Заняття 21: О П Е Р АЦ ІЙ Н Е ЧИ С Л ЕН Н Я

20.1 Розв'язання диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Приклад 1. Операційним методом розв’язати задачу Коші:

$$\begin{cases} y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

Розв’язання.

Знайдемо допоміжне рівняння для рівняння (5.8), враховуючи початкові умови (5.9):

$$y(t) \leftarrow\!\!\!\div Y(p),$$

$$y'(t) \leftarrow\!\!\!\div pY(p) - y(0) = pY(p) + 1,$$

$$y''(t) \leftarrow\!\!\!\div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) + p + 2;$$

$$\sin t \leftarrow\!\!\!\div \frac{1}{p^2+1}; \ \cos 2t \leftarrow\!\!\!\div \frac{p}{p^2+4}.$$

Тоді рівняння в зображеннях має вигляд:

$$p^2Y(p) + p + 2 - Y(p) = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4}.$$

Виразимо $Y(p)$ з рівняння (5.10):

$$Y(p)\left(p^2 - 1\right) = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4} - p - 2.$$

Перетворимо праву частину виразу (5.11):

$$\frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4} - p - 2 =$$

$$=\frac{4\left(p^2+4\right)+5p\left(p^2+1\right)-(p+2)\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}=$$

$$=\frac{4p^2+16+5p^3+5p-(p+2)\left(p^4+5p^2+4\right)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}=$$

$$=\frac{5p^3+4p^2+5p+16-p^5-5p^3-4p-2p^4-10p^2-8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}=$$

$$=\frac{-p^5-2p^4-6p^2+p+8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}.$$

Отже,

$$\left(p^2-1\right)\cdot Y(p)=\frac{-p^5-2p^4-6p^2+p+8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)},$$

$$Y(p)=\frac{-p^5-2p^4-6p^2+p+8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)}.$$

Розкладемо дріб на найпростіші дроби:

$$\frac{-p^5-2p^4-6p^2+p+8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)}=\frac{-p^5-2p^4-6p^2+p+8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)(p-1)(p+1)}=$$

$$=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}+\frac{E}{p-1}+\frac{F}{p+1}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C, D, E і F:

$$\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}+\frac{E}{p-1}+\frac{F}{p+1}=$$

$$=\frac{(Ap+B)\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)+(Cp+D)\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)+E\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)(p+1)+F\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)(p-1)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)},$$

$$(Ap+B)\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)+(Cp+D)\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)+$$

$$+E\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)(p+1)+F\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)(p-1)=$$

$= -p^5 - 2p^4 - 6p^2 + p + 8$.

$p = 1 \Rightarrow E \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = -1 - 2 - 6 + 1 + 8 \Rightarrow 20E = 0 \Rightarrow E = 0$,

$p = -1 \Rightarrow F \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-2) = 1 - 2 - 6 - 1 + 8 \Rightarrow -20F = 0 \Rightarrow F = 0$.

Оскільки $p^2 + 1 = 0$ при $p = \pm i$, а $p^2 + 4 = 0$, при $p = \pm 2i$, застосуємо ту ж методику для знаходження решти коефіцієнтів:

$p = i$:

$$(Ai + B)(i^2 + 4)(i^2 - 1) = -i^5 - 2i^4 - 6i^2 + i + 8.$$

Оскільки $i^2 = -1$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$, то

$(Ai + B)(-1 + 4)(-1 - 1) = -i - 2 + 6 + i + 8$,

$-6(Ai + B) = 12$,

$Ai + B = \dfrac{12}{-6}$,

$Ai + B = -2 \Rightarrow A = 0$; $B = -2$.

$p = 2i$:

$(C \cdot 2i + D)((2i)^2 + 1)((2i)^2 - 1) = -(2i)^5 - 2 \cdot (2i)^4 - 6 \cdot (2i)^2 + 2i + 8$,

$(2Ci + D)(-4 + 1)(-4 - 1) = -32i - 32 + 24 + 2i + 8$,

$(2Ci + D) \cdot 15 = -30i$,

$2Ci + D = -\dfrac{30}{15} i$,

$2Ci + D = -2i \Rightarrow D = 0$, $2C = -2 \Rightarrow C = -1$.

Отримаємо вираз для $Y(p)$:

$$Y(p) = -\frac{2}{p^2 + 1} - \frac{p}{p^2 + 4}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{p^2 + 1} \xleftarrow{\cdot\,\cdot} \sin t; \quad \frac{p}{p^2 + 4} \xleftarrow{\cdot\,\cdot} \cos 2t,$$

то, з лінійності перетворення Лапласа, з виразу (5.13) отримаємо оригінал наступного вигляду:

$$y(t) = -2\sin t - \cos 2t \ .$$

$p = 2i$:

$$(C \cdot 2i + D)\left((2i)^2 + 1\right)\left((2i)^2 - 1\right) = -(2i)^5 - 2 \cdot (2i)^4 - 6 \cdot (2i)^2 + 2i + 8 \ ,$$

$$(2Ci + D)(-4+1)(-4-1) = -32i - 32 + 24 + 2i + 8 \ ,$$

$$(2Ci + D) \cdot 15 = -30i \ ,$$

$$2Ci + D = -\frac{30}{15} i \ ,$$

$$2Ci + D = -2i \Rightarrow D = 0 \ , \ 2C = -2 \Rightarrow C = -1 \ .$$

Отримаємо вираз для $Y(p)$:

$$Y(p) = -\frac{2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+4} \ .$$

Оскільки

$$\frac{1}{p^2+1} \xleftarrow{\cdot\!\cdot} \sin t \ ; \ \frac{p}{p^2+4} \xleftarrow{\cdot\!\cdot} \cos 2t \ ,$$

то, з лінійності перетворення Лапласа, з виразу (5.13) отримаємо оригінал наступного вигляду:

$$y(t) = -2\sin t - \cos 2t \ .$$