ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Лекція 41. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) $\boldsymbol{n}$-го порядку

Щоб завершити тему з *лінійних диференціальних рівнянь* $\boldsymbol{n}$*-го порядк***у**, ми повинні завершити побудову розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь вищого порядку.

41.1. Структура загального розв'язку ЛНДР

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння у приведеній формі:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

де $a_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$, - змінні коефіцієнти та та $f(x) \neq 0$ - права частина рівняння. Змінні коефіцієнти та права частина є відомими функціями неперервними на інтервалі (a, b).

Для зручності перетворень, ЛНДР можемо переписати через *диференціальний поліномом* у вигляді:

$$Ly = f(x) \qquad (2)$$

де

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y, \qquad (3)$$

оператор L є алгебраїчним поліномом, в якому

$L(D)(\ldots) = D^{(n)}(\ldots) + a_1(x)D^{(n-1)}(\ldots) + \cdots + a_{n-1}(x)D(\ldots) + a_n(x)(\ldots)$, з $D = \frac{d}{dx}$ — *диференціальний оператор*.

Оператор L є лінійним, тому має такі властивості:

1. $L[y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_n(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)] + \cdots + L[y_n(x)]$
2. $L[Cy(x)] = CL[y(x)]$

Загальний розв'язок ЛНДР n–го порядку складається з суми загального розв'язку ЛОДР ($Ly = 0$) і будь-якого частинного розв'язку рівняння ЛНДР (2), що надано теоремою (*про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння*):

Теорема. Припустимо, що ЛНДР n–го порядку $Ly = f(x)$ існує на інтервалі (a, b). Нехай $y_p(x)$ будь-який *частинний розв'язок* цього неоднорідного рівняння $Ly = f(x)$ на (a, b), і нехай $y_0(x)$ є *загальний розв'язком* зведеного однорідного рівняння $Ly = 0$ на (a, b). Тоді $y(x)$ є розв'язком $Ly = f(x)$ на (a, b) тоді і тільки тоді, коли

$$y(x) = y_p + y_0 \tag{4}$$

Доведення: Нехай $y_p = y_p(x)$ – відомий частинний розв'язок рівняння (2), тобто $L(y_p) \equiv f(x)$. Введемо нову невідому функцію $y_0 = y_0(x)$ і покладемо

$$y = y_0 + y_p$$

Підставляючи цей вираз в (2) та враховуючи лінійність оператора L, одержуємо

$$L(y) = L(y_0 + y_p) = L(y_0) + L(y_p) = f(x)$$

Оскільки $L(y_p) = f(x)$, то

$$L(y_0) = 0$$

тобто y_0 – розв'язок лінійного однорідного рівняння, тобто $Ly = 0$.

Згідно з теоремою про загальний розв'язок ЛОДР

$y_0 = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$,, де y_1,y_2, ..., y_n – деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а C_1,C_2, ..., C_n – довільні сталі. Підставимо отриманий розв'язок ЛОДР в $y(x)$, тоді

$$y(x) = y_p + C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n \tag{5}$$

Покажемо, що ця форма визначає загальний розв'язок рівняння (2).

Згідно з означенням загального розв'язку диференціального рівняння n-го порядку для цього потрібно показати, що з розв'язку (5) при належному виборі сталих C_1,C_2, ..., C_n можна одержати розв'язок, який задовольняє довільні початкові умови, тобто

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Послідовно диференціюючи (5), знаходимо

$$\begin{array}{rcl} y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + & \cdots & +C_ny_n(x) + y_p \\ y' = C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) + & \cdots & +C_ny_n'(x) + y_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)}(x) + C_2y_2^{(n-1)}(x) + & \cdots & +C_ny_n^{(n-1)}(x) + y_p \end{array}$$

Якщо підставити в цю систему $x = x_0$, то матимемо неоднорідну систему n лінійних рівнянь з n невідомими $C_1, C_2, \ldots, C_n$, визначником якої є $W(x_0)$. Оскільки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальна система розв'язків, то $W(x_0) \neq 0$. Таким чином, сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$, з отриманої системи визначаються однозначно, а тому розв'язок (5) справді є загальним.

Теорему доведено.

