Модуль 2: ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Лекція 48: Ряди Фур'є

48.1 Періодичні функції та їх властивості.

У природі й техніці часто трапляються періодичні процеси і явища. Прикладами періодичних процесів можуть бути механічні та електромагнітні коливання, періодичні рухи в теорії пружності, акустиці, радіо- та електротехніці.

Моделюють періодичні процеси за допомогою періодичних функцій. Нагадаймо, що

Означення. Функцію називають *періодичною з періодом* $T > 0$, якщо вона означена на необмеженій множині D та існує число $T > 0$ таке, що:

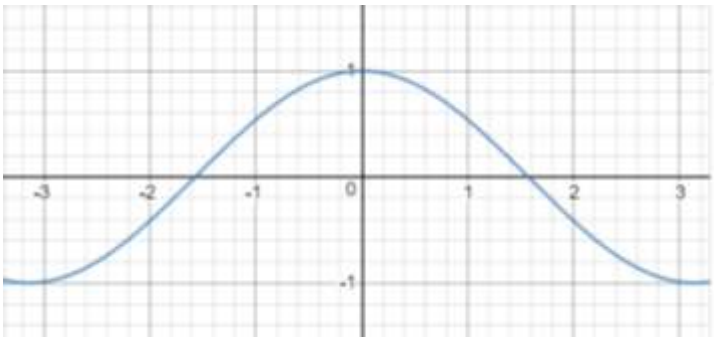
1) для кожного $x \in D(f)$ та $(x + T) \in D(f)$;
2) $f(x + T) = f(x)$.

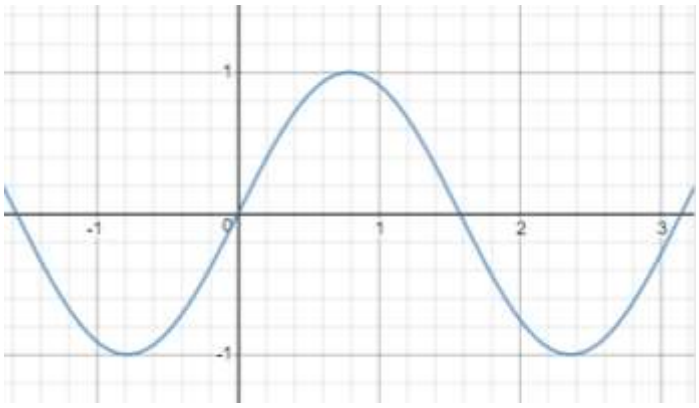
Властивості періодичних функцій:

1) сума, різниця, добуток і частка T -періодичних функцій є T -періодичною функцією;
2) якщо функція $f(x)$ має період T, то функція $y = f(ax)$, де $a>0$, має період T/a;

***Приклад* 1:**

$f(x) = cosx, T = 2\pi;$ $\qquad$ $f(x) = sin2x, T = \pi.$





3) якщо функція $f(x)$ є T -періодичною, то

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx.$$

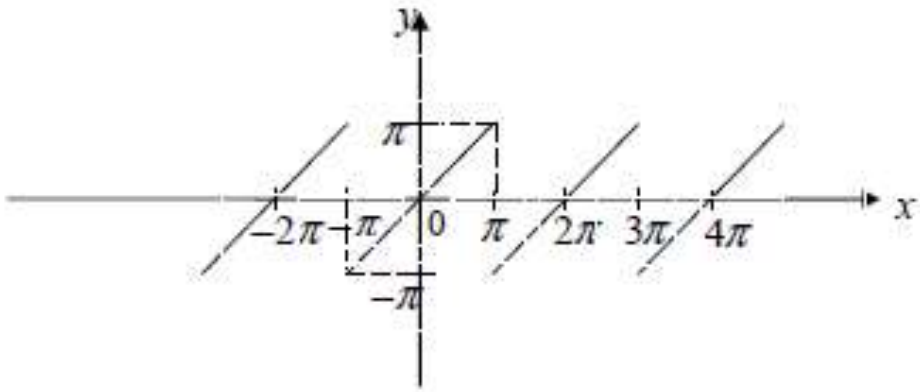
4) для побудови графіка періодичної функції, достатньо побудувати його на будь-якому відрізку довжини *T*, далі періодично продовжити на всю область визначення.

***Приклад* 2:**

Поставимо задачу: функція $f(x)$ задана на відрізку $[a, a+T]$. Треба побудувати таку функцію $F(x)$, яка на відрізку $[a, a+T]$ збігається з $f(x)$ і є періодичною з періодом T.

