Заняття 20: О П Е Р АЦ ІЙ Н Е ЧИ С Л ЕН Н Я

20.1 П е р е т в о р е н н я Л а п л а с а

Розглянемо функцію $f(t)$, визначену для всіх значень дійсної змінної t $(-\infty < t < +\infty)$. Накладемо на цю функцію наступні умови:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$ (1.1)

2. $f(t)$ має не більше, ніж скінченну кількість точок розриву при $t \geq 0$; (1.2)

3. існують такі числа $M > 0$ і $S_0 \geq 0$, що для всіх $t \geq 0$ виповнюється умова $|f(t)| < Me^{S_0 t}$. (1.3)

Число S_0 в умові (1.3) називається показником росту функції $f(t)$. Це означає, що функція $f(t)$ за абсолютною величиною не може зростати швидше за деяку наперед задану показникову функцію.

Означення 1.1. Функція, яка задовольняє умови (1.1) − (1.3) називається оригіналом.

Означення 2.1. Перетворенням Лапласа функції $f(t)$ дійсного аргумента t називається перетворення, що ставить даній функції у відповідність функцію $F(p)$ комплексного аргумента p, яка визначається за допомогою інтеграла

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \qquad (1.4)$$

Теорема 1.1. Інтеграл Лапласа (1.4) збігається в області $\operatorname{Re} p > S_0$, де S_0 – показник росту функції $f(t)$.

Означення 1.3. Функцію $F(p)$, яку отримано з функції $f(t)$ за допомогою перетворення Лапласа (1.4), називають зображенням функції $f(t)$.

Символічно дана операція записується наступним чином:

$$f(t) \leftarrow\!\!\!\div F(p). \qquad (1.5)$$

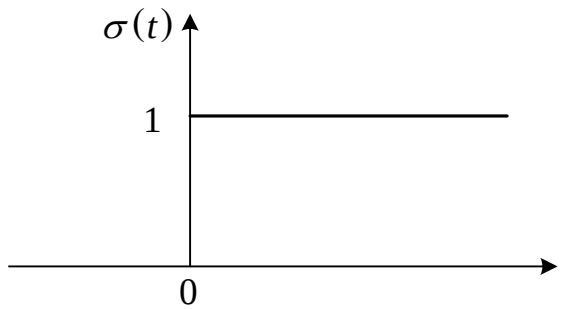
Отже, функція $F(p)$ визначена у напівплощині $\operatorname{Re} p = S > S_0$ і є в цій напівплощині аналітичною функцією. Крім того, є справедливою теорема про єдиність зображення.

Теорема 1.2. Будь-якому оригіналу відповідає єдине зображення.

Приклад 1. Найпростішою функцією-оригіналом є так звана одинична функція Хевісайда::

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

де $M = 1, s_0 = 0$;



Знайдемо зображення цієї функції:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot 1 dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-pt} \cdot 1 dt = -\frac{1}{p} \lim_{A \to +\infty} e^{-pt} \Big|_0^A =$$

$$= -\frac{1}{p} \lim_{A \to +\infty} e^{-pA} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \quad (\text{при } \operatorname{Re} p > 0).$$

Таким чином:

$$\sigma(t) \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{p}.$$

Приклад 2. Знайдемо зображення функції $f(t) = e^t$. Тут $M = 1$, $s_0 = 1$. Використовуючи означення (1.4), маємо

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot e^t dt = \int_0^{+\infty} e^{(1-p)t} dt = \frac{1}{1-p} \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{(1-p)t} d(1-p)t =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{A \to +\infty} e^{(1-p)t} \Big|_0^A = \frac{1}{1-p} \lim_{A \to +\infty} e^{(1-p)A} - \frac{1}{1-p} = \left\| \text{при } \operatorname{Re} p > 1 \right\| = \frac{1}{1-p}.$$

Таким чином, при $\operatorname{Re} p > 1$

$$e^t \leftarrow\!\!\!

