

**Чисельне рішення
одновимірних рівнянь
газової динаміки**



Вступ

Газова динаміка сформувалася як самостійна частина механіки в середині 30-х років двадцятого століття. Газова динаміка - розділ гідроаеромеханіки, в якому вивчається рух газів, рідин, а також твердих тіл при швидкій дії на них дуже високих тисків. .

Інтенсивний розвиток авіаційної та ракетно-космічної техніки, вдосконалення газотурбінних установок (ГТУ) різного призначення шляхом підвищення температури газу перед турбіною та ступеня підвищення тиску в компресорі за допомогою традиційних типів турбомашин стають досить складним. На сьогоднішній день, для вирішення цих проблем, існує велика кількість чисельних методів для розрахунку в'язкої течії в різного роду газодинамічних пристроях, за допомогою яких можна як прогнозувати загальний характер течії та ряд інтегральних характеристик, так і виконувати вдосконалення цих об'єктів.

На підставі сказаного вище можна стверджувати, що розробка нових моделей і чисельних методів газодинаміки, за допомогою яких буде можливий детальний опис течії, є важливим завданням. У цій роботі представлені результати чисельного моделювання одновимірних рівнянь газової динаміки на основі рівнянь Нав'є-Стокса та Пуазейля.

1. РІВНЯННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ

1.1 Рівняння Нав'є – Стокса

Розглянемо систему рівнянь Нав'є - Стокса:

1) рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad , \text{де}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- зміна маси одиничного обсягу за одиницю часу;

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}$$

- зміна маси одиничного обсягу за одиницю часу за

рахунок перетікання через кордони цього обсягу.

2) рівняння руху:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} p \delta_{ij} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad , \text{де}$$

$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_j$ - зміна імпульсу одиничного обсягу за одиницю часу

$\frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i u_j$ - зміна імпульсу одиничного обсягу за одиницю часу за рахунок перетікання через кордони обсягу або конвекції;

$\frac{\partial}{\partial x_i} p \delta_{ij}$ - зміна імпульсу за рахунок поверхневих сил тиску

$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}$ - зміна імпульсу за рахунок в'язких сил тертя;

3) рівняння енергії:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p) u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij} u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0 \quad , \text{де}$$

$\frac{\partial \rho E}{\partial t}$ – зміна повної енергії одиничного об'єму за одиницю часу;

$$\frac{\partial (\rho E + p) u_i}{\partial x_i}$$

- зміна повної енергії одиничного об'єму за одиницю часу за рахунок перетікання через кордон обсягу i за рахунок роботи сил тиску;

$$\frac{\partial \tau_{ij} u_j}{\partial x_i}$$

- зміна повної енергії одиничного об'єму за одиницю часу за рахунок роботи в'язких сил;

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

- зміна повної енергії одиничного об'єму за одиницю часу за рахунок теплового потоку проходить через межі цього обсягу;

1.2 Осереднення за Рейнольдсом

При розрахунку турбулентних течій необхідно враховувати число Рейнольдса так як теплообмін, опір істотно залежать від нього.

Рейнольдс ввів такі правила осереднення:

1) Якщо є дві пульсуючі величини, то їх сума є сума середніх:

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$$

2) $\overline{cf} = c * \overline{f}$,де $c = const$

3) $\overline{f * g} = \overline{f} * \overline{g}$

4) $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$

1.3 Чисельний метод і різницева схема

Осереднені по Рейнольдсу рівняння Нав'є - Стокса вирішуються чисельно, за допомогою неявної різницевої схеми другого / третього порядку точності. Дана схема є розвитком методу Годунова розпаду розриву і забезпечує надійні рішення як при малих дозвукових швидкостях, так і при числах Маха, більше ніж 2.

Метод кінцевих обсягів Годунова для рівняння переносу:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\tau}{h} (F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2})$$

$$F_{i+1/2}^{n+1/2} = R(q_i^n, q_{i+1}^n)$$

де q_i^n , q_{i+1}^n -початкові умови для розпаду розриву.

Підвищимо точність схеми Годунова для рівнянь Нав'є - Стокса:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\tau}{h} (F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2})$$

2. ТЕЧІЯ ПУАЗЕЙЛЯ

2.1 Закон Пуазейля

Закон Пуазейля — фізичний закон, що встановлює для ламінарної течії зв'язок між середньою швидкістю протікання рідини (або витратою) через капіляр та в'язкістю флюїду у залежності від перепаду тиску:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{L}$$

,де Q - об'єм флюїду, що протікає в одиницю часу (об'ємна витрата) через капіляр радіусом R та довжиною L при різниці тисків на кінцях капіляра;

η – коефіцієнт динамічної в'язкості.

Формулювання закону: об'ємна витрата рідини, що протікає прямолінійною ділянкою труби з круглим перетином сталого діаметру є прямо пропорційною перепаду тиску і четвертому степеню діаметра (радіуса) труби і обернено пропорційною її довжині.

2.2 Постановка задачі

Розглядається усталений рух нестисливої рідини з постійною в'язкістю в тонкій циліндричній трубці круглого перерізу під дією постійного перепаду тиску. На основі зроблених вище допущень можна аналітично описати розподіл швидкості у потоці що має параболічний профіль (часто називають «профіль Пуазейля»), а для круглого перерізу розподіл швидкості в залежності від відстані до осі каналу:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2), \text{де}$$

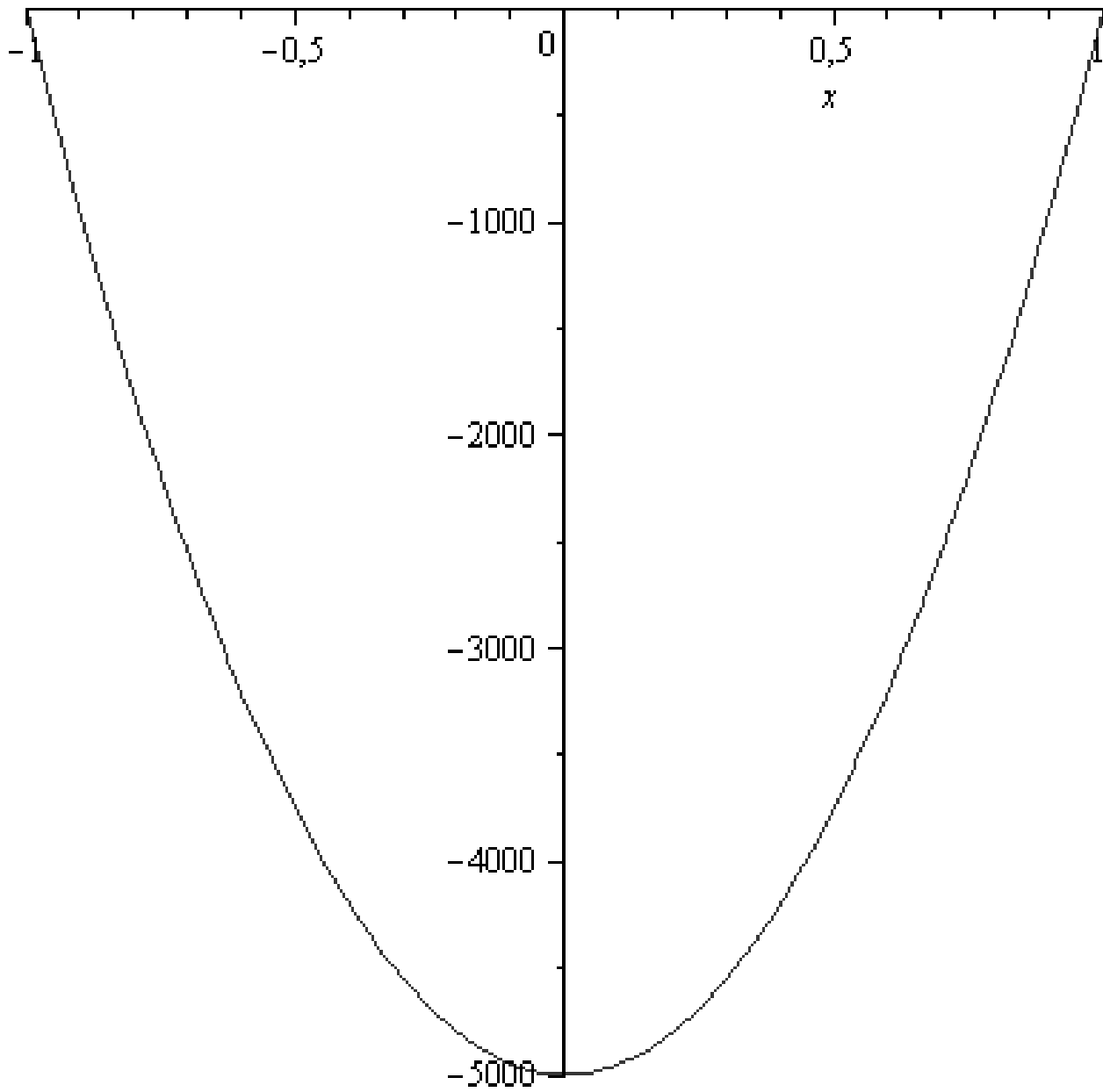
$v(r)$ – швидкість рідини на відстані від осі труби;

R – радіус трубопроводу;

$p_1 - p_2$ – різниця тисків на вході і на виході з труби;

η – в'язкість рідини;

L – довжина труби.



3. АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ ОДНОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ

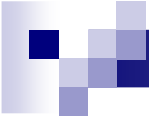
Розглянемо спрощуюче припущення: рідина не стислива і однорідна.

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho = const,$, тоді рівняння нерозривності набуває вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Рівняння руху для одновимірного потіку, при $v=0$, $w=0$:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \Delta u \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$



З 2 і 3-го рівнянь випливає, що p залежить тільки від x .

Розглянемо випадок постійного тиску, тоді

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Рівняння руху прийме вигляд:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

У циліндричних координатах рівняння руху прийме вигляд

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right)$$

До рівняння застосуємо метод розділення змінних Фур'є:

$$u(t, r, \varphi) = T(t)R(r)\phi(\varphi)$$



Нехай,

$$\phi(\varphi) = \cos n\varphi$$

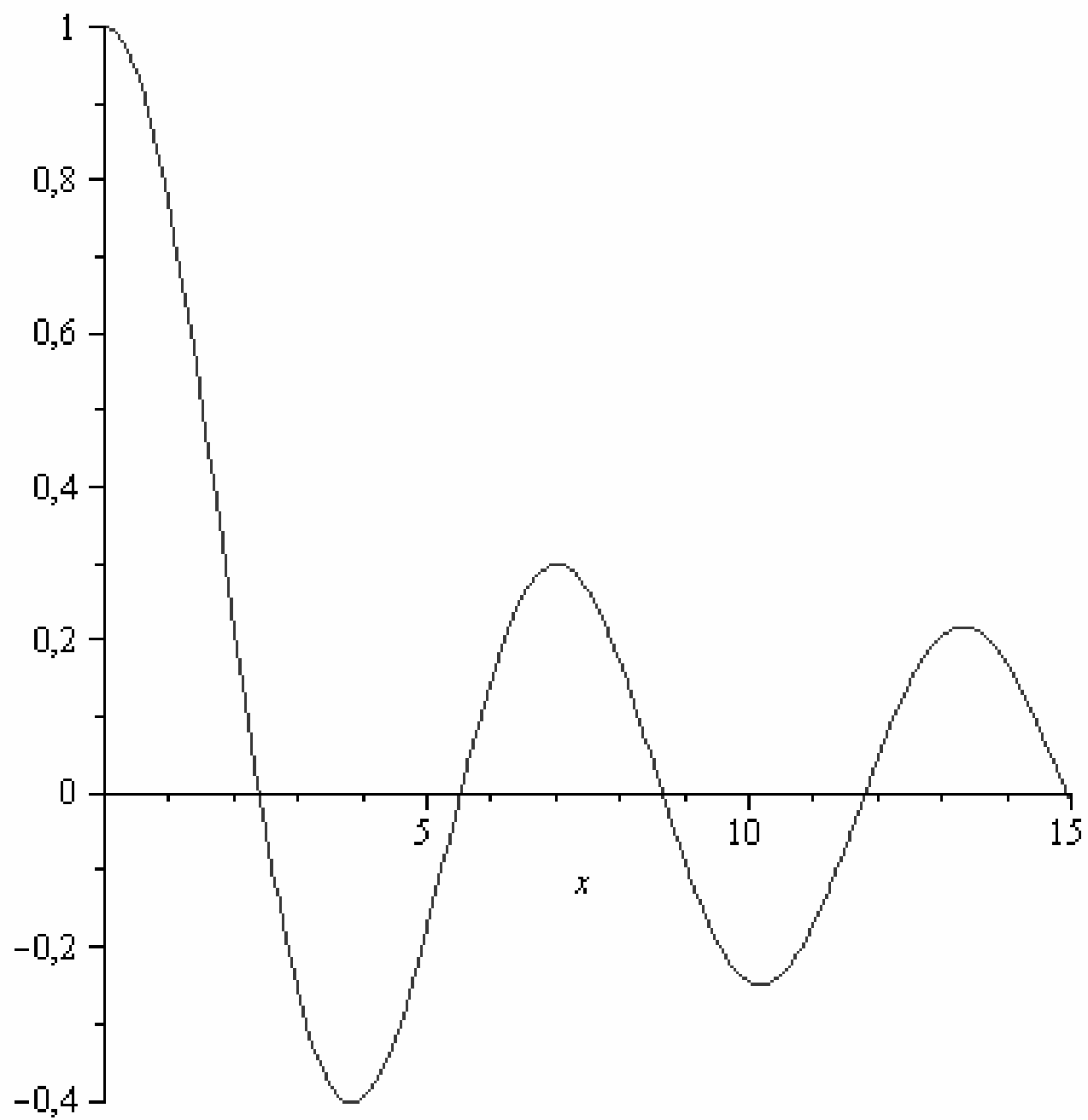
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -nT(t)R(r)\cos n\varphi$$


$$x^2 R'' + xR' + (x^2 - n^2)R = 0$$

Таким чином отримано звичайне лінійне ДР 2-го порядку, що називається рівнянням Беселя. Число називається порядком рівняння Беселя. Загальне рішення рівняння Беселя залежить від числа ν , воно може бути або цілим або ні. У розглянутому випадку ν - ціле число.

Якщо порядок ν є цілим, в цьому випадку загальний розв'язок рівняння буде визначатися формулою:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$





З графіка для функції U бачимо, що він звертається до нескінченності, тому, так як коефіцієнт рідини не може бути нескінченним, ми його не розглядаємо. Таким чином, отримано загальний вид рішення розглянутої задачі:

