

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

СЕРІЯ «ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ»

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ПРОВЕДЕННЯ
практичних занять з вищої математики за темою
«ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»

для студентів усіх спеціальностей

Затверджено
редакційною-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 30.01.18

Харків
НТУ «ХП»
2018

Методичні рекомендації до проведення практичних занять за темою «Визначений інтеграл та його застосування» для студентів усіх спеціальностей / уклад. І.І. Цехмістро, Н.В Черемська, Т.Т. Черногор. – Харків: НТУ «ХП», 2018. – 70 с.

Укладачі: І. І. Цехмістро, Н.В Черемська, Т.Т. Черногор

Рецензент Н.О. Чікіна, к. техн. наук, проф. НТУ «ХП»

Кафедра вищої математики

Вступ

У методичних рекомендаціях наведено задачі за темою «Визначений інтеграл та його застосування» для п'яти практичних занять, передбачених діючою робочою навчальною програмою з вищої математики для студентів усіх спеціальностей.

Кожне практичне заняття складається з п'яти частин. У першій частині сформульовані теоретичні питання, відповіді на які є необхідним мінімумом для успішного засвоєння матеріалу. У другій частині наведено розв'язані завдання з детальними поясненнями та рекомендаціями. У третій частині зібрані завдання, що рекомендовані для розв'язання на практичних заняттях. У четвертій – завдання для самостійної роботи студента. П'ята частина має посилання на літературу, з вказівками на завдання, які студент може також розв'язати для закріплення знань. Завершуються методичні вказівки варіантами тематичної контрольної роботи.

Практичне заняття 1

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛИ НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦЯ. МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ ІНТЕГРУВАННЯ. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Контрольні питання

1. Означення інтегральної суми функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.
2. Означення визначеного інтеграла.
3. Властивості визначеного інтеграла:
 - 3.1. Властивість збереження знаку підінтегральної функції визначеним інтегралом.
 - 3.2. Властивість лінійності визначеного інтеграла відносно підінтегральної функції.
 - 3.3. Властивість адитивності визначеного інтеграла щодо проміжку інтегрування.
 - 3.4. Теорема про оцінку визначеного інтеграла.
 - 3.5. Теорема про середнє значення.
 - 3.6. Теорема про інтегрування нерівностей.
4. Визначений інтеграл як функція верхньої змінної межі інтегрування. Теорема про її похідну.
5. Формула Ньютона – Лейбніца.
6. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі.
7. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Методичні рекомендації до практичного заняття

На початку заняття слід з'ясувати відповіді на вказані питання. Далі необхідно розглянути приклади на безпосереднє застосування формули Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Розглянемо приклади, в яких обчислимо визначені інтеграли.

Приклад 1.

$$\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx = \int_0^1 (e^x - 1)^4 d(e^x - 1) = \frac{(e^x - 1)^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{(e-1)^5}{5}.$$

Приклад 2.

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} &= \int_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin \ln x \Big|_1^e = \arcsin \ln e - \arcsin \ln 1 = \\ &= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 3. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = -\int_0^1 e^{1/x} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{1/x} \Big|_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e.$

Приклад 4.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cdot \sin 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x d(\cos x) = \\ &= -2 \frac{\cos^7 x}{7} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{7} \left(\cos^7 \frac{\pi}{2} - \cos^7 0 \right) = -\frac{2}{7} (0-1) = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Якщо підінтегральний вираз доволі складний, для обчислення інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ корисно замінити змінну інтегрування x новою змінною t , яка зв'язана з x відповідною формулою $x = \varphi(t)$ або $t = \psi(x)$. При цьому необхідно перейти від старих меж інтегрування a, b до нових меж α, β , які визначаються з рівнянь $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$. Якщо ці рівняння мають декілька коренів, то обирають один, з тих міркувань, щоб значення функції $x = \varphi(t)$ не виходили за межі $[a, b]$.

Заміна змінних здійснюється за формулою

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \text{ Ця формула справедлива, зокрема, якщо}$$

$f(x)$ – неперервна функція, а підстановка $x = \varphi(t)$ також неперервна та має неперервну похідну на відрізку $[\alpha, \beta]$. Підкреслимо, що при обчисленні визначеного інтеграла методом заміни змінної, на відміну від невизначеного інтегрування, не потрібно повертатися до старої змінної.

Розглянемо приклади на використання заміни змінної у визначеному інтегралі.

Приклад 5.

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx &= \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{x}, x = t^2, t > 0, \quad x_u = 4, 4 = t^2, t = 2, \\ dx = 2tdt, \quad x_o = 9, 9 = t^2, t = 3 \end{array} \right\| = \int_2^3 \frac{t \cdot 2tdt}{t-1} = 2 \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t-1} = \\ &= 2 \int_2^3 \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt = 2 \int_2^3 (t+1) dt + 2 \int_2^3 \frac{1}{t-1} dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_2^3 + 2 \ln |t-1| \Big|_2^3 = \\ &= 2 \left(\frac{9}{2} + 3 - 2 - 2 \right) + 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \left(\frac{9}{2} - 1 \right) + 2 \ln 2 = 7 + 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Приклад 6.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3} &= \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x_u = 0, t = \operatorname{tg} 0 = 0, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad x_o = \frac{\pi}{2}, t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right\| = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2) \left(2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \right)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\cancel{(1+t^2)} \left(\frac{2-2t^2+3+3t^2}{\cancel{(1+t^2)}} \right)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Приклад 7.

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{e^x - 1}, e^x - 1 = t^2, \quad x_u = 0, t = \sqrt{e^0 - 1} = 0, \\ e^x dx = 2t dt, \quad x_6 = \ln 5, t = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = 2 \end{array} \right\| =$$
$$= \int_0^2 \frac{t \cdot 2t dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 \frac{t^2 + 4 - 4}{t^2 + 4} dt = 2 \int_0^2 dt - 8 \int_0^2 \frac{dt}{t^2 + 4} = 2t \Big|_0^2 - 8 \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \Big|_0^2 =$$
$$= 4 - 4 \operatorname{arctg} 1 = 4 - 4 \frac{\pi}{4} = 4 - \pi.$$

Приклад 8.

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} x = 2 \sin t, \quad x = 1 \Rightarrow 1 = 2 \sin t, \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t_6 = \frac{\pi}{6}, \\ dx = 2 \cos t dt, \quad x = 0 \Rightarrow 0 = 2 \sin t, \sin t = 0 \Rightarrow t_u = 0 \end{array} \right\| =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin^2 t \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2t dt =$$
$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = 2 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Також слід розглянути, формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Застосування цієї формули мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла.