наступної функції: $f(t) = 7\sin 7t \cdot \cos 3t + 3$

Розв'язання.

Перетворимо добуток тригонометричних функцій у суму:

$$\sin 7t \cdot \cos 3t = \frac{1}{2}\left(\sin(7t+3t) + \sin(7t-3t)\right) = \frac{1}{2}\sin 10t + \frac{1}{2}\sin 4t .$$

Тоді початковий оригінал приймає вигляд:

$$f(t) = \frac{7}{2}\sin 10t + \frac{7}{2}\sin 4t + 3 .$$

З формул (2.2), (3.4) і властивості лінійності отримаємо:

$$7\sin 7t \cdot \cos 3t + 3 \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{7}{2}\cdot\frac{10}{10^2+p^2} + \frac{7}{2}\cdot\frac{4}{4^2+p^2} + 3\cdot\frac{1}{p} =$$

$$= \frac{35}{p^2+100} + \frac{14}{p^2+16} + \frac{3}{p} =$$

$$= \frac{35\left(p^3+16p\right) + 14\left(p^3+100p\right) + 3\left(p^2+100\right)\left(p^2+16\right)}{p\left(p^2+16\right)\left(p^2+100\right)} =$$

$$= \frac{3p^4 + 49p^3 + 348p^2 + 1960p + 4800}{p\left(p^2+16\right)\left(p^2+100\right)} .$$

Приклад 5. Використовуючи теорему подібності, знайти зображення наступної функції: $f(t) = 2 + 4\cos(2t+3)$

Розв'язання.

Перетворимо початкову функцію:

$$2 + 4\cos(2t+3) = 2 + 4\left(\cos 2t \cdot \cos 3 - \sin 2t \cdot \sin 3\right) =$$

$$= 2 + 4\cos 3 \cdot \cos 2t - 4\sin 3 \cdot \sin 2t .$$

За формулами (3.4) і (3.5) маємо:

$$\cos 2t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{p}{p^2+4} ; \ \sin 2t \xleftarrow{\cdot}{\cdot} \frac{2}{p^2+4} .$$

Формула (3.1) дає зображення для початкового оригінала:

$$2+4\cos(2t+3) \xleftarrow{\div} \frac{2}{p}+4\cos 3\cdot\frac{p}{p^2+4}-4\sin 3\cdot\frac{2}{p^2+4}=$$

$$=\frac{2}{p}+\frac{4(p\cdot\cos 3-2\cdot\sin 3)}{p^2+4}=\frac{2p^2+8+4p(p\cdot\cos 3-2\cdot\sin 3)}{p^2+4}.$$

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	**10**	$\operatorname{sh}\alpha t=\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	**11**	$\operatorname{ch}\alpha t=\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
3	t^n, $n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	**12**	$e^{\alpha t}\cdot\sin wt$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
4	t^α, $\alpha>0$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	**13**	$e^{\alpha t}\cos wt$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
5	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	**14**	$\frac{1}{t}\left(e^{\beta t}-e^{\alpha t}\right)$	$\ln\frac{p-\alpha}{p-\beta}$
6	$t^n e^{\alpha t}$, $n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	**15**	$\frac{2}{t}(1-\cos wt)$	$\ln\left(1+\frac{w^2}{p^2}\right)$
7	$t^k e^{\alpha t}$, $k>0$	$\frac{\Gamma(k+1)}{(p-\alpha)^{k+1}}$	**16**	$\frac{2}{t}(1-\operatorname{ch}\alpha t)$	$\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{p^2}\right)$
8	$\sin wt$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	**17**	$\frac{1}{t}\sin wt$	$\operatorname{arctg}\frac{w}{p}$

9	$\cos wt$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	**18**	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$

3°. Теорема 3.3 (теорема про диференціювання оригінала). Нехай функції $f(t)$; $f^{(1)}(t)$; $f^{(2)}(t)$; …; $f^{(n)}(t)$ є функціями-оригіналами і $f(t) \leftarrow\!\!\!