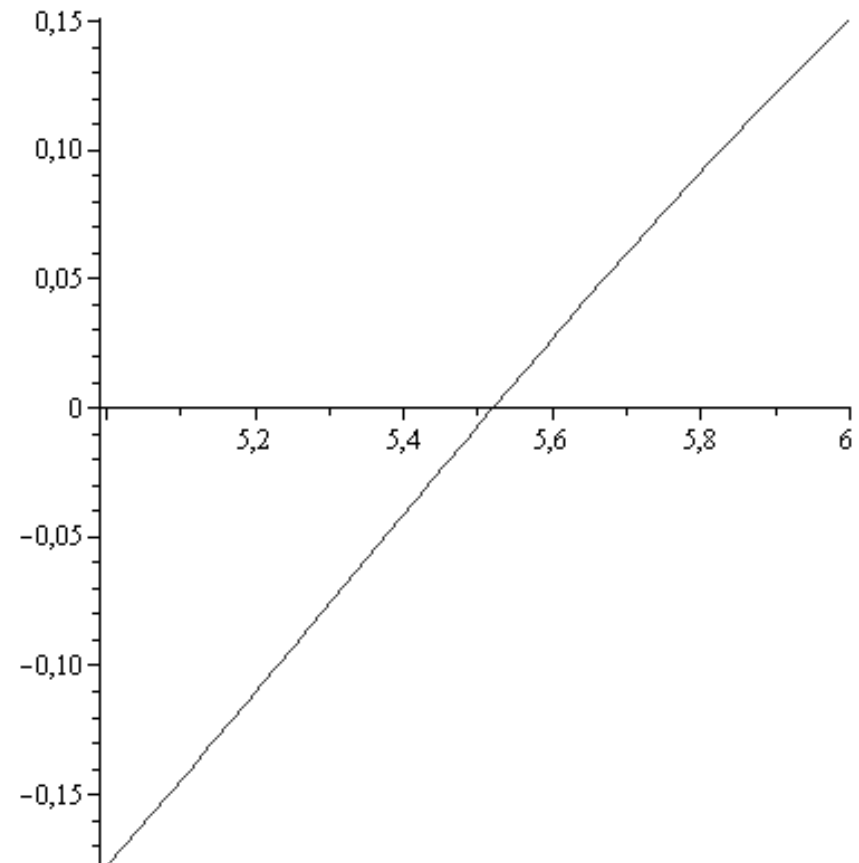
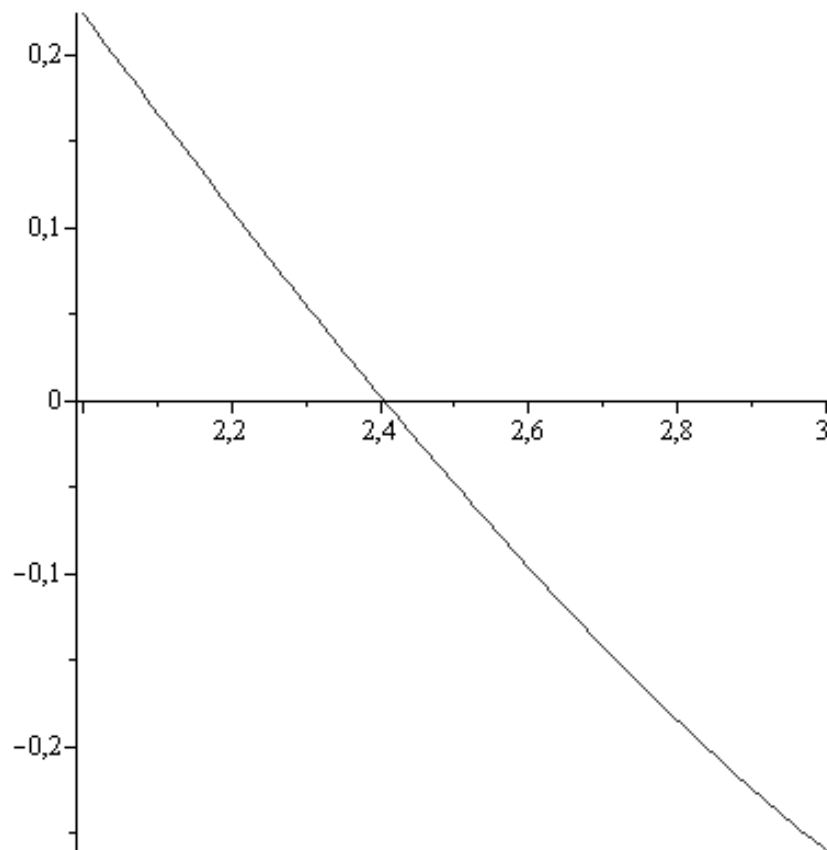
$$U = C_n e^{-\beta^2 t} J_n \left(\frac{r\beta}{\sqrt{\nu}} \right) \cos n\varphi \quad , \text{для кожного } n$$

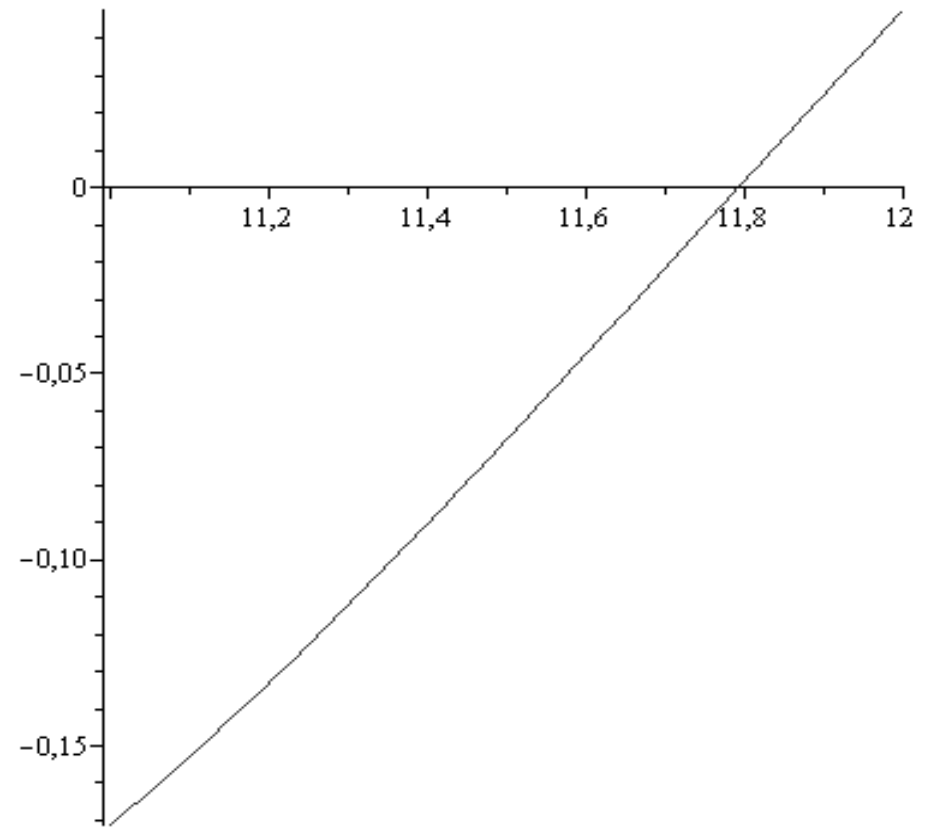
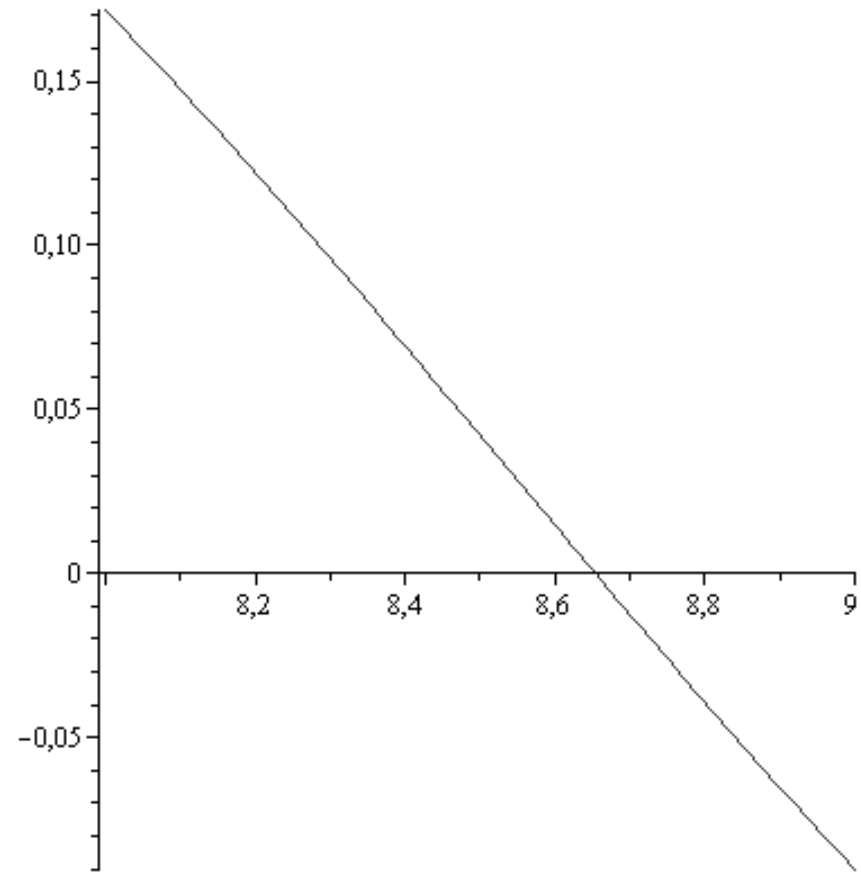
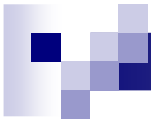
Випадок 1: $n=0$ – осісіметрична течія