Розглянемо приклади.

Приклад 9.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx &= \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos x \, dx, \\ du = dx, \quad v = \sin x \end{array} \right\| = x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Приклад 10.

$$\begin{aligned} \int_0^3 x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = x \, dx, \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x^2 \, dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^3 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 = 5 \operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 11.

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \cdot \log_2 x \, dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \log_2 x, \quad dv = x \, dx, \\ du = \frac{dx}{x \ln 2}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \frac{x^2}{2} \log_2 x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x \ln 2} = \\ &= 2 - \frac{1}{2} \log_2 1 - \frac{1}{2 \ln 2} \int_1^2 x \, dx = 2 - \frac{1}{2 \ln 2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2 \ln 2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 2 - \frac{1}{2 \ln 2} \cdot \frac{3}{2} = \\ &= 2 - \frac{3}{4 \ln 2}. \end{aligned}$$

Далі необхідно розглянути таке поняття, як середнє значення функції $y = f(x)$ на відріжку $[a, b]$. Середнє значення функції позначається μ та обчислюється за формулою:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Розглянемо приклади.

Приклад 12. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ на відрізьку $[1, e]$.

Розв'язання.

$$\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{1}{e-1} \int_1^e \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{e-1} \left. \frac{\ln^3 x}{3} \right|_1^e = \frac{1}{3(e-1)}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3(e-1)}$.

Приклад 13. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ на відрізьку $[0, 2]$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2-0} \int_0^2 \frac{2}{e^x + 1} dx = \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_0^2 \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^2 \frac{e^x + 1}{e^x + 1} dx - \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \\ &= x \Big|_0^2 - \ln |e^x + 1| \Big|_0^2 = 2 - \ln |e^2 + 1| + \ln 2 = 2 - \ln \frac{e^2 + 1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $2 - \ln \frac{e^2 + 1}{2}$.

Надалі необхідно розглянути формулу, користуючись якою можна, не обчислюючи визначений інтеграл, оцінити його:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

де m та M відповідно найменше та найбільше значення функції $y = f(x)$ на інтервалі $[a, b]$.

Приклад 14. Оцінити визначений інтеграл $\int_1^4 \left(4 - x - \frac{4}{x^2} \right) dx$.

Розв'язання. В даному разі $f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2}$; $a = 1$; $b = 4$.

Знайдемо найменше m та найбільше M значення функції на інтервалі $[1, 4]$. Для цього проведемо наступні дії:

$$y' = -1 - 4(-2)x^{-3} = -1 + \frac{8}{x^3}; y' = 0 \Rightarrow \frac{8 - x^3}{x^3} = 0 \Rightarrow 8 - x^3 = 0 \Rightarrow x = 2 \in (1, 4).$$

Обчислимо значення функції на кінцях інтервалу та в критичній точці

$$x = 2: f(1) = 4 - 1 - 4 = -1, f(2) = 4 - 2 - 1 = 1, f(4) = 4 - 4 - \frac{4}{16} = -\frac{1}{4},$$

та порівняємо їх. Маємо $m = -1$, $M = 1$.

Таким чином,

$$-1(4-1) \leq \int_1^4 \left(4 - x - \frac{4}{x^2}\right) dx \leq 1(4-1), \quad -3 \leq \int_1^4 \left(4 - x - \frac{4}{x^2}\right) dx \leq 3.$$

$$\text{Відповідь: } -3 \leq \int_1^4 \left(4 - x - \frac{4}{x^2}\right) dx \leq 3.$$

Зауважимо, що цей інтеграл легко обчислити безпосередньо.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(4 - x - \frac{4}{x^2}\right) dx &= \left(4x - \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}\right) \Big|_1^4 = \left(4 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} + \frac{4}{4}\right) - \left(4 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{4}{1}\right) = \\ &= 16 - 8 + 1 - 4 + \frac{1}{2} - 4 = 1,5. \end{aligned}$$

Приклад 15. Оцінити визначений інтеграл $\int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл обчислити не можна, проте можна оцінити. В даному разі $f(x) = e^{\sin^2 x}$; $a = 0$; $b = \frac{\pi}{2}$. Знайдемо найменше m та найбільше M значення функції на інтервалі $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Для цього проведемо наступні дії:

$$y' = e^{\sin^2 x} 2 \sin x \cdot \cos x = e^{\sin^2 x} \sin 2x;$$

$$y' = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Обчислимо значення функції на кінцях інтервалу

$$f(0) = e^{\sin^2 0} = e^0 = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = e^1 = e$$

та порівняємо їх. Маємо $m = 1, M = e$.

$$\text{Таким чином, } \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} dx \leq \frac{\pi}{2} e.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} dx \leq \frac{\pi}{2} e.$$

Задачі для аудиторної роботи

$$1. \int_1^2 \left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx. \quad 2. \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} dx. \quad 3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx.$$

$$4. \int_0^1 \frac{x^2 + \arctg x}{1 + x^2} dx. \quad 5. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}. \quad 6. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}. \quad 7. \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$8. \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx. \quad 9. \int_0^2 x \cdot e^{x+1} dx. \quad 10. \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx. \quad 11. \int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx.$$

$$12. \int_0^1 (3x^2 - 1) \arctg x dx. \quad 13. \text{ Знайти середнє значення функції}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8 + 2x - x^2}} \text{ на відрізку } \left[-\frac{1}{2}, 1 \right]. \quad 14. \text{ Знайти середнє значення}$$

функції $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. **15.** Оцінити визначений

інтеграл $\int_{-2}^2 (x+2)e^{1-x} dx$. **16.** Оцінити визначений інтеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Відповіді: **1.** $8 - \sqrt{2}$. **2.** 0 . **3.** $\ln \frac{3}{2}$. **4.** $1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{32}$. **5.** $\frac{\pi}{2}$. **6.** $\frac{\pi}{6}$.

7. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{3}}{72}$. **9.** $e^3 + e$. **10.** $-\frac{\pi}{2}$. **11.** $\frac{\pi}{2}$. **12.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$. **13.** $\frac{\pi}{9}$.

14. $\sqrt{3} - \frac{3 \ln 2}{\pi}$. **15.** $0 \leq \int_{-2}^2 (x+2)e^{1-x} dx \leq 4e^2$. **16.** $0 \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq 1$.

Задачі для самостійної роботи

1. $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$. **2.** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. **3.** $\int_0^1 \frac{4x^5+9x^3+2x-\arctg^4 2x}{1+4x^2} dx$. **4.** $\int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$.

5. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. **6.** $\int_0^4 x^3 \sqrt{x^2+9} dx$. **7.** $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$. **8.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x dx$.