Формула (3.4) дає зображення функції $\sin 3t$:

$$\sin 3t \xleftarrow{\cdot} \frac{3}{p^2+9}. \qquad (3.15)$$

Враховуючи властивість лінійності і припускання (3.13), знайдемо зображення для оригінала $(t\cdot\cos 3t)''$:

$$(t\cdot\cos 3t)'' = -6\cdot\sin 3t - 9t\cdot\cos 3t \xleftarrow{\cdot} -6\cdot\frac{3}{p^2+9} - 9\cdot F(p) =$$

$$= -\frac{18}{p^2+9} - 9\cdot F(p). \qquad (3.16)$$

Використовуючи теорему 1.2 про єдиність зображення, прирівняємо зображення (3.14) і (3.16):

$$p^2\cdot F(p) - 1 = -\frac{18}{p^2+9} - 9\cdot F(p). \qquad (3.17)$$

З рівності виразимо $F(p)$:

$$p^2\cdot F(p) + 9\cdot F(p) = 1 - \frac{18}{p^2+9},$$

$$F(p)\left(p^2+9\right) = \frac{p^2+9-18}{p^2+9}.$$

Шукане зображення для $f(t) = t\cdot\cos 3t$:

$$F(p) = \frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}.$$

4°. Теорема 3.4 (теорема про диференціювання зображення). Нехай функція-оригінал $f(t)$ має своїм зображенням $F(p)$ $\left(f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p)\right)$. Тоді

$$-t\cdot f(t) \xleftarrow{\cdot} F'(p). \qquad (3.18)$$

Приклад 6. Знайти зображення наступної функції, використовуючи властивість диференціювання зображення: $f(t) = t^3 e^{4t}$

Розв'язання.

За формулою (3.3) обчислимо зображення для функції e^{4t}:

$$e^{4t} \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{p-4} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p-4}.$$

Оскільки e^{4t} множиться на t^3, то застосуємо формулу (3.20):

$$t^3 \cdot e^{4t} \xleftarrow{\cdot} (-1)^3 \cdot \left(\frac{1}{p-4}\right)^{(3)}.$$

Обчислимо $\left(\frac{1}{p-4}\right)^{(3)}$:

$$\left(\frac{1}{p-4}\right)^{(1)} = (-1)\cdot(p-4)^{-2},$$

$$\left(\frac{1}{p-4}\right)^{(2)} = (-1)\cdot(-2)\cdot(p-4)^{-3} = 2\cdot(p-4)^{-3},$$

$$\left(\frac{1}{p-4}\right)^{(3)} = 2(-3)\cdot(p-4)^{-4} = -\frac{6}{(p-4)^4}.$$

Остаточно маємо:

$$t^3 \cdot e^{4t} \xleftarrow{\cdot} (-1)^3 \cdot \frac{-6}{(p-4)^4} = \frac{6}{(p-4)^4}.$$

5°. Теорема 3.5 (теорема про інтегрування зображення). Нехай функція-оригінал $f(t)$ має зображення $F(p)$ $\left(f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p)\right)$, тоді, якщо невласний інтеграл $\int\limits_p^{+\infty} F(p)\,dp$ збігається, то він служить зображенням функції $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \leftarrow\!\!\!\div \int_p^{+\infty} F(p)\,dp\,. \qquad (3.21)$$

Приклад 7. Використовуючи теорему про інтегрування зображення, знайти зображення наступної функції: $f(t) = \frac{\sin 4t \sin 10t}{t}$

Розв'язання.