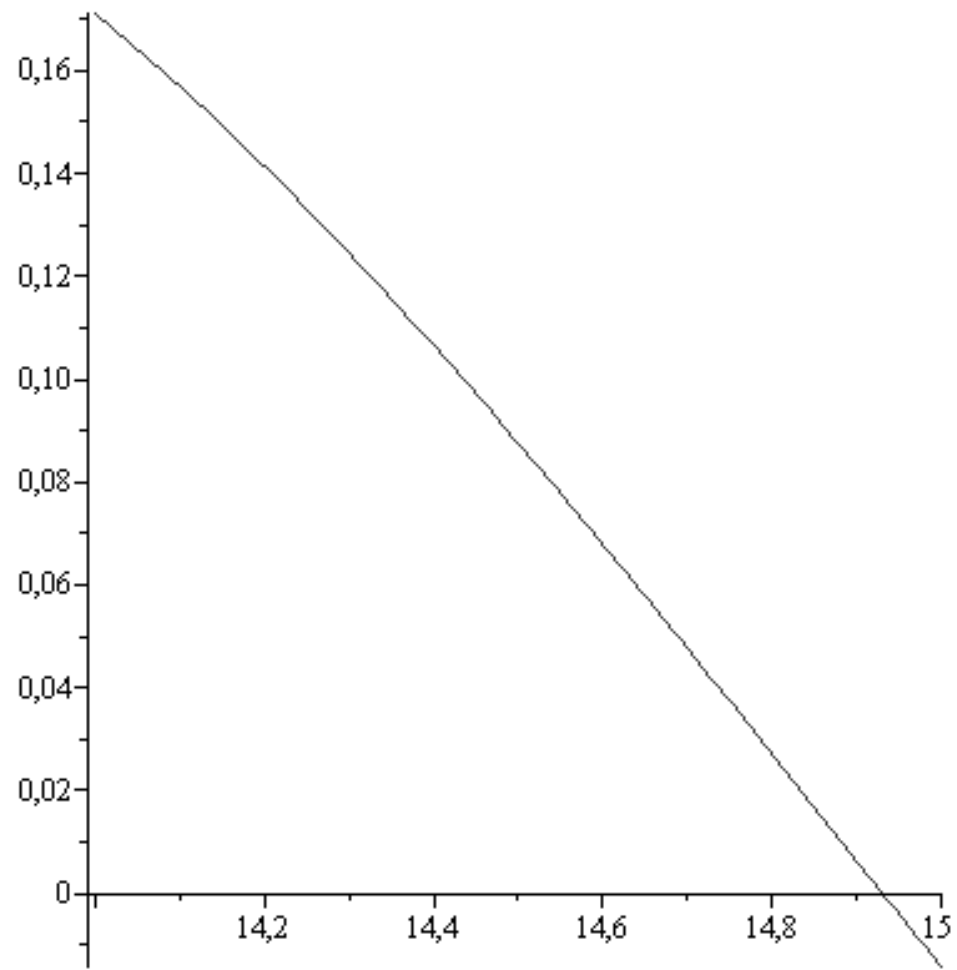
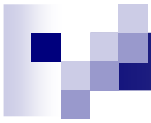
Граничні умови мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = R \\ u(t, R, \varphi) = 0 \\ J_n \left(\frac{r\beta}{\sqrt{\nu}} \right) = 0 \\ J_0 \left(\frac{r\beta}{\sqrt{\nu}} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Задача визначення констант розділення зводиться до вирішення рівняння Беселя. Перші п'ять коренів наведено нижче:

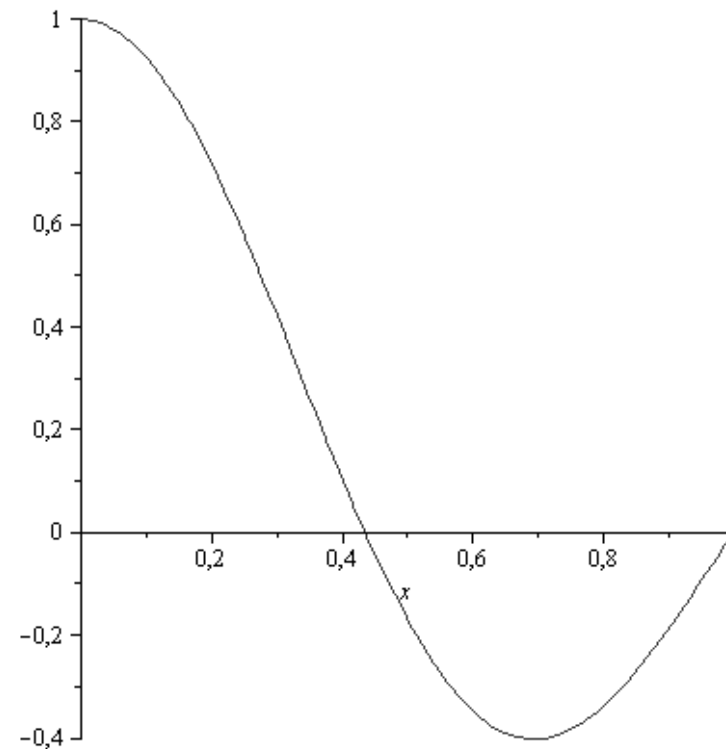
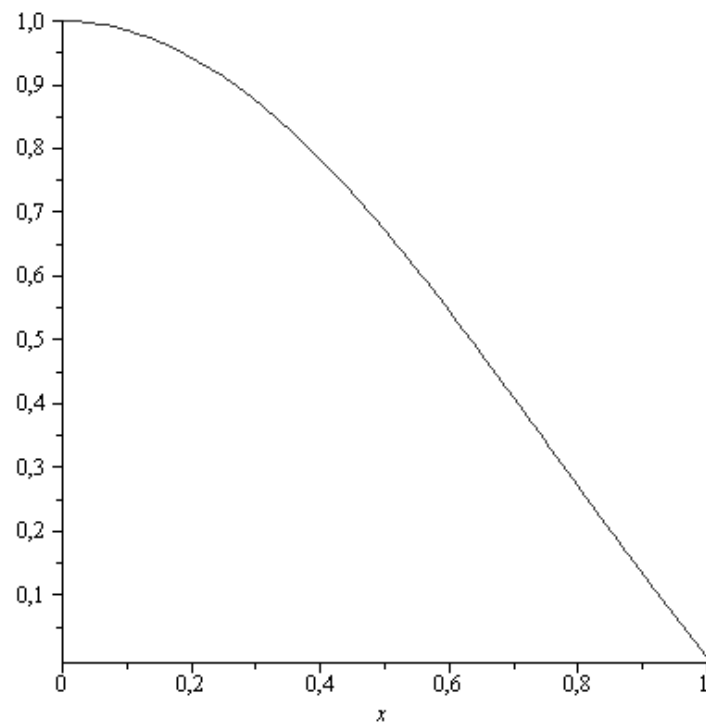