9. $\int_0^{\pi/4} \frac{4-7 \operatorname{tg} x}{2+3 \operatorname{tg} x} dx$. **10.** $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4+\sqrt{\sin x}} dx$. **11.** $\int_0^1 x e^{-x} dx$. **12.** $\int_1^3 (x^2-1) \ln x dx$.

13. $\int_0^{\pi} (1-8x^2) \cos 4x dx$. **14.** $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$. **15.** Знайти середнє значення

функції $f(x) = x \log_3 x$ на відрізку $[1, 3]$. **16.** Знайти середнє значення

функції $f(x) = \frac{x \cos x}{\sin^3 x}$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. **17.** Оцінити визначений

інтеграл $\int_0^3 \ln(x^2-2x+2) dx$.

- Відповіді:** 1. $\ln \sqrt{\frac{7}{5}}$. 2. $\arctg 3 - \arctg 2$. 3. $\frac{5}{4} - \frac{\arctg^5 2}{10}$. 4. $\ln \frac{3}{2}$.
5. $2 - \ln 2$. 6. $282,4$. 7. $\frac{31}{80}$. 8. $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$. 9. $\ln \frac{25}{8} - \frac{\pi}{4}$. 10. $2 - 8 \ln \frac{5}{4}$.
11. $-\frac{2}{e} + 1$. 12. $6 \ln 3 - \frac{8}{9}$. 13. $-\pi$. 14. $\frac{e^\pi - 2}{5}$. 15. $\frac{9}{4} - \frac{1}{\ln 3}$. 16. $\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.
17. $0 \leq \int_0^3 \ln(x^2 - 2x + 2) dx \leq 3 \ln 5$.

Література:

[3], гл. 7, с. 356–369.

[4], р. 6, с. 138–141.

Практичне заняття 2

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР В ДЕКАРТОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Контрольні питання

1. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $(f(x) \geq 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.
2. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $(f(x) \leq 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.
3. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $(f(x) \geq \varphi(x))$, $x = a$, $x = b$.
4. Обчислення площі плоскої фігури, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, $(\varphi(y) \geq \psi(y))$, $y = c$, $y = d$.

5. Обчислення площі плоскої фігури, якщо крива $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta. \end{cases}$$

Методичні рекомендації до практичного заняття

При обчислення площ плоских фігур доцільно зробити креслення фігури, яка задана за умовою задачі. Рисунок допомагає визначити, який саме випадок розглядається.

1. Якщо неперервна крива в прямокутній системі координат задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x) \geq 0$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, двома вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$ та відрізком осі OX ($a \leq x \leq b$) (рис.1) обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

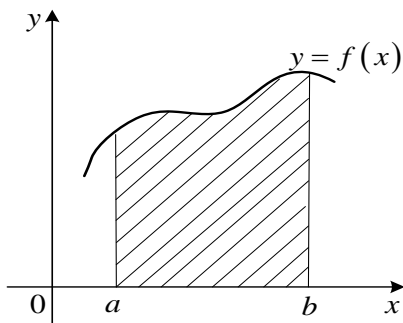


Рисунок 1

Приклад 1.1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = x^2 + 2$, $x = -3$, $x = 1$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис.2).

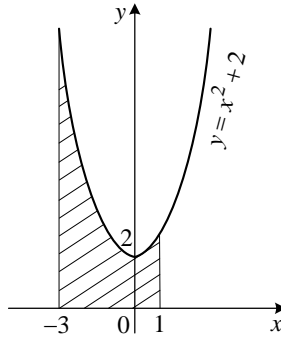


Рисунок 2

Відповідно до формули маємо:

$$S = \int_{-3}^1 (x^2 + 2) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-3}^1 + 2x \Big|_{-3}^1 = \frac{1}{3} + 9 + 2 + 6 = \frac{52}{3}.$$

Відповідь: $\frac{52}{3}$.

Приклад 1.2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис.3).

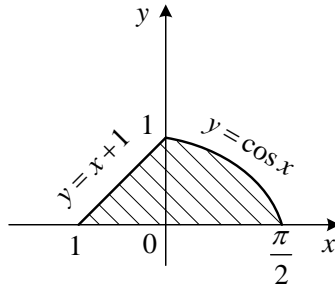


Рисунок 3

Очевидно, що функція $y = f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

неперервна для $x \in \left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$. Площа цієї криволінійної трапеції складається з двох площ, які поєднуються в одну.

$$S = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

2. Якщо необхідно обчислити площу фігури, що обмежена лініями

$y = f(x)$, $(f(x) \leq 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, (рис.4) то користуємось формулою:

$$S = -\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

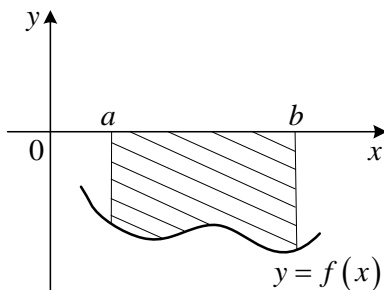


Рисунок 4

Приклад 2.1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = x^2 - 2x - 3$, $x = 2$, $x = 1$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис.5).

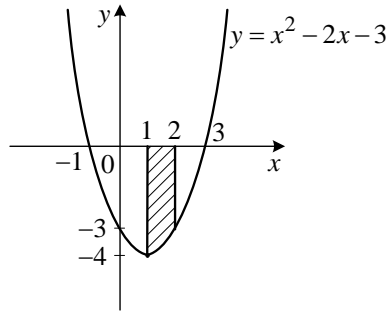


Рисунок 5

$$S = -\int_1^2 (x^2 - 2x - 3) dx = \frac{11}{3}.$$

Відповідь: $\frac{11}{3}$.

3. У тому випадку, якщо $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ неперервні функції, визначені на інтервалі $[a, b]$ і $f(x) \geq \varphi(x)$ (рис.6), то площа даної фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx.$$

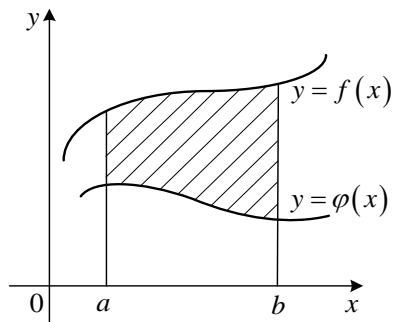


Рисунок 6

Приклад 3.1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = \ln x$, $y = -2$, $x = 1$, $x = 3$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис.7).