Розв'язання проведемо, поклавши $f(x) = x$, відрізок $[-\pi, \pi]$, $T = 2\pi$.

На відрізку $[-\pi, \pi]$ будуємо графік функції $f(x) = x$ і враховуючи період будуємо $F(x)$

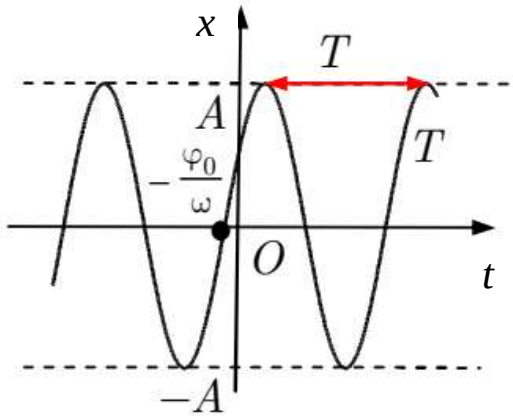


Функція $F(x)$ називається періодичним продовженням функції $f(x)$ на всю числову вісь.

Найпростішим коливанням з періодом *T* є *просте гармонічне коливання*

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0), t \geq 0,$$

де *A* — амплітуда коливання; $\omega = \frac{2T}{\pi}$ — кругова частота; φ_0 — початкова фаза.



Означення. Функцію $x(t)$ та її графік називають *простою гармонікою*.

48.2 Ортогональні системи функцій

Означення. Функції $f(x)$ та $g\ (x)$ називається *ортогональними* на відрізку $[a, b]$, якщо

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = 0$$

Аналогічно, для системи функцій: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, … , $\varphi_n(x)$, …

Означення. Скінченну чи нескінченну систему функцій:

$\varphi_n(x) \neq 0, n \in \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...,$

називають *ортогональною* на відрізку $[a; b]$, якщо для будь-яких різних номерів n та m :

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, n \neq m \\ c, n = m \end{cases},$$

де $c \neq 0$ – дійсне число.

При $c = 1$ наведена система функцій називається *ортонормованою*. Якщо система є ортогональною, то її можна пронормувати, тобто привести до ортонормованої.

Прикладом ортогональної системи функції на відрізку $[-\pi, \pi]$ є така система тригонометричних функцій з n – ціле число:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots, \cos(nx), \sin(nx)$$

Можна перевірити, що умова ортогональності виконується, а саме

вважаючи n та m цілими додатними числами отримаємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \begin{cases} \left.\dfrac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n \neq 0) \\ \left. x \right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & (n = 0), \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0 \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\big)\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n), \end{cases} \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\big)\, dx = 0, \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big)\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n). \end{cases} \tag{5}$$

Зауваження:

1) Формули (1)-(5) показують, що система функцій 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos 3x$, $\sin 3x$, …, $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ є *ортогональною системою функцій*: інтеграл від добутку будь-яких двох функцій цієї системи на інтервалі, що має довжину 2π, дорівнює нулю.
2) Формули (1)-(5) справедливі і в тому випадку, коли інтегрування ведеться по відрізку $[0; 2\pi]$ (це випливає з властивості 3 періодичних функцій).

48.3 Тригонометричний ряд. Коефіцієнти ряда Фур'є.

Означення. *Тригонометричним рядом* називається функціональний ряд вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \qquad (1)$$

де дійсні числа $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, 3, \ldots$, називаються *коефіцієнтами ряда*.

Нехай $f(x)$ –інтегрована по відрізку $[-\pi;\ \pi]$ та 2π-періодична функція.

Означення. Функції $f(x)$ поставимо у відповідність тригонометричний ряд, який називається *рядом Фур'є*:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (2)$$

Можна довести, що для ряду (2) існує мажоратний, тобто ряд (2) рівномірно збіжний, а отже його можна почленно інтегрувати. Проінтегруємо ліву та праву частини (2) на проміжку $[-\pi;\ \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx}_{=0} \right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi \Rightarrow \underline{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx} \quad (3)$$

Для визначення коефіцієнтів a_n множимо ліву та праву частини (2) на $\cos kx$ і

проінтегруємо на відрізку $[-\pi;\ \pi]$.

Отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx}_{\substack{=0,\ n\neq k \\ =\pi,\ n=k}} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\,dx}_{=0\ \forall n,k} \right)$$

Маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k \cdot \pi \Rightarrow$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ k = 1,2,\ldots$$

Замінивши індекс k на n остаточ запишимо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n = 1,2,\ldots \qquad (4)$$

Аналогічно, помноживши ліву та праву частини (2) на $\sin kx$ і проінтегрувавши на $[-\pi;\ \pi]$, отримаємо

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n = 1,2,\ldots \qquad (5)$$

Коефіцієнти a_0, a_n, b_n, які визначаються за формулами *Ейлера - Фур'є* (3), (4), (5), називаються *коефіцієнтами Фур'є*.

Ряд (2), в якому коефіцієнти визначаються за формулами (3), (4), (5), називається *рядом Фур'є*.

48.4 Теорема Діріхле.

Виникає питання, коли знак *наближено* "~" можна замінити знаком *дорівнює* "=" в виразі (2)? Відповідь на це питання дає теорема Діріхле.

Теорема Діріхле (*достатня умова розвинення функції в ряд Фур'є*). Нехай $f(x)$ – 2π-періодична функція та на відрізку [-π; π] задовольняє умови:

а) $f(x)$ – *кусково-неперервна* функція(тобто неперервна або має на відрізку [-π; π] скінченне число точок розриву першого роду);

б) $f(x)$ – кусково-монотонна на відрізку [-π; π] (тобто монотонна на всьому відрізку або відрізок [-π; π] можна розбити на скінченне число інтервалів так, що на кожному $f(x)$ – монотонна).

Тоді функції $f(x)$ на відрізку [-π; π] відповідає ряду Фур'є, коефіцієнти якого обчислюються за формулами (3)-(5), при цьому

1) в точках неперервності $f(x)$ сума ряда $S(x)$ збігається з функцією $f(x)$;
2) в кожній точці розриву $x = x_0$ функції сума ряда дорівнює середньому арифметичному правої та лівої границь:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

3) в точках $x = -\pi$ та $x = \pi$ (тобто на кінцях відрізка) сума ряда обчислюється так:

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$$

Зауваження 1. Ряд Фур'є дає розкладання функції, заданої на відрізку $[-\pi;\ \pi]$, на всю числову вісь, тобто дає *періодичне продовження функції* на всю числову вісь.

Зауваження 2. Умовам теореми Діріхле задовольняють більшість функцій, які зустрічаються в математиці та її застосуваннях, проте існують функції, які не задовольняють умовам теореми Діріхле, але мають розвинення в ряд Фур'є, тобто теорема Діріхле – це лише достатня умова, але не є необхідною.

Зауваження 3. *Ряди Фур'є для парних та непарних функцій*

Наведемо корисні співвідношення для обчислення інтегралів з симетричними межами інтегрування

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \text{ якщо } f(x) \text{ - } \textit{непарна}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, \text{ якщо } f(x) \text{ - } \textit{парна}$$

Нехай функція $f(x)$ – парна на відрізку $[-\pi;\ \pi]$. Тоді формули (3), (4), (5) приймають вигляд:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{парна}}\ \underbrace{\cos kx}_{\text{парна}}\,dx$$

(підінтегральна функція – парна)

$$b_k = 0\ k = 1,2,\ldots$$

(підінтегральна функція – непарна)

Ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Нехай функція $f(x)$ – непарна на відрізку $[-\pi;\ \pi]$. Тоді формули (3), (4), (5) приймають вигляд:

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

(підінтегральна функція – непарна)

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{непарна}}\ \underbrace{\sin kx}_{\text{непарна}}\, dx \quad k = 1,2,\ldots$$

(підінтегральна функція – парна)

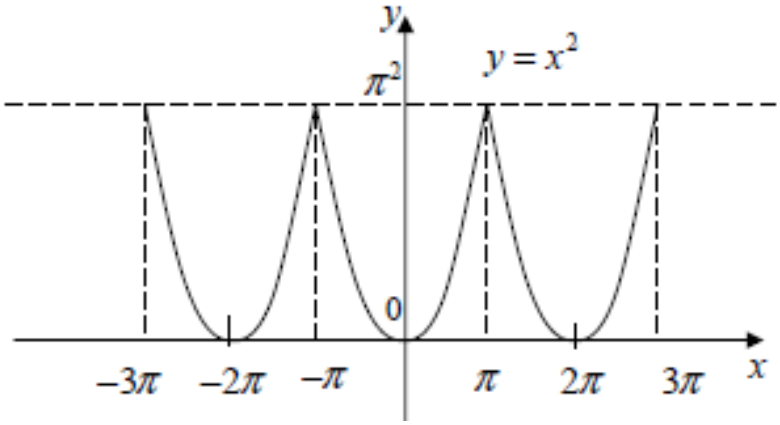
Ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Урахування непарності або парності заданої функції дозволяє істотно спростити обчислення під час визначення коефіцієнтів ряду Фур'є. Ряд Фур'є $(2')$ для парної функції ще зветься *розкладанням по косинусам*, а ряд Фур'є $(2'')$ для непарної функції - *розкладанням по синусам*.