Крім цієї теореми також для ЛНДР із сумою різних функцій у правій частині рівняння справедлива теорема (*про суперпозицію розв'язків*):

Теорема. (*Принцип суперпозиції*) Нехай права частина лінійного неоднорідного рівняння (2) є сумою довільної скінченної кількості r доданків, тобто це рівняння на (a, b) має вигляд

$$Ly = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x)$$

Припустимо, якщо функція y_{p_i} є частинним розв'язком рівняння $Ly = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, на інтервалі (a, b). Тоді

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_r}$$

є частинним розв'язком рівняння (2).

Доведення теореми випливає з того, що L є лінійним оператором, тобто

$$L\left(y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_r}\right) = L(y_{p_1}) + L(y_{p_2}) + \cdots + L(y_{p_r}) \equiv$$
$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x)$$

40.2. Метод варіації довільних сталих

Розглянемо загальний метод знаходження частинних розв'язків неоднорідного рівняння (2) $Ly = f(x)$ – метод варіації довільних сталих (*метод Лагранжа*).

Ідея полягає в тому щоб визначати розв'язок ЛНДР за загальним

розв'язком зведеного ЛОДР. Нехай маємо загальний розв'язок зведеного лінійного однорідного рівняння $Ly = 0$:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \tag{6}$$

де y_1,y_2, …, y_n є фундаментальний набор розв'язків $Ly = 0$ на інтервалі (a, b), та C_1,C_2, …, C_n - довільні сталі.

Частинний розв'язок рівняння (2) шукаємо у вигляді (6), вважаючи C_1,C_2, …, C_n не сталими, а невідомими функціями від x, тобто

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x), \tag{7}$$

для $a < x < b$

Виберемо тепер функції $C_i = C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, так, щоб функція (7) була розв'язком рівняння (2). Диференціюючи (7), одержуємо

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x) + C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x)$$

Накладемо умову, що

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0$$

Тоді

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x)$$

Диференціюючи ще один раз, одержуємо:

$$y'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \cdots + C_n(x)y_n''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x)$$

Нехай

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0$$

Тоді

$$y'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \cdots + C_n(x)y_n''(x)$$

Продовжуючи диференціювати і вибираючи функції $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, так, щоб

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0$$

одержуємо

$$y^{(n-1)} = C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

І, нарешті,

$$y^{(n)} = C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) + C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Підставимо тепер у рівняння (2) вирази для $y(x)$ та її похідних до n-го порядку включно:

$$C_1(x)\left(y_1^{(n)} + p_1y_1^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y_1' + p_ny_1\right) +$$
$$C_2(x)\left(y_2^{(n)} + p_1y_2^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y_2' + p_ny_2\right) + \cdots +$$
$$+C_n(x)\left(y_n^{(n)} + p_1y_n^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y_n' + p_ny_n\right) +$$
$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x)$$

Множники в дужках тотожно дорівнюють нулю, бо функції y_1,y_2, …, y_n є частинними розв'язками зведеного ЛОДР . Отже, останнє рівняння запишеться так:

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x)$$

Таким чином, шукані функції $C_i = C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задовольняють систему

$$\begin{gathered} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ \cdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{gathered} \tag{8}$$

Маємо неоднорідну систему n лінійних алгебричних рівнянь з n невідомими $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки визначником цієї системи є відмінний від нуля вронскіан функцій y_1,y_2, …, y_n то вона має єдиний розв'язок. Інтегруючи, знайдемо функції $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, після чого залишиться підставити їх у формулу (6) для розв'язку (2).

Отже для знаходження розв'язку ЛНДР методом Лагранжа необхідно:

1) розв'язати зведене ЛОДР і записати його загальний розв'язок;

2) записати його загальний розв'язок ЛНДР у формі загального розв'язку ЛОДР вважаючи C_1,C_2, …, C_n не сталими, а невідомими функціями від x;

3) побудувати систему рівняннь (8) відносно невідомих $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ та розв'язати її;

4) здобутий розв'язок підставити в (6).

Приклад 1. Знайти розв'язок: $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$

Розв'язання. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Маємо:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Тоді загальний розв'язок цього рівняння набуває вигляду:

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Так як

$$y_1 = e^x \text{ та } y_2 = xe^x$$

ми можемо обчислити їх похідні як

$$y_1{}'(x) = e^x \text{ та } y_2{}'(x) = e^x + xe^x$$

Тоді ми маємо систему рівнянь

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0$$

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x^2}.$$

Застосовуючи правило Крамера, ми маємо

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x^2} & e^x + xe^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{0 - xe^x(\frac{e^x}{x^2})}{e^x(e^x + xe^x) - e^x xe^x} = \frac{-\frac{e^{2x}}{x}}{e^{2x}} = -\frac{1}{x}$$

