_0)$ задається формулою

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}$$

Доведення: Щоб зрозуміти, чому ця формула правильна, давайте спочатку знайдемо дві дотичні лінії до поверхні S. Рівняння дотичної лінії до кривої, яка представлена перетином S вертикальним перетином, заданим $x = x_0$, дорівнює

$$z = f(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Подібним чином рівняння дотичної лінії до кривої, яка представлена перетином S з вертикальним перетином, заданим $y = y_0$, дорівнює

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$$

Паралельним вектором до першої дотичної лінії є $\vec{a} = \vec{j} + f_y(x_0, y_0)\vec{k}$ і паралельним вектором до другої дотичної прямої є $\vec{b} = \vec{i} + f_x(x_0, y_0)\vec{k}$.

Ми можемо скласти вектор нормалі дотичної площини, взявши векторний добуток цих двох векторів:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\vec{j} + f_y(x_0, y_0)\vec{k}\right) \times \left(\vec{i} + f_x(x_0, y_0)\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \end{vmatrix} =$$

$$f_x(x_0, y_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}$$

Використовуваючи цей вектор як нормальний вектор $\vec{n}$ до дотичної площини разом з точкою $P_0\ (x_0, y_0, f\ (x_0, y_0))$ рівнянні площини запишиться у формі:

$$\vec{n} \cdot ((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - f(x_0, y_0))\vec{k}) = 0,$$
$$(f_x'(x_0, y_0)\vec{i} + f_y'(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}) \cdot ((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - f(x_0, y_0))\vec{k}) = 0,$$
$$f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Означення 2: Вектор $\vec{n}$, перпендикулярний дотичній площині, визначає також *нормаль* або лінію, перпендікулярну до поверхні S, що визначається диференційованою функцією $z = f\ (x, y)$, тобто рівняння прямої, нормальної до поверхні S в точці $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$, де $z_0 = f\ (x_0, y_0)$ задається формулою:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{(y-y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{(z-f(x_0,y_0))}{-1}}$$

Приклад 1: Знайти рівняння дотичної площини до поверхні, визначеної функцією $f(x,y)=2x^2-3xy+8y^2+2x-4y+4$ в точці (2, -1)

$$f_x'(x,y)=4x-3y+2$$
$$f_y'(x,y)=-3x+16y-4$$
$$f(2,-1)=2\cdot 2^2-3(2)(-1)+8\cdot(-1)^2+2(2)-4(-1)+4=34$$
$$f_x'(2,-1)=4(2)-3(-1)+2=13$$
$$f_y'(2,-1)=-3(2)+16(-1)-4=-26.$$

Тоді рівняння дотичної площини стає

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$z=34+13(x-2)-26(y-(-1))$$
$$z=34+13x-26-26y-26$$
$$z=13x-26y-18.$$

Рівняння нормальної прямої є

$$\frac{(x-2)}{13}=\frac{(y+1)}{-26}=\frac{(z-34)}{-1}$$

Зауваження: Якщо поверхня S визначається диференційованою функцією $F(x,\ y,z)=0$, і точка $P_0\ (x_0,y_0,\ z_0)$ належить до множини значень функції F. Тоді рівняння дотичної площини до S в точці $P_0\ (x_0,y_0,\ z_0)$, задається формулою

$$\boxed{F'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0)\cdot(z-z_0)=0}$$

а рівняння нормалі має такий вигляд

$$\boxed{\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0)}=\frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}=\frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0)}}$$

Приклад 17. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x^2-4y^2+2z^2=6$ в точці $P(2,1,-3)=P_0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини у вигляді $x^2-4y^2+2z^2-6=0$. Позначимо ліву частину рівняння через $F(x,y,z)$, знайдемо частинні похідні та їх значення в точці P_0:

$$F(x,y,z)=x^2-4y^2+2z^2-6;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x; \qquad \frac{\partial F(P_0)}{\partial x}=4;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-8y; \qquad \frac{\partial F(P_0)}{\partial y}=-8;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=4z; \qquad \frac{\partial F(P_0)}{\partial z}=-12.$$

За формулою (7) маємо: $4(x-2)-8(y-1)-12(z+3)=0$ або $4x-8y-12z-36=0$, або $x-2y-3z-9=0$ – рівняння дотичної площини. Рівняння нормалі одержимо за формулою (8):

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z+3}{-12} \qquad \text{або} \qquad \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{-3}.$$