***Приклад* 3**: розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є, якщо ця функція задана на $[-\pi;\ \pi]$ формулою $f(x) = x^2$

<u>*Розвязання*</u>: розглянемо графік функції $f(x) = x^2$, що отримує періодичне продовження на всю числову вісь.



Ця функція задовольняє умовам теореми Діріхле, тому має розвинення в ряд Фур'є. Так як

Функція $f(x)=x^2$ - парна.

Будемо користуватись формулами (2'), (3'), (4'), (5').

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\pi^{\cancel{3}\,2}}{3}=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kdx=\left|\begin{array}{l}\text{тут двічі інтегрувати частинами,}\\ \text{скористаємось таблицею інтегралів}\end{array}\right|=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2}, \text{ якщо } n-\text{парне},\\ -\dfrac{4}{n^2}, \text{ якщо } n-\text{непарне}.\end{cases}$$

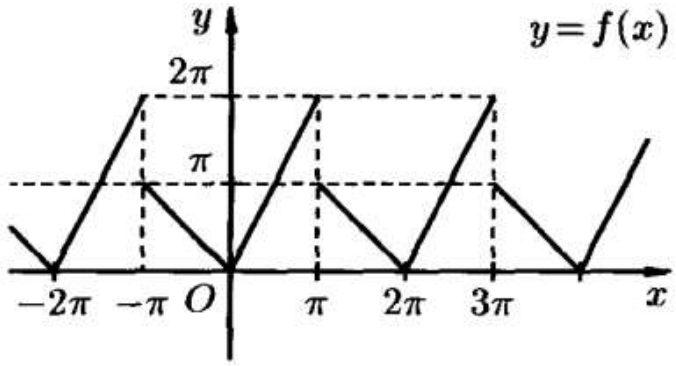
Тоді $f(x)=\dfrac{2\pi^2}{3\cdot 2}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}$.

Цей ряд представляє функцію, що наведена на рисунку.

***Приклад* 4**. Розвинути в ряд Фур'є $f(x)$ – 2π-періодичну функцію, яку задано на відрізку [-π; π] наступним чином:

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ -x & \text{при } -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

<u>*Розвязання*</u>: розглянемо графік функції $f(x)$



Ця функція задовольняє умовам теореми Діріхле, тому має розвинення в ряд Фур'є.

Знайдемо коефіцієнти ряда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\,dx=\frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\cos nx\,dx =$$

тут будемо інтегрувати частинами

$$\left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx\,dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n - 1) = -\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right).$$

Аналогічно знаходимо:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \cdots = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Отже функції f(x) відповідає ряд Фур'є

$$f(x) \sim S(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

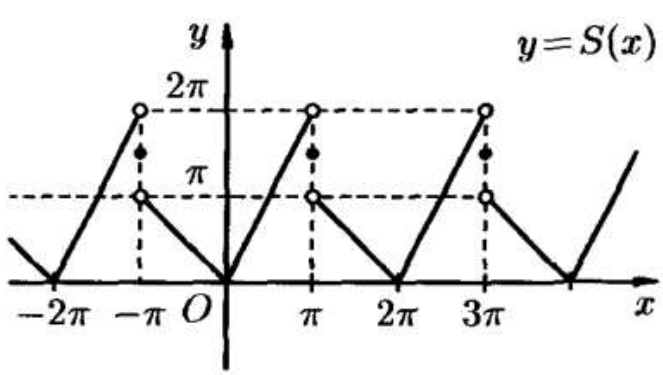
Оскільки функція $f(x)$ неперервна в усіх внутрішніх точках відрізка [-π;π], то відповідно до теореми Діріхле в усіх цих точках має місце рівність

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \dots\right).$$

В точках $x = -\pi$ та $x = \pi$ сума $S(x)$ ряда дорівнює

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

Графік $S(x)$ має вигляд:



***Нотаток*:** Розвинення заданої функції в ряд Фур`є називається *гармонічним аналізом*, оскільки таким чином досягається подання будь–якого складного періодичного явища в вигляді простих гармонічних коливань.