також

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{e^x\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}{e^{2x}} = \frac{1}{x^2}$$

Інтегруючи, отримуємо

$$C_1(x) = -\ln|x| + C_1,\ C_2(x) = -\frac{1}{x} + C_2$$

Остаточно

$$y(x) = (-\ln|x| + C_1)e^x + \left(-\frac{1}{x} + C_2\right)xe^x = c_1e^x + c_2xe^x - e^x\ln|x| - e^x$$

де

$$y_1(x) = -e^x\ln|x| - e^x$$

Приклад 2. Знайти розв'язок: $y''' + y' = \frac{1}{\sin x}$

Розв'язання. Рівняння має єдиний розв'язок у будь-якому інтервалі (a, b), що не містить точок, в яких $\sin x = 0$:

$$x = n\pi \quad (n = 0; \pm 1; \ldots).$$

Розв'язуємо однорідне рівняння

$$y''' + y' = 0;\ k^3 + k = 0;\ k_1 = 0;\ k_{2,3} = \pm j.$$

Система $y_1 = 1$; $y_2 = \cos x$; $y_3 = \sin x$ є фундаментальною, тому

$$\overline{y} = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

Тоді загальний розв'язок ЛНДР набуває вигляду:

$$y(x) = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$$

Знайдемо похідні:

$$y' = -C_2(x)\sin x + C_3(x)\cos x;$$
$$y'' = -C_2(x)\cos x - C_3(x)\sin x;$$
$$y''' = C_2(x)\sin x - C_3(x)\cos x - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x.$$

Тоді ми маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0; \\ \quad - C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0; \\ \quad - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \dfrac{1}{\sin x}; \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1;$$

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \dfrac{1}{\sin x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin x};$$

$$C_2'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \dfrac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\mathrm{ctg}x;$$

$$C_3'(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = -1;$$

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \bar{C}_1;$$

$$C_2(x) = -\int \mathrm{ctg}x dx = -\ln|\sin x| + \bar{C}_2;$$

$$C_3(x) = -\int dx = -x + \bar{C}_3;$$

$$y = \bar{C}_1 + \bar{C}_2\cos x + \bar{C}_3\sin x + \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| - \cos x \cdot \ln|\sin x| - x\sin x.$$

40.3 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду

У цьому розділі ми будемо досліджувати спрощений випадок неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь вищого порядку, а саме, - *лінійні неднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами*.

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами можна записати у вигляді

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x), \qquad (9)$$

a_1, a_2, …, a_n це сталі, які можуть бути дійсними або комплексними числами.

Використовуючи лінійний диференціальний оператор $L(D)$, це рівняння можна представити у вигляді

$$L(D)y(x) = f(x),$$

де $L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$, а $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі (a, b) та має спеціальний вигляд

<u>*Випадок 1.*</u> Функція *f(x)* є добутком многочлена на показникову функцію, тобто

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \qquad (10)$$

де

$$P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \cdots + p_{m-1} x + p_m$$

є многочленом з дійсними або комплексними коефіцієнтами (він може вироджуватись у сталу), α – дійсне або комплексне число.

Будуючи частинний розв'язок рівняння (9), виділятимемо два випадки.

1.1 α не є характеристичним числом, тобто $P(\alpha) \neq 0$ ($P(\alpha)$ – характеристичний многочлен зведеного ЛОДР). Тоді частинний розв'язок $y_p = y_p(x)$ шукатимемо у вигляді

$$y_p(x) = Q_m(x) e^{\alpha x} \qquad (11)$$

де

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \cdots + q_{m-1} x + q_m$$

многочлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Коефіцієнти многочлена $Q_m(x)$ визначаються за **методом невизначених коефіцієнтів**, тобто після підстановки (11) у рівняння (9) і прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенів *x* у обох частинах отриманої рівності.

1.2 α є характеристичним числом кратності k, тобто

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0\,,\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

У цьому випадку частинний розв'язок шукатимемо його у вигляді

$$y_p(x) = x^k Q_m(x) e^{\alpha x} \tag{12}$$

де

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \cdots + q_{m-1} x + q_m$$

многочлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами. Так само, коефіцієнти многочлена визначаються за **методом невизначених коефіцієнтів**.