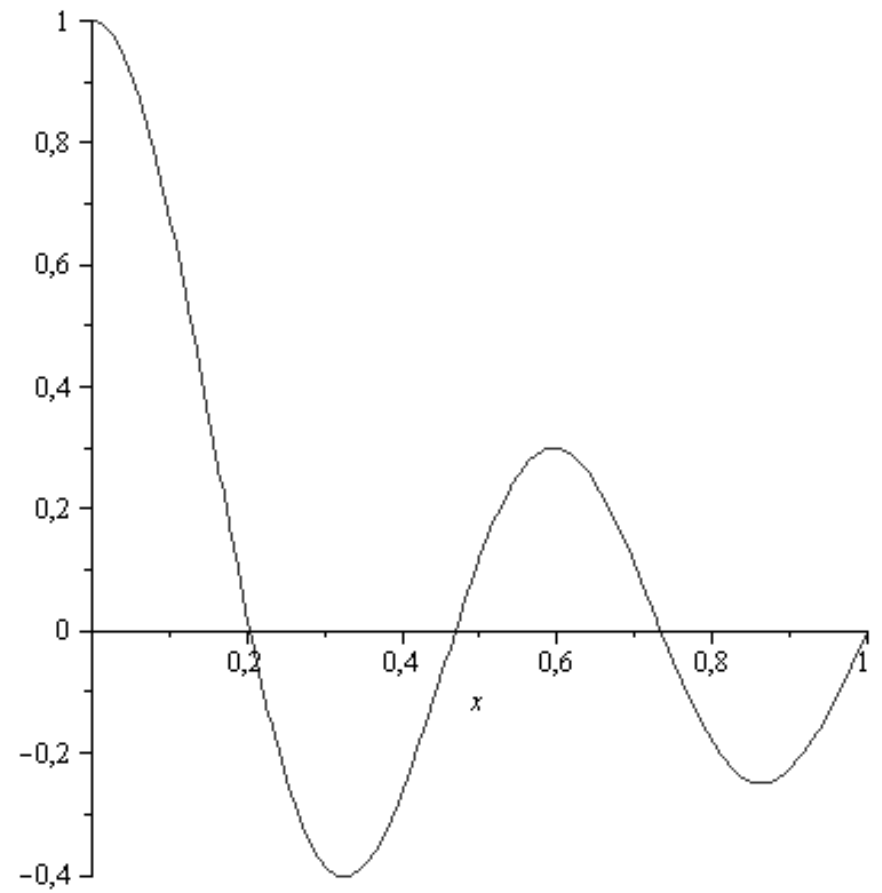
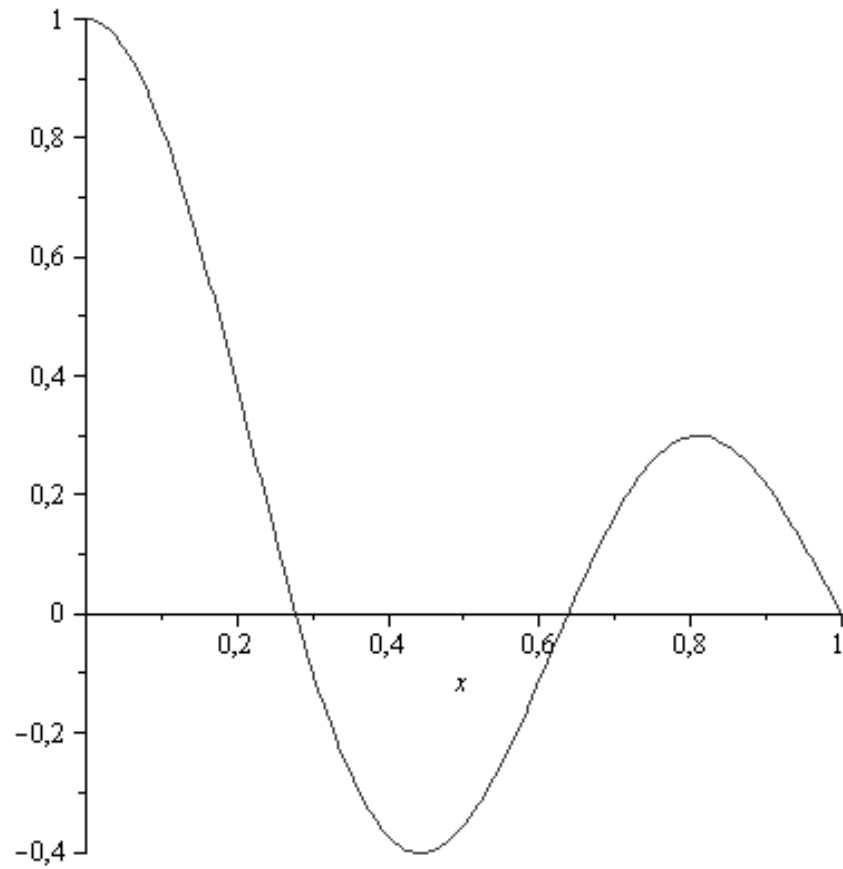
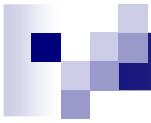


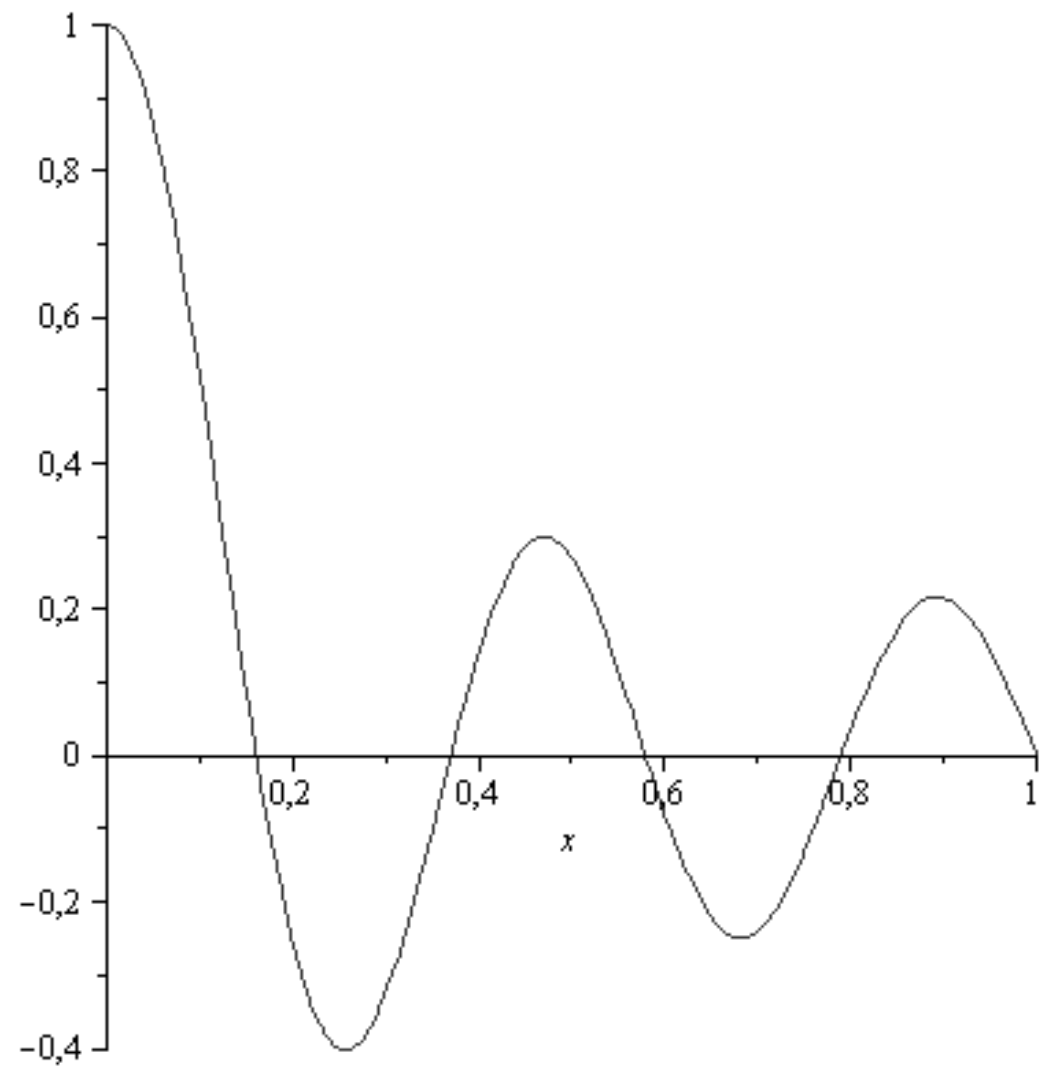
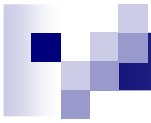



Після визначення коренів будемо базисні функції для ряду Фур'є-Беселя за формулами:

$$f_k = J_0\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{\nu}} r\right)$$









З графіків видно, що ряд з отриманих функцій не утворює базис, тому в ряд з функцій Беселя додаємо константу:

$$C_0 = \int_0^1 ru(0, r)dr$$

Рішення рівнянь Нав'є-Стокса для осісиметричного течії має вигляд:

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-P_k t} J_0 \left(\frac{\beta_k}{\sqrt{\nu}} r \right) + C_0$$

Для визначення констант маємо початкові умови:

$$u(0, r) = R^2 - r^2, \text{ тобто збігається з течією Пуазейля}$$

$$u(0, r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0 \left(\frac{\beta_k}{\sqrt{\nu}} r \right) \text{ отриман ряд Фур'є-Беселя}$$



Помножимо обидві частини рівності скалярно на

$$J_0\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) \quad j = 1..5$$

Отримаємо скалярну систему алгебраїчних рівнянь, при $R=1$:

$$2\pi \int_0^R u(0, r) J_0\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) dr = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_0^1 r J_0\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) J_0\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{\nu}} r\right) dr$$

Скористаємося властивістю ортогональності функцій Бесселя:

$$\int_0^1 r J_0\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) J_0\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{\nu}} r\right) dr = 0 \quad j \neq k$$