48.5 Ряд Фур'є для $2l$ - періодичної функції

48.5.1 Ряд Фур'є для 2π - періодичної функції на відрізку [0; 2π]

Лема. Нехай $\varphi(x) -$ 2π-періодична функція на відрізку $[-\pi; \pi]$. Тоді для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ має місце рівняння:

$$\int_{\pi-a}^{\pi+a} \varphi(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx$$

Доведення. Візьмемо довільне фіксоване $a \in \mathbb{R}$. Очевидно, що існує ціле число k і число α ∈ [0; 2π] такі, що $a = \alpha + 2k\pi$. Тому

$$\int\limits_{a-\pi}^{a+\pi} \varphi(x)\, dx = [x = t + 2k\pi] = \int\limits_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \varphi(t)\, dt = \int\limits_{\alpha-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt + \int\limits_{\pi}^{\alpha+\pi} \varphi(t)\, dt =$$

= [у другому інтегралі робимо заміну $t = z + 2\pi$] =

$$= \int\limits_{\alpha-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt + \int\limits_{-\pi}^{\alpha-\pi} \varphi(z + 2\pi)\, dz = \int\limits_{\alpha-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt + \int\limits_{-\pi}^{\alpha-\pi} \varphi(z)\, dz = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt.$$

Лема доведена.

Лемма дозволяє коефіцієнти Фур'є (3)-(5) для 2π-періодичної функції $f(x)$, що задовольняє умовам теореми Діріхле на відрізку [−π; π], обчислювати за формулами:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{a-\pi}^{a+\pi} f(x) \cos nx\, dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{a-\pi}^{a+\pi} f(x) \sin nx\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots,\ a \in \mathbb{R},$$

або у окремому випадку 2π-періодичної функції на відрізку $[0;\ 2\pi]$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

48.5.2 Ряд Фур'є для $2l$ - періодичної функції на довільному відрізку $[-l, l]$

Нехай функція $f\,(x)$ задана на довільному відрізку $[-l, l]$ і періодична з періодом $T = 2l$. Виконаємо заміну змінної, вважаючи що $x\ = \frac{l}{\pi}\ t$. Тоді при $x\ = 0,\ t = 0$, а $x\ = 2l,\ t = 2\pi$. Отже функція $f\,(\frac{l}{\pi}\ t)$ періодична з періодом 2π і задовольняє умовам теореми Діріхле на відрізку $[-\pi, \pi]$. Якщо функція задовольняє умовам теореми Діріхле на цьому відрізку, то може бути розвинена у ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{l}{\pi}\ t + b_n \sin n\frac{l}{\pi}\ t\right)$$

де за формулами (3)-(5)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi}\ t)\,dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi}\ t)\cos(n\frac{l}{\pi}\ t)\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi}\ t)\sin(n\frac{l}{\pi}\ t)\,dt$$

З оберненої заміни дістанимо коефіцієнти ряду Фур'є $2l$ - періодичної функції функції на довільному відрізку $[-l, l]$, які обчислюються за формулами:

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (6)$$

А сам ряд Фур'є $2l$ - періодичної функції на відрізку $[-l, l]$ має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (7)$$

Для *парних функцій* формули (6) мають вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

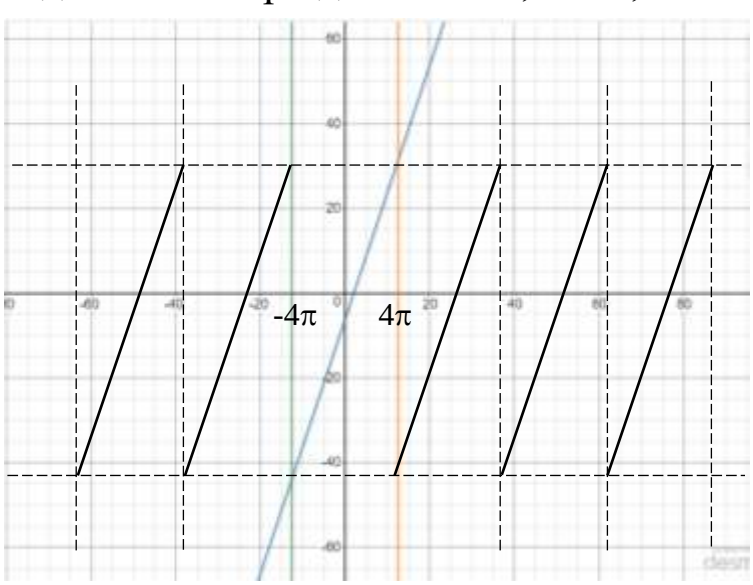
а для *непарних* - формули (6) мають вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Приклад 5. $y = 3x - 2\pi$, $x \in (-4\pi; 4\pi)$; $y(x + 8\pi) = y(x)$

Функція є періодичною з періодом $2l = 8\pi$, отже, $l = 4\pi$.