<u>*Випадок 2.*</u> Права частина рівняння (9) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx) \tag{13}$$

де $P_m(x)$ та $R_m(x)$ – многочлени степенів не вищих від m, причому хоча б один з них має степінь m (вони можуть бути й сталими числами, один з них може бути тотожно рівним нулю). Якщо скористатись формулами Ейлера, то (13) можемо записати у вигляді

$$f(x) = P_m(x)e^{(a+ib)x} + R_m(x)e^{(a-ib)x}$$

тобто $f(x)$ є сумою двох доданків, які розглядались у **випадку 1**. Тоді виділятимемо два випадки.

2.1 $a \pm ib$ не є характеристичним числом, тобто $P(a \pm ib) \neq 0$ ($P(a \pm ib)$ – характеристичний многочлен зведеного ЛОДР). Тоді частинний розв'язок $y_p = y_p(x)$ шукатимемо у вигляді

$$y_p(x) = Q_m(x)e^{(a+ib)x} + S_m(x)e^{(a-ib)x} \tag{14$_1$}$$

або

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos bx + S_m(x)\sin bx) \tag{14$_2$}$$

де

$Q_m(x)$ та $S_m(x)$ многочлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами. Коефіцієнти многочлена $Q_m(x)$ та $S_m(x)$ визначаються за **методом невизначених коефіцієнтів**, тобто після підстановки (14) у рівняння (9) і прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенів x у обох частинах отриманої рівності.

2.2 $a \pm ib$ є характеристичним числом кратності k, тобто

$$P(a \pm ib) = P'(a \pm ib) = \cdots = P^{(k-1)}(a \pm ib) = 0\,,\, P^{(k)}(a \pm ib) \neq 0$$

У цьому випадку частинний розв'язок шукатимемо його у вигляді

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos bx + S_m(x)\sin bx) \qquad (15)$$

де $Q_m(x)$ та $S_m(x)$ многочлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами. Коефіцієнти многочлена $Q_m(x)$ та $S_m(x)$ визначаються за **методом невизначених коефіцієнтів**.

Приклад 3. *Розв'язати диференціальне рівняння:*

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}.$$

Розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y(x) = y_{\text{з.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x).$$

Проінтегруємо відповідне однорідне диференціальне рівняння:

$$y'' - 5y' + 4y = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4,$$

$$y_{\text{з.о.}}(x) = c_1e^x + c_2e^{4x}.$$

Побудуємо тепер частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

Для правої частини $f(x) = 4x^2e^{2x}$ в маємо, $n = 2$, $\alpha = 2$, $r = 0$, тобто

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x},$$

де A, B, C невизначені коефіцієнти.

Підставимо тепер функцію $y_{\text{ч.н.}}(x)$ у лінійне неоднорідне диференціальне рівняння:

$$y'_{\text{ч.н.}}(x) = (2Ax + B)e^{2x} + 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C),$$

$$y''_{\text{ч.н.}}(x) = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + B)e^{2x} + 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B),$$

$$(2A + 4Ax + 2B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C + 4Ax + 2B)e^{2x} -$$

$$-5(2Ax+B+2Ax^2+2Bx+2C)e^{2x}+4(Ax^2+Bx+C)e^{2x}=4x^2e^{2x}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x^2, x та x^0:

$$x^2: 4A-10A+4A=4 \Rightarrow A=-2,$$

$$x|4A+4B+4A-10A-10B+4B=0 \Rightarrow -2B-2A=0 \Rightarrow B=2,$$

$$x^0|2A+2B+4C+2B-5B-10C+4C=0 \Rightarrow 2A-B-2C=0 \Rightarrow C=-3.$$

Тоді

$$y_{\text{ч.н.}}(x)=(-2x^2+2x-3)e^{2x},$$

а

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{4x}-(2x^2-2x+3)e^{2x}$$

загальний розв'язок рівняння.

Приклад 4. *Розв'язати диференціальне рівняння:*

$$y''+y=x\cos x+\sin x$$

Розв'язання. $k^2+1=0$; $k_1=+j$; $k_2=-j$; $\overline{z}=C_1\sin x+C_2\cos x$;

$$\begin{array}{c|l}
1 & y^*=x\left[(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x\right]=\left(Ax^2+Bx\right)\sin x+\left(Cx^2+Dx\right)\cos x; \\
0 & \left(y^*\right)'=(2Ax+B)\sin x+(2Cx+D)\cos x+\left(Ax^2+Bx\right)\cos x-\left(Cx^2+Dx\right)\sin x; \\
1 & \left(y^*\right)''=2A\sin x+2C\cos x+(2Ax+B)\cos x-(2Cx+D)\sin x+(2Ax+B)\cos x- \\
 & -(2Cx+D)\sin x-\left(Ax^2+Bx\right)\sin x-\left(Cx^2+Dx\right)\cos x;
\end{array}$$

$$\begin{cases}
B+2C=0; & A=\frac{1}{4}; \\
2B+2C=0; & B=0; \\
4A=1; & C=0; \\
2A-2D=1; & D=-\frac{1}{4};
\end{cases}$$

$$y^*=\frac{1}{4}x^2\sin x-\frac{1}{4}x\cos x;$$

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{4}x^2\sin x-\frac{1}{4}x\cos x.$$