Розглянемо функцію $g(t) = \sin 4t \cdot \sin 10t$:

$$\sin 4t \cdot \sin 10t = \frac{1}{2}\left[\cos(4t - 10t) - \cos(4t + 10t)\right] = \frac{1}{2}\cos 6t - \frac{1}{2}\cos 14t\,.$$

З властивості лінійності і формули (3.5) маємо:

$$\sin 4t \cdot \sin 10t \leftarrow\!\!\!\div \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+196}\,. \qquad (3.22)$$

Оскільки $f(t) = \frac{g(t)}{t}$, то за теоремою 3.5:

$$f(t) \leftarrow\!\!\!\div \int_p^{+\infty} G(p)\,dp\,, \text{ де } g(t) \leftarrow\!\!\!\div G(p)\,.$$

З формули (3.22):

$$G(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+196}\,.$$

Обчислимо невласний інтеграл:

$$\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+196}\right)dp = \lim_{A\to+\infty}\int_p^{A}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+196}\right)dp =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} d\left(p^2+36\right) = 2pdp \Rightarrow pdp = \frac{1}{2}d\left(p^2+36\right) \\ d\left(p^2+196\right) = 2pdp \Rightarrow pdp = \frac{1}{2}d\left(p^2+196\right) \end{array} \right\| =$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty}\left(\int_p^A\frac{d\left(p^2+36\right)}{p^2+36}dp-\int_p^A\frac{d\left(p^2+196\right)}{p^2+196}dp\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty}\left(\ln\left|p^2+36\right|\Big|_p^A-\ln\left|p^2+196\right|\Big|_p^A\right)=\frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{p^2+36}{p^2+196}\right|\Bigg|_p^A=$$

$$=\left\|\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{A^2+36}{A^2+196}\right|=\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{A^2}{A^2}=\ln 1=0\right\|=-\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+36}{p^2+196}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+196}{p^2+36}.$$

Отже:

$$\frac{\sin 4t\cdot\sin 10t}{t}\xleftarrow{\cdot}\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+196}{p^2+36}.$$

Приклад 8. Використовуючи теорему про інтегрування зображення, знайти зображення наступної функції: $f(t)=\frac{1-e^{-7t}}{t}$

Розв'язання.

У даному випадку $f(t)=\frac{g(t)}{t}$, де $g(t)=1-e^{-7t}$.

З властивості лінійності та формули (3.3) маємо:

$$1-e^{-7t}\xleftarrow{\cdot}\frac{1}{p}-\frac{1}{p+7}.$$

Отже, зображення $G(p)$ функції $g(t)$ має вигляд:

$$G(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+7}.$$

За теоремою про інтегрування зображення (3.21):

$$f(t)=\frac{g(t)}{t}\xleftarrow{\cdot}\int_p^{+\infty}G(p)dp.$$

Обчислимо невласний інтеграл $\int_p^{+\infty}G(p)dp$:

$$\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+7}\right)dp=\lim_{A\to+\infty}\int_p^{A}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+7}\right)dp=\lim_{A\to+\infty}\left(\int_p^{A}\frac{dp}{p}-\int_p^{A}\frac{dp}{p+7}\right)=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln|p|\Big|_p^A-\ln|p+7|\Big|_p^A\right)=\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{p}{p+7}\right|\Bigg|_p^A=\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{A}{A+7}\right|-$$

$$-\ln\left|\frac{p}{p+7}\right|=\left\|\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{A}{A+7}\right|=\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{A}{A}\right|=\ln 1=0\right\|=-\ln\left|\frac{p}{p+7}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{p+7}{p}\right|.$$

Остаточно маємо:

$$1-e^{-7t}\leftarrow\!\!\!

$$\int_0^t \cos^2 5\tau d\tau \leftarrow\!\!\!\div \frac{\frac{p^2+50}{p\left(p^2+100\right)}}{p} = \frac{p^2+50}{p^2\left(p^2+100\right)}.$$

7°. Теорема 3.7 (теорема зсунення). Якщо функція-оригінал $f(t)$ має зображення $F(p)$ $\left(f(t) \leftarrow\!\!\!\div F(p)\right)$, то для будь-якого комплексного p_0:

$$e^{p_0 t} \cdot f(t) \leftarrow\!\!\!\div F(p-p_0). \qquad (3.24)$$

Приклад 10. Знайти зображення наступної функції: $f(t) = t\, e^t \cos t$

Розв'язання.