$y(-x) = 3\cdot(-x) - 2\pi = -3x - 2\pi \neq \pm y(x)$ – функція загального вигляду,

отже, $y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\cancel{\pi}x}{4\cancel{\pi}}+b_n\sin\frac{nx}{4}.$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}y(x)dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}(3x-2\pi)dx=\frac{1}{4\pi}\left(3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-4\pi}^{4\pi}-2\pi\cdot x\Big|_{-4\pi}^{4\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\left(16\pi^2-16\pi^2\right)-2\pi\cdot(4\pi+4\pi)\right)=\frac{1}{4\pi}(-2\pi)\cdot 8\pi=-4\pi\ ;$$

$$a_n=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}y(x)\cos\frac{nx}{4}dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}(3x-2\pi)\cos\frac{nx}{4}dx==\left\{\begin{matrix}u=3x-2\pi & du=3\cdot dx\\ dv=\cos\frac{nx}{4}dx & v=\frac{4}{n}\sin\frac{nx}{4}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left((3x-2\pi)\cdot\frac{4}{n}\sin\frac{nx}{4}\Big|_{-4\pi}^{4\pi}-\frac{4}{n}\cdot 3\int_{-4\pi}^{4\pi}\sin\frac{nx}{4}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{n}\cdot(3x-2\pi)\sin\frac{nx}{4}\Big|_{-4\pi}^{4\pi}-\frac{12}{n}\cdot\left(-\frac{4}{n}\right)\cdot\cos\frac{nx}{4}\Big|_{-4\pi}^{4\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{n}\cdot\left(10\pi\underbrace{\sin\frac{n\cdot 4\pi}{4}}_{0}-(-14\pi)\underbrace{\sin\frac{n\cdot(-4\pi)}{4}}_{0}\right)++\frac{48}{n^2}\cdot\underbrace{\left(\cos\frac{n\cdot 4\pi}{4}-\cos\frac{n\cdot(-4\pi)}{4}\right)}_{0}\right)=0$$

$$b_n=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}y(x)\sin\frac{nx}{4}dx=\frac{1}{4\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi}(3x-2\pi)\sin\frac{nx}{4}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=3x-2\pi & du=3\cdot dx\\ dv=\sin\frac{nx}{4}dx & v=-\frac{4}{n}\cos\frac{nx}{4}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left((3x-2\pi)\cdot\left(-\frac{4}{n}\right)\cos\frac{nx}{4}\Big|_{-4\pi}^{4\pi}-\left(-\frac{4}{n}\right)\cdot 3\int_{-4\pi}^{4\pi}\cos\frac{nx}{4}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{4}{n}\cdot(3x-2\pi)\cos\frac{nx}{4}\Big|_{-4\pi}^{4\pi}+\frac{12}{n}\cdot\frac{4}{n}\cdot\sin\frac{nx}{4}\Big|_{-4\pi}^{4\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{4}{n}\cdot\left(10\pi\cdot\cos\frac{n\cdot 4\pi}{4}-(-14\pi)\cos\frac{n\cdot(-4\pi)}{4}\right)++\frac{48}{n^2}\cdot\left(\underbrace{\sin\frac{n\cdot 4\pi}{4}}_{0}-\underbrace{\sin\frac{n\cdot(-4\pi)}{4}}_{0}\right)\right)=$$

$$=-\frac{4}{4\pi n}\cdot\left(10\pi\cdot\cos n\pi+14\pi\cdot\underbrace{\cos(-n\pi)}_{\cos n\pi}\right)=-\frac{1}{\pi n}\cdot 24\pi\cos n\pi=\frac{24}{n}\cdot(-1)^{n+1}.$$

Остаточно $y(x)=\frac{-4\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{nx}{4}$.

48.5.3 Ряди Фур'є для функцій, заданих на проміжку $[0;l]$

Якщо функцію $y=f(x)$ задано на проміжку $[0;l]$, то для побудування її розвинення в ряд Фур'є, вона спочатку повинна бути доповнена на проміжку $[-l;0)$, тоді можна побудувати розвинення отриманої функції в ряд Фур'є аналогічне функціям, заданих на проміжку $[-l,l]$.