Приклад 5. *Розв'язати диференціальне рівняння:*

$$y''' - y'' + 9y' - 9y = 20\cos 2x + 15\sin 2x$$

Розв'язання.

$$k^3 - k^2 + 9k - 9 = 0\,;\ k_1 = 1\,;\ k_2 = 3j\,;\ k_3 = -3j\,;$$

$$z = C_1 e^x + C_2\cos 3x + C_3\sin 3x\,;$$

$$\begin{array}{r|l} -9 & y^* = A\sin 2x + B\cos 2x; \\ 9 & (y^*)' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x; \\ -1 & (y^*)'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x; \\ 1 & (y^*)''' = -8A\cos 2x + 8B\sin 2x; \end{array}$$

$$A = 1\,;\ B = -2\,;\ y^* = \sin 2x - 2\cos 2x\,;\ y = z + y^*.$$

Загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^x + C_2\cos 3x + C_3\sin 3x + \sin 2x - 2\cos 2x\,.$$

Зауваження: Навіть тоді, коли права частина (13) містить лише $\cos bx$ або $\sin bx$ частинний розвязок треба шукати у формі (14) або (15)

Приклад 6. *Розв'язати диференціальне рівняння:*

$$y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$$

Розв'язання. $k^4 + 5k^2 + 4 = 0\,;\ k_1 = j\,;\ k_2 = -j\,;\ k_3 = 2j\,;\ k_4 = -2j\,.$

$$z = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & y^* = x(A\sin x + B\cos x) = Ax\sin x + Bx\cos x; \\ 0 & (y^*)' = A\sin x + B\cos x + x(A\cos x - B\sin x); \\ 5 & (y^*)'' = A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x); \\ 0 & (y^*)''' = -2A\sin x - 2B\cos x - A\sin x - B\cos x + x(-A\cos x + B\sin x); \\ 1 & (y^*)^{IV} = -3A\cos x + 3B\sin x - A\cos x + B\sin x + x(A\sin x + B\cos x). \end{array}$$

$$6A\cos x - 6B\sin x = 3\sin x\,;$$

$$\begin{cases} 6A = 0; \quad A = 0; \\ -6B = 3;\ B = -\frac{1}{2};\ y^* = -\frac{1}{2}x\cos x. \end{cases}$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos x\,.$$

Зауваження: Якщо права частина рівняння (9) є сумою функцій, то можна використовувати принцип суперпозиції розв'язків.

Приклад 7. *Розв'язати диференціальне рівняння:*

$$y'' + 9y = x + e^x$$

1) Знаходимо y^* - загальний розв'язок однорідного рівняння (2)

$$y'' + 9y = 0 \quad (2)$$

$$k^2 + 9 = 0 \quad k^2 = -9 \quad \underline{k_{1,2} = \pm 3i} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 3.$$

$$y^* = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

2) Знаходимо частинний розв'язок диференціального рівняння (1)

$f(x) = x + e^x$

$$\tilde{y} = y_1 + y_2 = \underbrace{Ax + B}_{\alpha = 0 \neq k_{1,2}} + \underbrace{Ce^x}_{\alpha = 1 \neq k_{1,2}}$$

$$\tilde{y}' = A + Ce^x$$

$$\tilde{y}'' = Ce^x.$$

Підставляємо $\tilde{y}, \tilde{y}''$ в (1)

$$Ce^x + 9\left(Ax + B + Ce^x\right) = x + e^x$$

$$9Ax + 9B + 10Ce^x = x + e^x$$

$$\begin{array}{c|l} x & 9A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{9} \\ x^0 & \qquad\qquad B = 0 \\ e^x & 10C = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{10} \end{array}$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{9}x + \frac{1}{10}e^x.$$

3) Знаходимо загальний розв'язок

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{10}e^x.$$