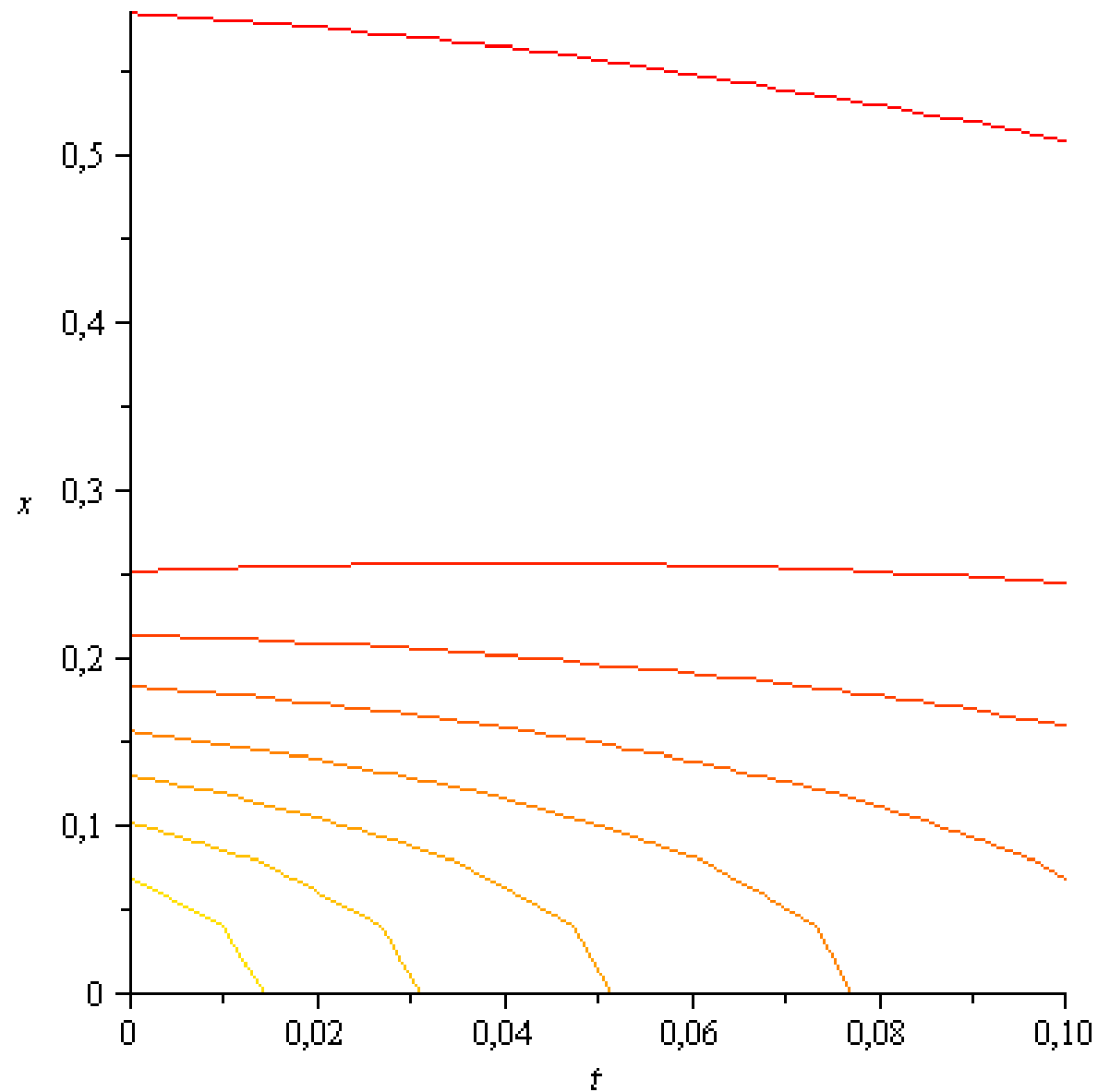
Тоді система приймає вигляд:

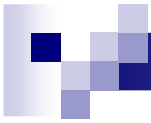
$$C_j = \frac{\int_0^1 ru(0, r) J_0\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) dr}{\int_0^1 r J_0\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) J_0\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) dr}$$
$$u(t, r) = \sum_{j=1}^5 C_j e^{-\beta_j t} J_0\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right)$$

З формули випливає, при $t \rightarrow \infty$

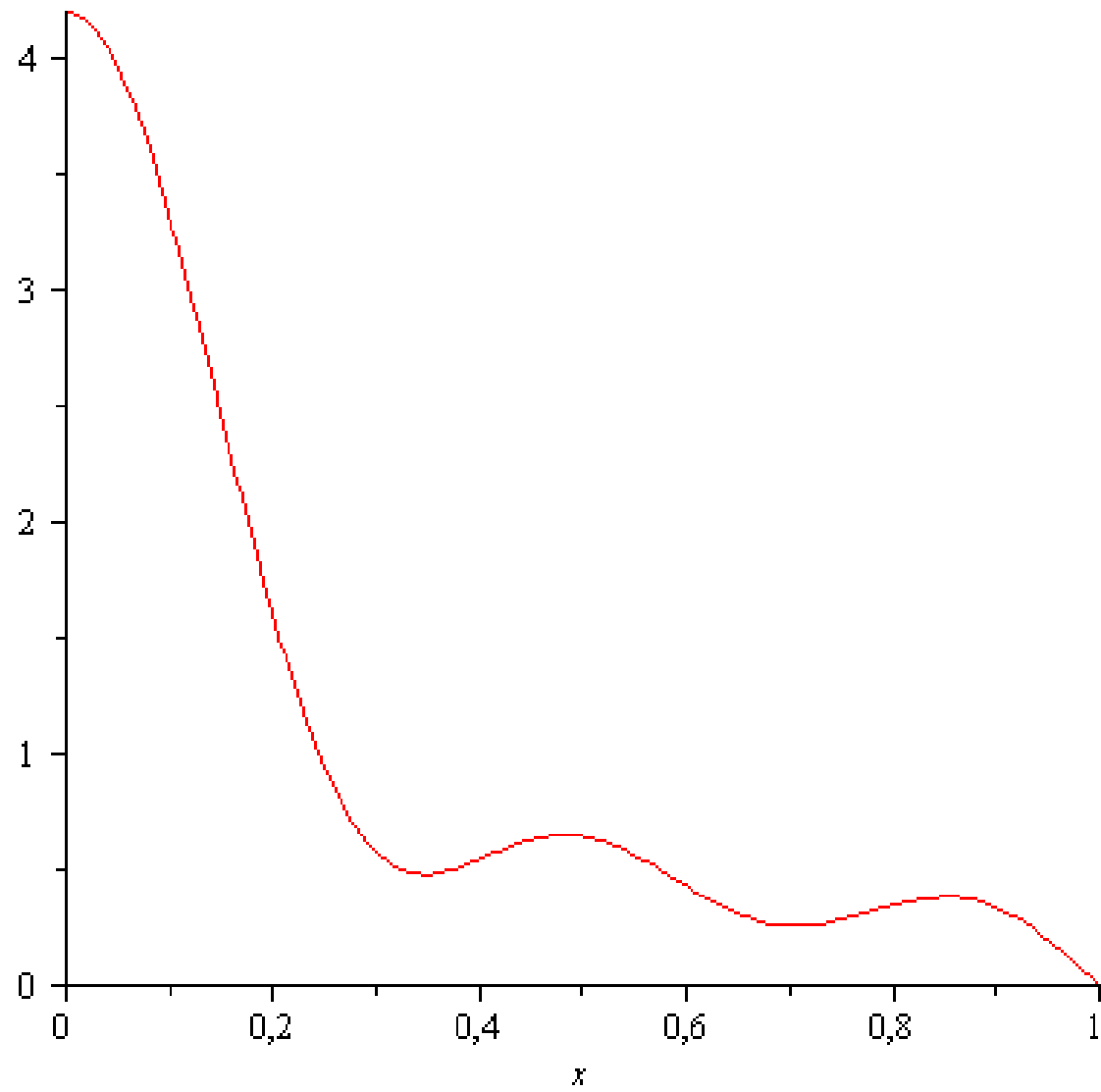
$$u(t, r) = 0$$

Розв'язання за допомогою Maple





$t = 0.$



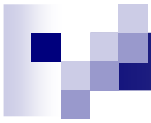
Випадок 2: $n=1$

Граничні умови мають вигляд:

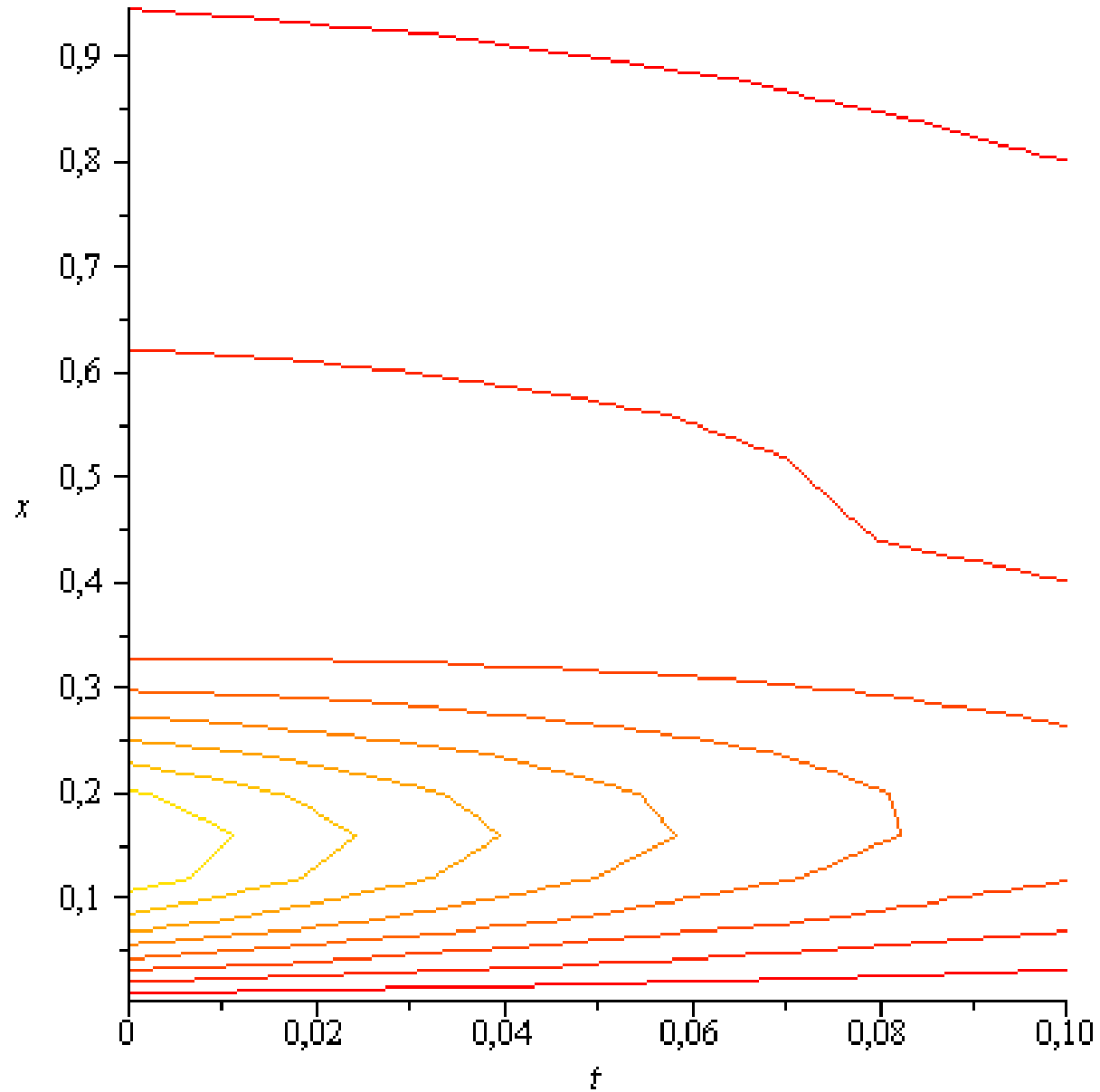
$$\begin{cases} r = R \\ u(t, R, \varphi) = 0 \\ J_n\left(\frac{r\beta}{\sqrt{\nu}}\right) = 0 \\ J_1\left(\frac{r\beta}{\sqrt{\nu}}\right) = 0 \end{cases}$$

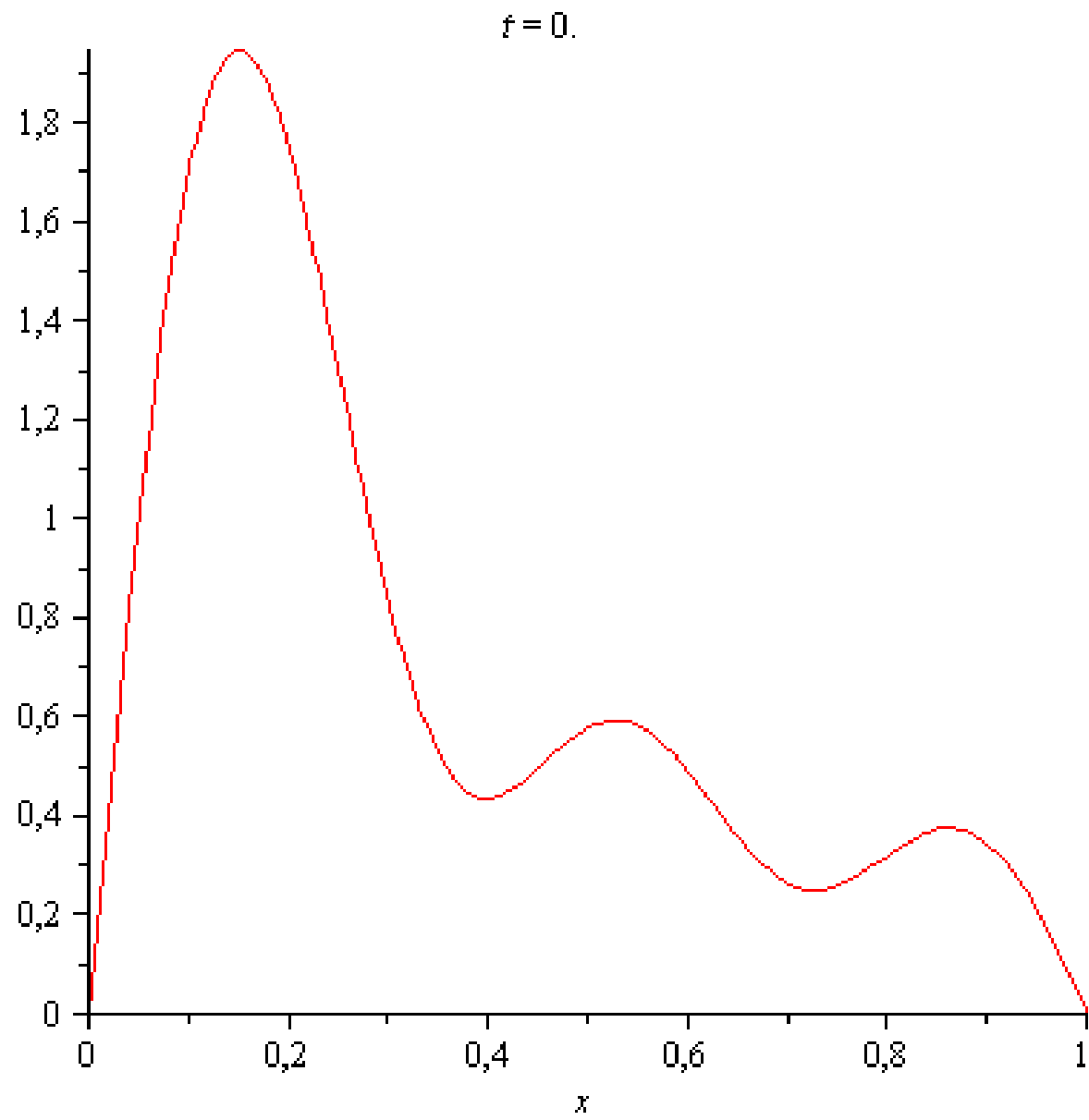
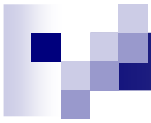
Система приймає вигляд:

$$C_j = \frac{\int_0^1 ru(1, r) J_1\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) dr}{\int_0^1 r J_1\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) J_1\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) dr} \quad u(t, r) = \sum_{j=1}^5 C_j e^{-\beta_j t} J_1\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right)$$