У випадку, коли функцію продовжено на проміжку $[-l;0)$ *парним чином*, отримують розвинення заданої на $[0;l]$ функції **за косинусами** :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\quad x\in[0;l]\ , \tag{8}$$

де

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ . \tag{9}$$

Якщо продовження є *непарним*, отримують розвинення заданої функції **за синусами**:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\ ,\quad x\in[0;l]\ , \tag{10}$$

де

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ . \tag{11}$$

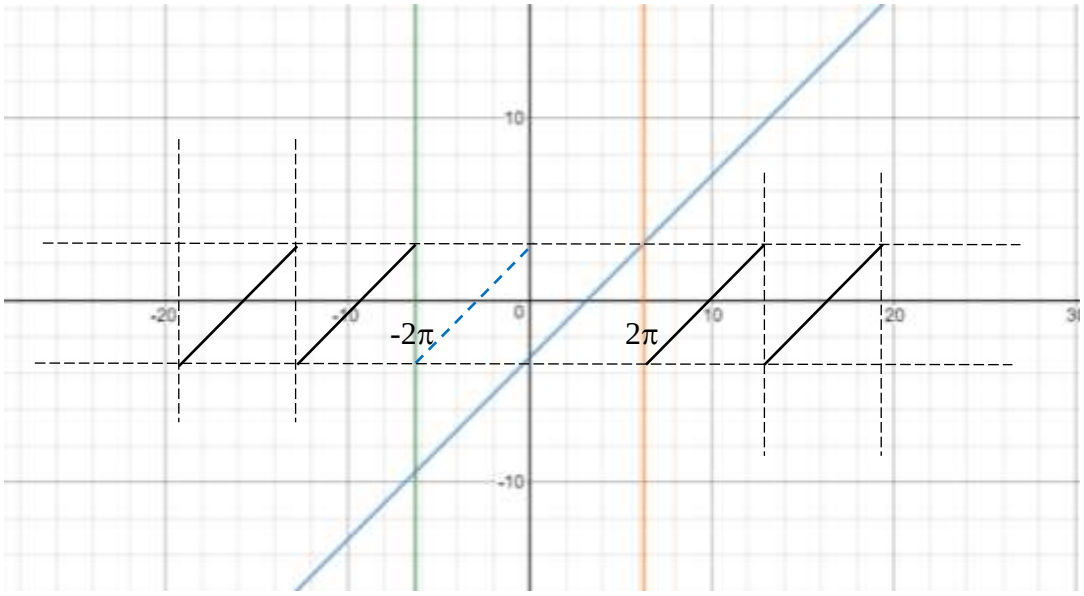
Аналогічно будується розвинення в ряд Фур'є функцій, заданих на проміжку $[-l;0]$. У цьому випадку вимагається спочатку її визначення парним чи непарнум продовженням на проміжку $(0;l]$.

***Приклад* 6.** Побудувати розвинення в ряд Фур'є функції $y=x-\pi$, $x\in[0;2\pi]$

а) за синусами;

б) за косинусами.

(а) Функцію задано на проміжку $[0;2\pi]$. Функція з періодом $T = 4\pi$ була довизначена на проміжку $[-2\pi; 0)$ *непарним чином*, як зображено.



Отже у її розвиненні в ряд Фур'є (за синусами) $l = 2\pi$, а сам ряд має вигляд:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{nx}{2}.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(x)\sin\frac{nx}{2}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin\frac{nx}{2}dx = = \left\{\begin{matrix} u = x-\pi & du = dx \\ dv = \sin\frac{nx}{2}dx & v = -\frac{2}{n}\cos\frac{nx}{2}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((x-\pi)\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi} - \left(-\frac{2}{n}\right)\int_0^{2\pi}\cos\frac{nx}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\cdot(x-\pi)\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