Знайдемо зображення функції $t \cdot \cos t$. За формулою (2.5):

$$\cos t \leftarrow\!\!\!\div \frac{p}{p^2+1}.$$

За теоремою про диференціювання зображення (3.20):

$$t \cdot \cos t \leftarrow\!\!\!\div (-1)^1 \cdot \left(\frac{p}{p^2+1}\right)^{(1)} = -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)^{(1)},$$

$$\left(\frac{p}{p^2+1}\right)^{(1)} = \frac{1\cdot\left(p^2+1\right)-2p\cdot p}{\left(p^2+1\right)^2} = \frac{p^2+1-2p^2}{\left(p^2+1\right)^2} = \frac{1-p^2}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

Отже:

$$t \cdot \cos t \leftarrow\!\!\!\div \frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}. \qquad (3.25)$$

Застосуємо теорему зсунення (3.24), де $p_0 = 1$, і з виразу (3.25) остаточно отримаємо:

$$t \cdot e^t \cdot \cos t \leftarrow\!\!\!\div \frac{(p-1)^2-1}{\left((p-1)^2+1\right)^2} = \frac{p^2-2p}{\left(p^2-2p+2\right)^2}.$$

8°. Теорема 3.8 (теорема запізнення). Нехай функція-оригінал $f(t)$ має зображення $F(p)$ $\left(f(t) \leftarrow\!\!\!

20.2 З н а х о д ж е н н я о р и г і н а л а з а д а н и м з о б р а ж е н н я м

Перша теорема. Нехай зображення Лапласа $F(p)$ – аналітична функція у напівплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, $f(t) \leftarrow F(p)$ та її ряд Лорана має вигляд: $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}$. Тоді $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \cdot t^n}{n!}$.

***Приклад* 11**. Знайти оригінал $f(t)$, якщо $F(p) = \sin\frac{1}{p}$.

Розв'язок. Розложимо $F(p) = \sin\frac{1}{p}$ в ряд Лорана в околу нескінченно віддаленої точки:

$$F(p) = \sin\frac{1}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\, p^{2n+1}}.$$

Тоді з першої теореми розкладання маємо: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)! \cdot (2n)!}$.

Друга теорема. Нехай зображення Лапласа $F(p)$- аналітична функція в напівплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, крім скінченого числа особливих точок $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Тогда для оригінала $f(t)$ справедлива формула:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}\{F(p_k) \cdot e^{(p_k t)}\}.$$

Приклад 12. Знайти оригінал для функції $F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)}$.

Розв'язання.

Скористаємося другою теоремою розкладання та врахуємо, що $p_1 = 1,\ p_2 = 2$ − прості полюси. Обчислимо лишки в цих точках:

$$res\left\{\frac{p\cdot e^{1\cdot t}}{(p-1)(p-2)}\right\}=\lim_{p\to 1}\frac{p(p-1)e^{1\cdot t}}{(p-1)(p-2)}=-e^{t}.$$

$$res\left\{\frac{p\cdot e^{2\cdot t}}{(p-1)(p-2)}\right\}=\lim_{p\to 2}\frac{p(p-2)e^{2\cdot t}}{(p-1)(p-2)}=2e^{2t}.$$

Отже, $f(t)=-e^{t}+2e^{2t}$.

Зауважимо, що цей результат можна отримати за допомогою розкладання правильного раціонального дробу, розглянутий вище. Справді,

$$F(p)=\frac{p}{(p-1)(p-2)}=\frac{-1}{p-1}+\frac{2}{p-2}\xrightarrow{\square}-e^{t}+2e^{2t}.$$