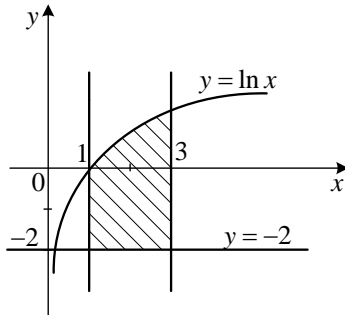


Рисунок 7

$$S = \int_1^3 (\ln x + 2) dx = 2x \Big|_1^3 + \int_1^3 \ln x dx = 2(3-1) + (x \ln x - x) \Big|_1^3 = 4 + 3 \ln 3 - 3 + 1 = 3 \ln 3 + 2.$$

Відповідь: $3 \ln 3 + 2$.

Приклад 3.2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис.8).

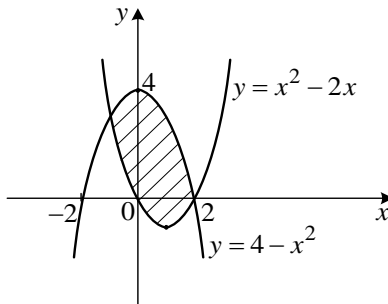


Рисунок 8

Знайдемо точки перетину двох парабол:

$$4 - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$$

Ці точки перетину і є межами інтегрування.

$$S = \int_{-1}^2 (4 - x^2 - x^2 + 2x) dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx = \left(4x - 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 = \\ = 8 - \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 15 - 6 = 9.$$

Відповідь: 9.

Приклад 3.3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = -x$, $y = 2x - x^2$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис.9).

Знайдемо точки перетину прямої і параболи:

$$-x = -x^2 + 2x \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(3 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Очевидно, межі інтегрування в даному випадку $x = 0$, $x = 3$.

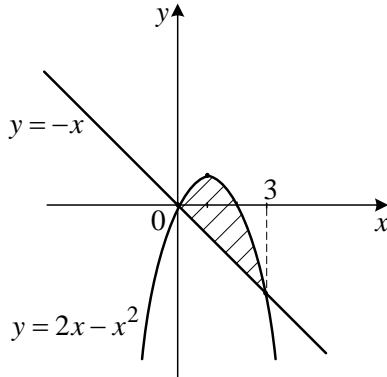


Рисунок 9

Таким чином,

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Відповідь: $\frac{9}{2}$.

Приклад 3.4. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y = 2^x$, $y = -x^2$, $x = 0$, $x = 3$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис.10).

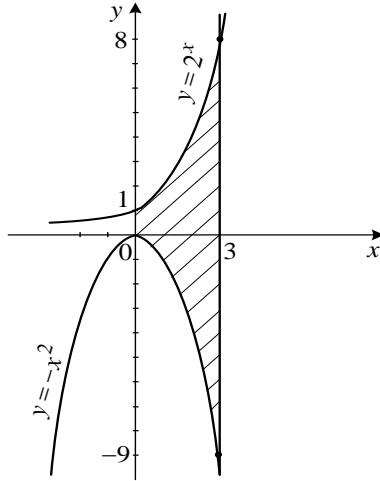


Рисунок 10

Очевидно, межі інтегрування в даному випадку $x = 0$, $x = 3$.

Маємо:

$$S = \int_0^3 (2^x + x^2) dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{8}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + 9 = 9 + \frac{7}{\ln 2}.$$

Відповідь: $9 + \frac{7}{\ln 2}$.

Приклад 3.5. Обчислити площу фігури, яка обмежена локонном

Аньєзі $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ та параболою $4y = x^2$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис.11).

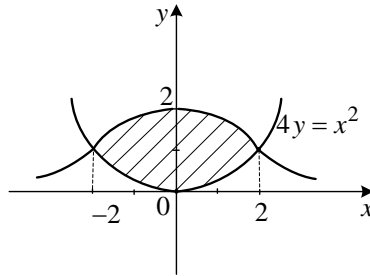


Рисунок 11

Обчислимо координати точок перетину кривих. Розглянемо систему

$$\begin{cases} y = \frac{8}{x^2 + 4}, \\ y = \frac{x^2}{4}. \end{cases}$$

Звідки $\frac{8}{x^2 + 4} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$.

Дійсними коренями цього рівняння є числа $x = \pm 2$. Ці числа є межами інтегрування. Таким чином,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left(\frac{8}{x^2 + 4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 2 \int_0^2 \left(\frac{8}{x^2 + 4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 16 \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} \Big|_0^2 - \frac{x^3}{12} \Big|_0^2 = \\ &= 8 \frac{\pi}{4} - \frac{8}{12} = 2\pi - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $2\pi - \frac{2}{3}$.

4. У тому випадку, якщо $x = \psi(y)$ та $x = \varphi(y)$ неперервні функції, визначені на інтервалі $y \in [c, d]$ і $\psi(y) \leq \varphi(y)$ (рис.12), то площа даної фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y)) dy.$$

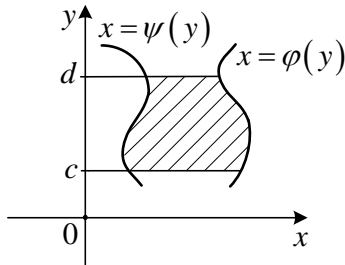


Рисунок 12

Приклад 4.1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $y^2 = x + 3$, $y^2 = 5 - x$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис.13).

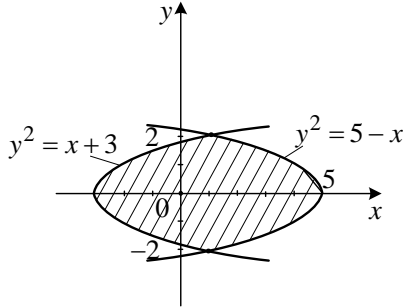


Рисунок 13

Обчислимо координати точок перетину кривих. Розглянемо систему

$$\begin{cases} y^2 = x + 3, \\ y^2 = 5 - x. \end{cases} \quad x + 3 = 5 - x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 2.$$

Ці числа є межами інтегрування. Таким чином,

$$S = \int_{-2}^2 (5 - y^2 - (y^2 - 3)) dy = 2 \int_0^2 (8 - 2y^2) dy = 4 \left(4y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= 4 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 4 \cdot \frac{16}{3} = \frac{64}{3}.$$

Відповідь: $\frac{64}{3}$.

Приклад 4.2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, що задані рівняннями: $x = 2 - y - y^2$, $x = 0$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис. 14).