Розв'язання за допомогою Maple





Випадок 3: $n=2$

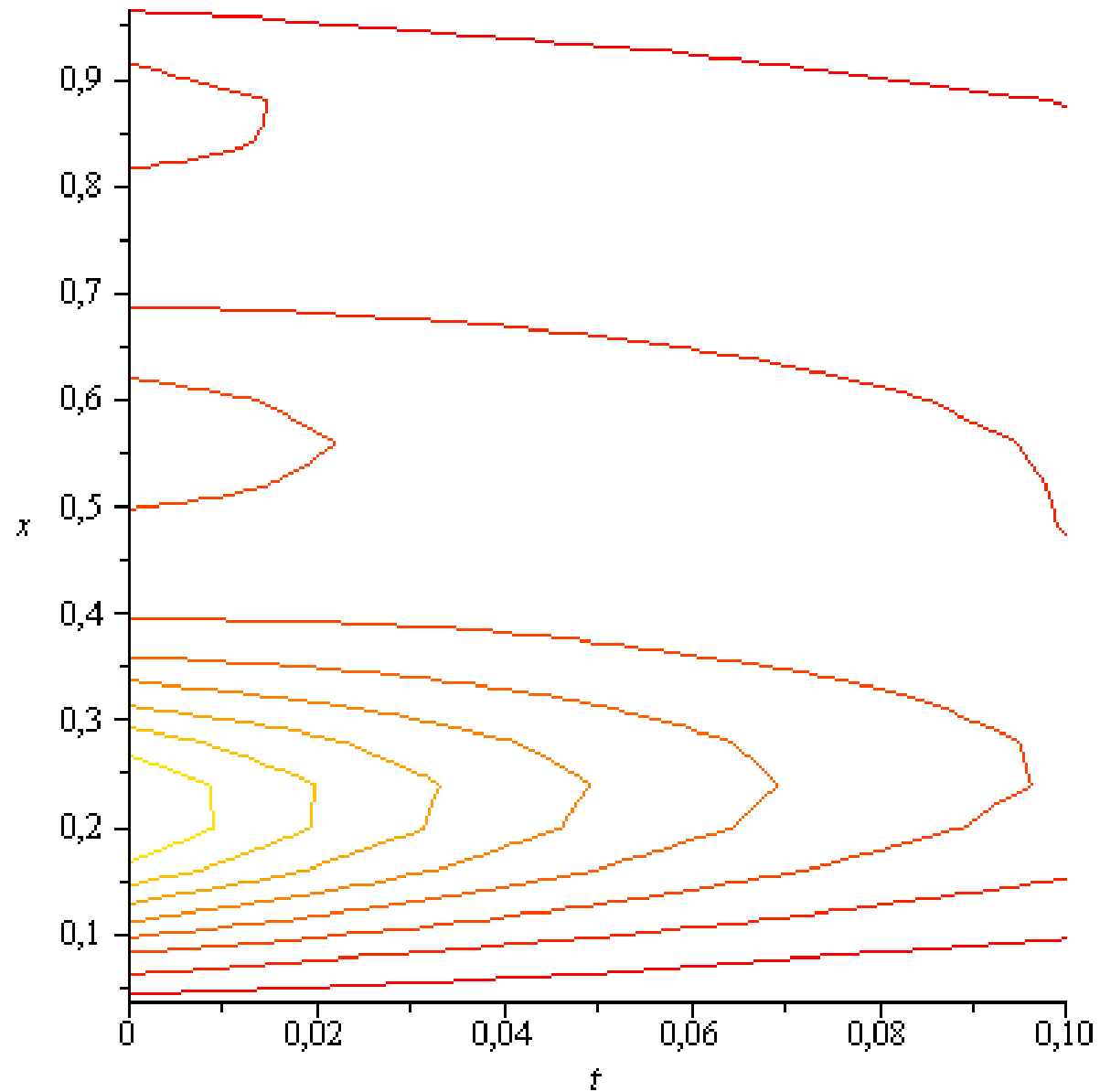
Граничні умови мають вигляд:

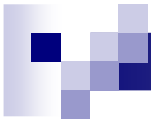
$$\begin{cases} r = R \\ u(t, R, \varphi) = 0 \\ J_n\left(\frac{r\beta}{\sqrt{\nu}}\right) = 0 \\ J_2\left(\frac{r\beta}{\sqrt{\nu}}\right) = 0 \end{cases}$$

Система приймає вигляд:

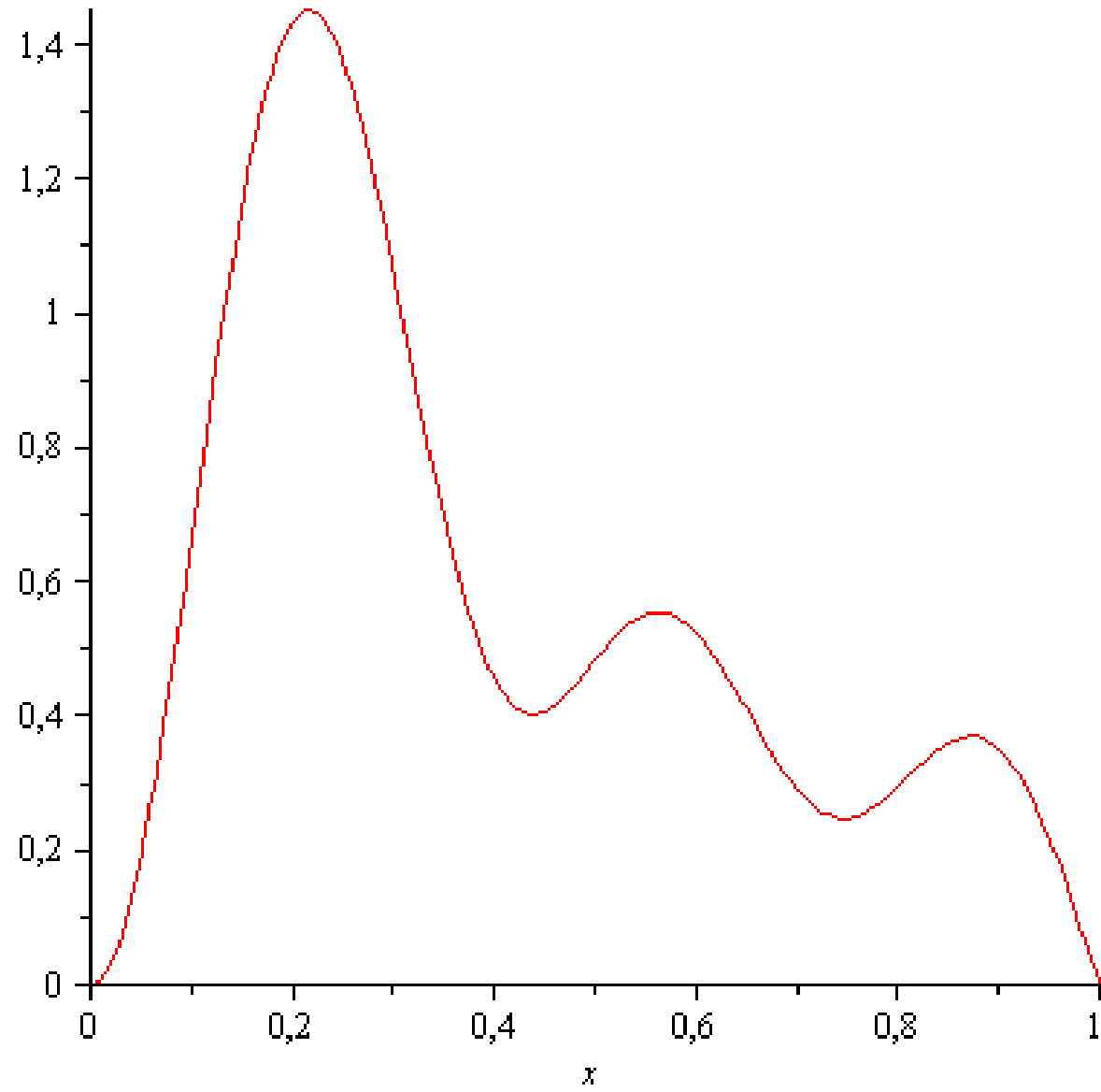
$$C_j = \frac{\int_0^1 ru(1, r) J_1\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) dr}{\int_0^1 r J_1\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) J_1\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right) dr} \quad u(t, r) = \sum_{j=1}^5 C_j e^{-\beta_j t} J_1\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\nu}} r\right)$$

Розв'язання за допомогою Maple





$t = 0.$





ВИСНОВКИ

Розроблено підхід, що дозволяє застосувати чисельні методи оцінки для визначення швидкості руху течії залежно від часу у тонкій циліндричній трубці круглого перетину. Для розрахунків та візуалізації використовувався програмний пакет Maple.

З графіків видно, що зі збільшенням часу швидкість збурювання падає, поки зовсім не звертається в нуль.

З графіку розглянутої течії Пуазейля видно, що сама висока швидкість на осі труби (при $r=0$). При віддаленні від осі швидкість змінюється по параболічному закону.