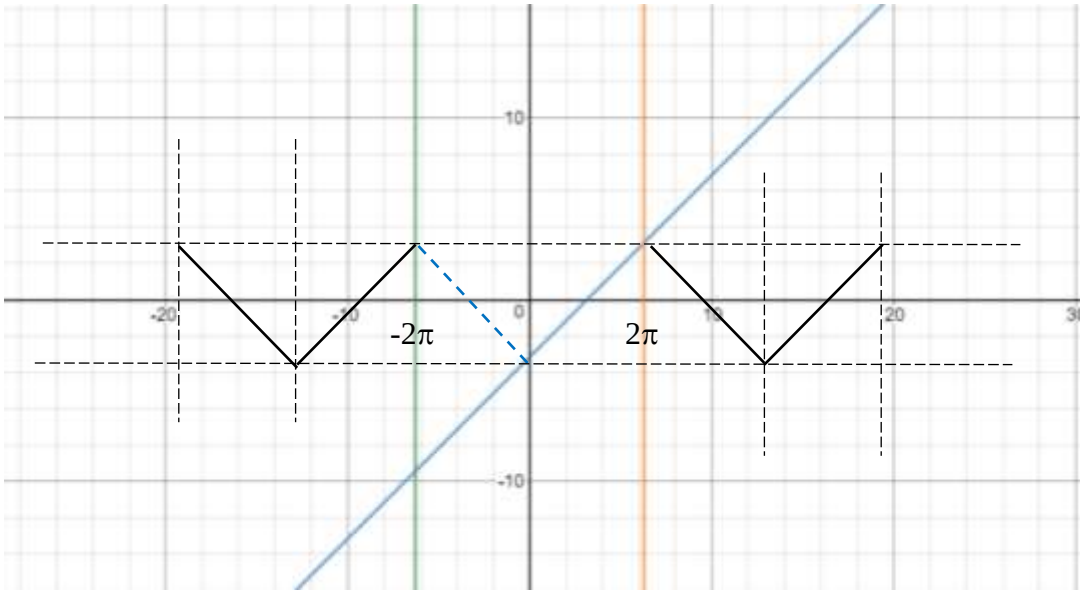
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\cdot\left(\pi\cdot\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2} - (-\pi)\underbrace{\cos 0}_{1}\right) + \frac{4}{n^2}\cdot\left(\underbrace{\sin\frac{n\cdot 2\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cdot(\pi\cdot\cos n\pi + \pi) = -\frac{2}{n}\cdot\left((-1)^n + 1\right) = \frac{2}{n}\cdot\left((-1)^{n+1} - 1\right).$$

Остаточно

$$x - \pi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\left((-1)^{n+1} - 1\right)}{n}\sin\frac{nx}{2},\ x \in [0;2\pi].$$

б) Довизначення функції на проміжку [-2π;0) *парним чином*, приводить до її розвинення функції в ряд Фур'є за косинусами, яке має вигляд:



$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\frac{nx}{2}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi}-\pi\cdot x\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(4\pi^2-4\pi^2\right)-\pi\cdot(2\pi-0)\right)=\frac{1}{\pi}(-\pi)\cdot 2\pi=-2\pi\ ;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos\frac{nx}{2}dx=\left\{\begin{matrix} u=x-\pi & du=dx \\ dv=\cos\frac{nx}{2}dx & v=\frac{2}{n}\sin\frac{nx}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((x-\pi)\cdot\frac{2}{n}\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\int_{-4\pi}^{4\pi}\sin\frac{nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}\cdot(x-\pi)\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}\cdot\left(\pi\underbrace{\sin\frac{n\cdot 2\pi}{2}}_{0}-(-\pi)\underbrace{\sin 0}_{0}\right)+\frac{4}{n^2}\left(\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{4}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Таким чином,

$$y=-\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}\cdot\cos\frac{nx}{2},\ x\in[0;2\pi].$$

Контрольні питання до теми

Сформулюйте властивості періодичних функцій?

Дайте означення простої гармоніки?

Дайте означення ортогональної системи функцій на відрізку? Неведіть приклад.

Дайте означення тригонометричного ряду?

Виведіть формули для коефіцієнтів ряду Фур'є?

Сформулюйте теорему Діріхле?

Виведіть формули для коефіцієнтів ряду Фур'є для парних і непарних функцій?

Необхідна та достатня умови розкладу функції в ряд Тейлора.

Виведіть формули для коефіцієнтів ряду Фур'є для $2l$ - періодичної функції

Наведіть формули для коефіцієнтів ряду Фур'є для $2l$ парних і непарних функцій ?

Наведіть формули для коефіцієнтів ряду Фур'є для функцій заданих на проміжку $[0;l]$ або $[-l;0]$?

ПОСИЛАННЯ ДО ЛЕКЦІЇ:

https://www.youtube.com/watch?v=WBdTE2ODgDM

https://www.youtube.com/watch?v=g_OkoLAadj4&list=PLfABByLvmIIU3rroMxA7Z5bfGIhjsgT5O

https://www.youtube.com/watch?v=NvVCyPcAVPA