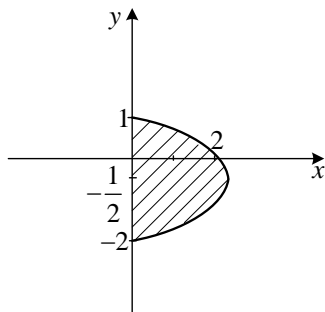


Рисунок 14

Очевидно, межами інтегрування є точки перетину параболи і осі ординат.

$$S = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Відповідь: $\frac{9}{2}$.

5. Площа криволінійної трапеції, що обмежена кривою, яка

задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ двома прямими

$x = a$, $x = b$ та відрізком осі OX ($a \leq x \leq b$) обчислюється за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt,$$

при цьому межі інтегрування t_1, t_2 визначаються з рівностей $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$.

Приклад 5.1. Обчислити площу фігури, яка обмежена першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ та відрізком осі OX .

Розв'язання. Зробимо рисунок циклоїди (рис.15).

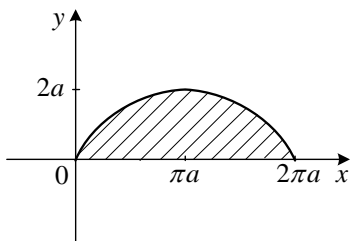


Рисунок 15

Точкам O та A відповідають значення параметра $t = 0, t = 2\pi$, тому за наведеною вище формулою:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot [a(t - \sin t)]' dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = a^2 \left(\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

Відповідь: $3\pi a^2$.

Приклад 5.2. Обчислити площу фігури, яка обмежена першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ та прямою $y = 3, y \geq 3$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури, що розглядається (рис.16).

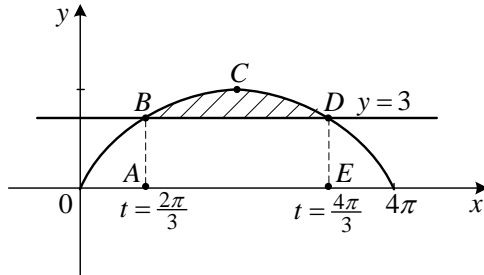


Рисунок 16

Обчислимо значення параметра t , які відповідають точкам B і D (точки перетину циклоїди та прямої $y = 3$):

$$3 = 2(1 - \cos t) \Rightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{3}, t_2 = \frac{4\pi}{3}$$

Тоді межі інтегрування

$$x_B = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}, B\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}, 3\right),$$

$$x_D = 2\left(\frac{4\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{3}, D\left(\frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{3}, 3\right).$$

Таким чином, площа криволінійної трапеції $ABCDE$ S_1 буде:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 2^2 (1 - \cos t)^2 dt = 4 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 4 \left(\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \\ &= 4 \left(\frac{12\pi}{6} - \frac{6\pi}{6} - 2\sin \frac{4\pi}{3} + 2\sin \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{3} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \end{aligned}$$

$$= 4 \left(\pi + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = 4 \left(\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4} \right) = 4\pi + 9\sqrt{3}.$$

Позначимо S_2 площу прямокутника $ABDE$.

$$S_2 = AE \cdot AB = \left\| \begin{array}{l} AE = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{3} - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi + 6\sqrt{3}}{3}, \\ AB = 3. \end{array} \right\| = 4\pi + 6\sqrt{3}.$$

Остаточню отримуємо: $S = S_1 - S_2 = 4\pi + 9\sqrt{3} - 4\pi - 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Відповідь: $3\sqrt{3}$.

Приклад 5.3. Обчислити площу фігури, яка обмежена астроїдою $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

Розв'язання. Зробимо рисунок астроїди (рис. 17).

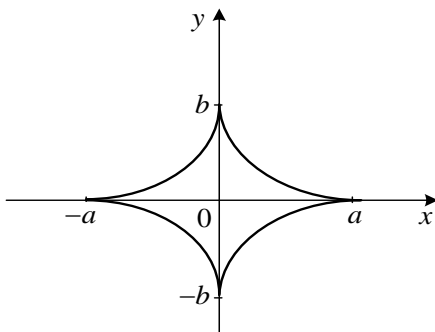


Рисунок 17

Напишемо рівняння астроїди в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = b \sin^3 t, \end{cases} \text{ де } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Зауважимо, що шукана площа є симетричною відносно координатних осей. Отже, $S = 4S_1$, де S_1 —частина площі, яка розташована в першій координатній чверті.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{\pi/2}^0 b \sin^3 t \cdot [a \cos^3 t]' dt = \int_{\pi/2}^0 b \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt = -3ab \int_{\pi/2}^0 \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt = \\
&= -3ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t \cdot (\sin t \cdot \cos t)^2 dt = -\frac{3ab}{4} \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t \cdot \sin^2 2t dt = -\frac{3ab}{4} \int_{\pi/2}^0 (\sin t \cdot \sin 2t)^2 dt = \\
&= -\frac{3ab}{4} \int_{\pi/2}^0 \frac{1}{4} (\cos(t-2t) - \cos(t+2t))^2 dt = -\frac{3ab}{16} \int_{\pi/2}^0 (\cos^2 t - 2\cos t \cos 3t + \cos^2 3t) dt = \\
&= -\frac{3ab}{16} \int_{\pi/2}^0 \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2t) - 2 \cdot \frac{1}{2}(\cos(t-3t) + \cos(t+3t)) + \frac{1}{2}(1 + \cos 6t) \right) dt = \\
&= -\frac{3ab}{16} \int_{\pi/2}^0 \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2t - \cos 4t + \frac{1}{2} \cos 6t \right) dt = -\frac{3ab}{16} \left(t - \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{1}{12} \sin 6t \right) \Big|_{\pi/2}^0 = \\
&= \frac{3ab}{16} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{2} + \frac{1}{12} \sin \frac{6\pi}{2} \right) = \frac{3ab\pi}{32}.
\end{aligned}$$

Отже остаточно отримуємо $S = 4 \frac{3ab\pi}{32} = \frac{3ab\pi}{8}$.

Відповідь: $\frac{3ab\pi}{8}$.

Задачі для аудиторної роботи

Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1. $y = x^2 + 2$, $x = -3$, $x = 1$, $y = 0$. 2. $x = (y-2)^3$, $x = 4y-8$.

3. $y = \ln x$, $y = -2$, $x = 1$, $x = 3$. 4. $y^2 = x+3$, $y^2 = 5-x$.

5. $y = \arcsin x$; $y = -\frac{\pi}{2}$; $x = 0$. 6. $xy = 1$, $y = x$, $x = 5$.

7. $y = e^x$, $x = -2$, $x = 1$, $y = 3$. 8. $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $x = 0$, $y \geq x$, $x \geq 0$.

9. $y = \frac{25}{x^2}$; $y = 0$, $y = 1$, $-7 \leq x \leq 7$. 10. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$

11.

$$\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} x = 3\sqrt{3}, (x \geq 3\sqrt{3}). \quad 12. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} y = 3, (y \geq 3, 0 \leq x \leq 4\pi).$$

Відповіді: 1. $\frac{52}{3}$. 2. 8. 3. $3 \ln 3 + 2$. 4. $\frac{64}{3}$. 5. 1. 6. $12 - \ln 5$.

7. $9 - e + e^{-2}$. 8. $\frac{\pi}{2}$. 9. $\frac{90}{7}$. 10. 6π . 11. $4\pi - 6\sqrt{3}$. 12. $3\sqrt{3}$.

Задачі для самостійної роботи

Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1. $y = x^2 + 1$, $x = -4$, $x = -2$, $y = 0$. 2. $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.

3. $y = \ln x$, $y = 2$, $x = 7$. 4. $y = -(x - 2)^2$, $y = x - 4$. 5. $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$. 6. $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$. 7. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.

8. $y = \sqrt{2 - x^2}$, $y = x^2$. 9. $y = \sqrt{8 - x^2}$, $y = x$ ($y \leq x$), $y = 0$.

10. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} (0 \leq x \leq 8\pi)$. 11. $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} y = 2, (y \geq 2)$.

12. $\begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} x \geq 9\sqrt{3}$.

Відповіді: 1. $\frac{62}{3}$. 2. 9. 3. $7 \ln 7 + e^2 - 21$. 4. 4,5. 5. $17,5 - 6 \ln 6$.

6. $\frac{31}{3}$. 7. $e + e^{-1} - 2$. 8. $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}$. 9. π . 10. 48π . 11. $12\pi - 9\sqrt{3}$.

12. $3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Література:

[3], гл. 7, с. 369–378.

[4], р. 6, с. 141–143.

Практичне заняття 3

ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ.

ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ ЛІНІЇ

Контрольні питання

1. Полярна система координат. Обчислення площі криволінійного сектору, обмеженого кривою, що задана у полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$).

2. Обчислення довжини дуги лінії, що задана рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

3. Обчислення довжини дуги лінії, що задана рівнянням $x = \varphi(y)$, $c \leq y \leq d$.

4. Обчислення довжини дуги лінії, що задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta. \end{cases}$

5. Обчислення довжини дуги лінії, що задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

Методичні рекомендації до практичного заняття

1. Як відомо, площа фігури, обмеженої неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

При обчисленні площ плоских фігур доцільно зробити креслення фігури, яка задана за умовою задачі. Рисунок допомагає визначити межі інтегрування. Якщо фігура складається з кількох

симетричних частин, зазвичай обчислюють площу однієї частини, а результат домножають на кількість частин.

Зауважимо, що криві, які визначаються рівнянням $\rho = a \cos k\varphi$ ($a > 0$) або $\rho = a \sin k\varphi$ ($a > 0$), де a, k – сталі величини, називаються трояндами. Якщо k – парне число, то крива має $2k$ пелюсток, якщо k – непарне число, то крива має k пелюсток.

Приклад 1.1. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 - \cos \varphi)$.

Розв’язання. Зробимо рисунок кардіоїди (рис.18).

З області визначення функції випливає, що $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Зауважимо, що $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ парна функція, отже графік є симетричним відносно полярної осі.

Побудуємо таблицю, в якій φ будемо надавати довільні значення і обчислювати відповідні значення ρ :

φ	ρ
0	$\rho = a(1 - \cos 0) = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$\rho = a(1 - \cos \frac{\pi}{4}) \approx 0,3a$
$\frac{\pi}{2}$	$\rho = a(1 - \cos \frac{\pi}{2}) = a$
$\frac{3\pi}{4}$	$\rho = a(1 - \cos \frac{3\pi}{4}) \approx 1,7a$
π	$\rho = a(1 - \cos \pi) = 2a$

Через симетрію фігури можна розглядати половину площі та подвоїти результат.

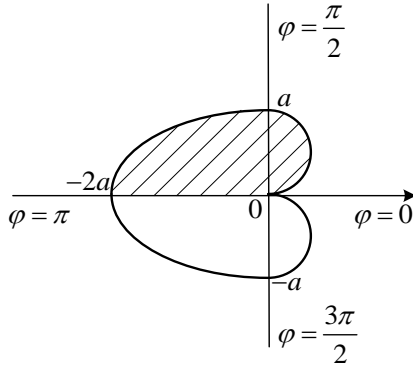


Рисунок 18

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\
 &= a^2 \left(\varphi \Big|_0^{\pi} - 2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right) = a^2 \left(\pi + \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{3\pi}{2} a^2.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{3\pi}{2} a^2$.

Приклад 1.2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho = a \cos 3\varphi$, ($a > 0$).

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури (рис. 19).

Період даної функції $T = \frac{2\pi}{3}$, при цьому допустимими значеннями для φ є ті, при яких $\cos 3\varphi \geq 0$:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Дана фігура являє собою три рівні пелюстки, одна з яких описується при $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$.

Побудуємо таблицю, в якій φ будемо надавати довільні значення і обчислювати відповідні значення ρ :

φ	ρ
0	$\rho = a \cos 0 = a$
$\frac{\pi}{12}$	$\rho = a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\rho = a \cos \frac{\pi}{2} = 0$

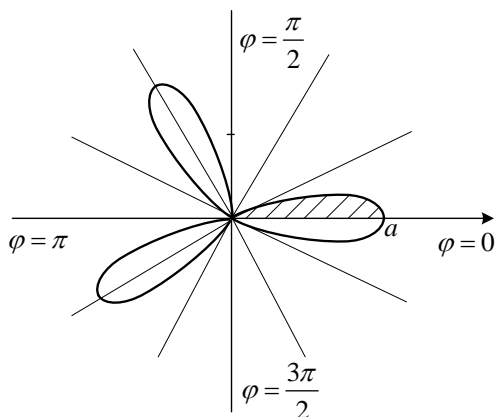


Рисунок 19

З рисунку видно, що $S = 6S_1$, де S_1 площа половини пелюстки

$$\begin{aligned}
 S &= 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi = 3a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}(1 + 2\cos 6\varphi) d\varphi = \frac{3a^2}{2} (\varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi) \Big|_0^{\pi/6} = \\
 &= \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} a^2.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} a^2$.

Приклад 1.3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лемнісатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури (рис.20).

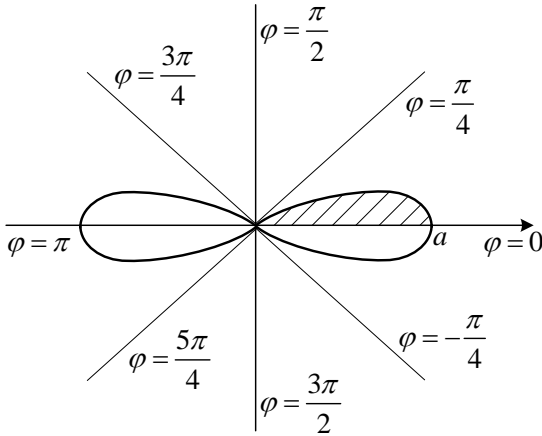


Рисунок 20

До рівняння лемніскати x та y входять у парному степені, а це означає, що фігура є симетричною відносно координатних осей. Отже, достатньо побудувати фігуру в I чверті, а потім, враховуючи симетрію зобразити всю фігуру. В даному випадку доцільно перейти до полярної системи координат, враховуючи, що

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Рівняння кривої набуває вигляду $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Допустимими значеннями для φ є ті, при яких $\cos 2\varphi \geq 0$:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi, k \in Z.$$

Побудуємо таблицю, в якій φ будемо надавати довільні значення і обчислювати відповідні значення ρ :

φ	ρ
0	$\rho = a\sqrt{\cos 0} = a$
$\frac{\pi}{12}$	$\rho = a\sqrt{\cos \pi/6} = a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0,93a$
$\frac{\pi}{6}$	$\rho = a\sqrt{\cos \pi/3} = a\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71a$
$\frac{\pi}{4}$	$\rho = a\sqrt{\cos \pi/2} = 0$

Остаточко маємо:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \left. \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right|_0^{\pi/4} = a^2.$$

Відповідь: a^2 .

2. Перейдемо до обчислення довжини дуги плоскої кривої в декартовій системі координат.

Якщо плоска крива задана рівнянням $y = y(x)$, а $y(x)$ та $y'(x)$ неперервні на $[a, b]$, то довжина дуги кривої обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Якщо лінія задана рівнянням $x = x(y)$, то довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy.$$

Приклад 2.1. Обчислити довжину дуги лінії

$$y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq 1.$$

Розв'язання. Знайдемо

$$y'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1-2x+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}};$$

$$\sqrt{1+(y'(x))^2} = \sqrt{1+\frac{1-x}{x}} = \sqrt{\frac{x+1-x}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Таким чином, $l = \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{4}}^1 = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$

Відповідь: 1.

Приклад 2.2. Обчислити довжину дуги лінії

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Розв'язання. Всі дії виконуються аналогічно попередньому прикладу:

$$y'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2-1}{2x};$$

$$\sqrt{1+(y'(x))^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}} = \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2} = \left|\frac{x^2+1}{2x}\right| = \frac{x^2+1}{2x} \quad (\text{за умовою } 1 \leq x \leq 2).$$

Таким чином,

$$l = \int_1^2 \frac{x^2+1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \ln|x| \Big|_1^2 = \frac{1}{4}(4-1) + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Відповідь: $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$

Приклад 2.3. Обчислити довжину напівкубічної параболи $5y^3 = x^2$, що розміщена в колі $x^2 + y^2 = 6$ (рис.21).

Розв'язання.

З'ясуємо точки перетину кривих. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 5y^3 = x^2, \\ x^2 + y^2 = 6, \end{cases} \Rightarrow 5y^3 + y^2 - 6 = 0.$$

Один з коренів даного рівняння $y = 1$. Таким чином,

$$\begin{array}{r} \underline{-5y^3 + y^2 - 6} \quad \left| \frac{y-1}{5y^2 + 6y + 6} \right. \\ \underline{5y^3 - y^2} \\ -6y^2 - 6 \\ \underline{6y^2 - 6y} \\ -6y - 6 \\ \underline{6y - 6} \\ 0. \end{array}$$

Рівняння $5y^2 + 6y + 6 = 0$ не має дійсних коренів. Тобто лінії перетинаються тільки при $y = 1$. Знайдемо відповідні значення x : $x^2 = 5$, $x = \pm\sqrt{5}$.

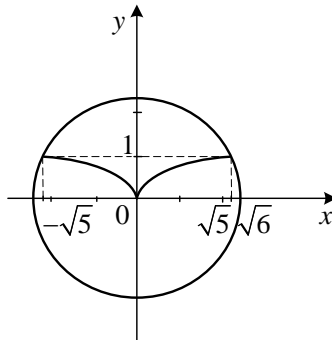


Рисунок 21

Завдяки симетрії кривої відносно осі ординат обчислимо довжину частини лінії при $x > 0$, а результат подвоїмо.

Напишемо рівняння напівкубічної параболи у вигляді

$$x = x(y): x^2 = 5y^3 \Rightarrow x = \sqrt{5}y^{\frac{3}{2}}.$$

Таким чином

$$x'_y = \sqrt{5} \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{1+(x'_y)^2} = \sqrt{1+5 \frac{9}{4} y} = \sqrt{\frac{4+45y}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4+45y},$$

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{4+45y}}{2} dy = \int_0^1 (4+45y)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{2}{3 \cdot 45} (4+45y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{135} \left(49^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) = \\ &= \frac{2}{135} (7^3 - 2^3) = \frac{2}{135} (343 - 8) = \frac{670}{135} = \frac{134}{27}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{134}{27}$.

3. Далі розглянемо обчислення довжини дуги лінії, що задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ де $x'(t), y'(t)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$. У цьому випадку довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Приклад 3.1. Обчислити довжину дуги арки циклоїди

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Розв'язання.

Оскільки $x'_t = 5(1 - \cos t), \quad y'_t = 5 \sin t,$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{25(1 - \cos t)^2 + 25 \sin^2 t} = 5\sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} =$$

$$\begin{aligned}
&= 5\sqrt{2-2\cos t} = 5\sqrt{2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2}} = 10\left|\sin \frac{t}{2}\right| = 10\sin \frac{t}{2} \quad \left(\text{за умовою } 0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi\right). \\
l &= \int_0^{2\pi} 10\sin \frac{t}{2} dt = 10 \cdot 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -20\cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -20(\cos \pi - \cos 0) = \\
&= -20(-1-1) = 40.
\end{aligned}$$

Відповідь: 40.

Приклад .2. Обчислити довжину дуги лінії

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(t^2 - 2t), \\ y = \frac{1}{3}(t-1)^3, \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Розв'язання. Всі дії виконуються аналогічно попередньому прикладу.

Оскільки $x'_t = \frac{1}{2}(2t-2) = t-1$, $y'_t = \frac{1}{3} \cdot 3(t-1)^2 = (t-1)^2$, тоді

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= \sqrt{(t-1)^2 + (t-1)^4} = \sqrt{(t-1)^2(1+(t-1)^2)} = \\
&= |t-1|\sqrt{1+(t-1)^2} = (t-1)\sqrt{1+(t-1)^2} \quad (\text{за умовою } 1 \leq t \leq 2).
\end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned}
l &= \int_1^2 (t-1)\sqrt{1+(t-1)^2} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{1+(t-1)^2} d(1+(t-1)^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[1+(t-1)^2\right]^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \\
&= \frac{1}{3} \left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{3}(\sqrt{8}-1).
\end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1}{3}(\sqrt{8}-1)$.

Приклад 3.3. Обчислити довжину дуги лінії

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{\cos 2t}{4}, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{\sin 2t}{4}, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Розв'язання. Обчислимо

$$x'_t = -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} (-\sin 2t) \cdot 2 = -\frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t = \frac{1}{2} (\sin 2t - \sin t),$$

$$y'_t = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t \cdot 2 = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t = \frac{1}{2} (\cos t - \cos 2t).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} (\sin 2t - \sin t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} (\cos t - \cos 2t)\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 2t - 2 \sin 2t \cdot \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \cos 2t \cos t + \cos^2 2t} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2(\sin 2t \cdot \sin t + \cos 2t \cos t)} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos(2t - t)} = \frac{1}{2} \sqrt{2(1 - \cos t)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \left| \sin \frac{t}{2} \right| = \sin \frac{t}{2} \quad \left(\text{за умовою } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$l = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin \frac{t}{2} dt = -2 \cos \frac{t}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} = -2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = -2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - 1.$$

Відповідь: $\sqrt{2} - 1$.

4. Розглянемо обчислення довжини дуги кривої, яка задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$, $\rho'(\varphi)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$. У цьому випадку довжина дуги обчислюється за

$$\text{формулою } l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Приклад 4.1. Обчислити довжину дуги лінії

$$\rho = 8 \cos^3 \frac{\varphi}{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання. Для обчислення довжини заданої дуги лінії скористаємось наведеною вище формулою. Для цього обчислимо

$$\rho'(\varphi) = 8 \cdot 3 \cos^2 \frac{\varphi}{3} \left(-\sin \frac{\varphi}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} = -8 \cos^2 \frac{\varphi}{3} \sin \frac{\varphi}{3},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} &= \sqrt{64 \cos^6 \frac{\varphi}{3} + 64 \cos^4 \frac{\varphi}{3} \sin^2 \frac{\varphi}{3}} = \\ &= 8 \cos^2 \frac{\varphi}{3} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{3} + \sin^2 \frac{\varphi}{3}} = 8 \cos^2 \frac{\varphi}{3}. \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8 \cos^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \cos \frac{2\varphi}{3} \right) d\varphi = 4 \left(\varphi + \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \pi + 6 \sin \frac{\pi}{6} = \pi + 3. \end{aligned}$$

Відповідь: $\pi + 3$.

Приклад 4.2. Обчислити довжину дуги лінії

$$\rho = 3(1 + \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Для обчислення довжини заданої дуги лінії скористаємось наведеною вище формулою. Для цього обчислимо

$$\rho'(\varphi) = 3 \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} &= \sqrt{9(1 + \sin \varphi)^2 + 9 \cos^2 \varphi} = 3 \sqrt{1 + 2 \sin \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \\ &= 3 \sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \varphi} = 3 \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)} = 3 \sqrt{2} \sqrt{2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = 6 \left| \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \\ &= \left\| \text{за умовою } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\| = 6 \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = -12 \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -12 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = 6\sqrt{2}.$$

Відповідь: $6\sqrt{2}$.

Задачі для аудиторної роботи

1) Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1. $\rho = 2 \sin 3\varphi$. 2. $\rho = 2(1 - \cos 2\varphi)$. 3. $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$. 4. $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.
5. $\rho = 2 - \sin 3\varphi$. 6. $\rho = 3 \cos 3\varphi$.

Відповіді: 1. π . 2. 6π . 3. 4 . 4. 6π . 5. $\frac{9\pi}{2}$. 6. $\frac{9\pi}{4}$.

2) Обчислити довжини дуг кривих, що задані рівняннями:

1. $y = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-1)^3}$, $2 \leq x \leq 8$. 2. $y = -\ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.
3. $x = 1 - \ln(y^2 - 1)$, $3 \leq y \leq 4$. 4. $x = 2 - e^y$, $\ln \sqrt{3} \leq y \leq \ln \sqrt{8}$.
5. $\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t), \\ y = R(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 5 \sin^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Відповіді: 1. $\frac{56}{3}$. 2. $\ln \sqrt{3}$. 3. $1 + \ln \frac{6}{5}$. 4. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. 5. $\frac{\pi^2 R}{2}$.

6. $\sqrt{50}$.

Задачі для самостійної роботи

1) Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями:

1. $\rho = 2 \sin 2\varphi$. 2. $\rho = 2(1 + \cos 2\varphi)$. 3. $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$. 4. $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$.
5. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$

Відповіді: 1. π . 2. 6π . 3. 1. 4. $\frac{27\pi}{2}$. 5. $\frac{9\pi}{2}$.

2) Обчислити довжини дуг кривих, що задані рівняннями:

1. $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. 2. $y = \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3}$, $1 \leq x \leq 9$.

3. $x = 1 + \arcsin y - \sqrt{1-y^2}$, $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$. 4. $\rho = 6(1 + \cos \varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$.

5.
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Відповіді: 1. $\frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$. 2. $\frac{52}{3}$. 3. $\sqrt{2}$. 4. $12\sqrt{2}$. 5. $\frac{\pi^3}{3}$.

Література:

[3], гл. 7, с. 378–383, 387–390.

[4], р. 6, с. 141–147.

Практичне заняття 4

ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Контрольні питання

1. Обчислення об'єму тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX криволінійної трапеції, що обмежена лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

2. Обчислення об'єму тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY криволінійної трапеції, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$.

Методичні рекомендації до практичного заняття

1. Як відомо, об'єм тіла, що утворився внаслідок обертання навколо осі OX криволінійної трапеції, що обмежена лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ обчислюється за формулою:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

При розв'язанні таких задач доцільно зробити креслення фігури, що обертається. Рисунок допомагає з'ясувати межі інтегрування і дає уявлення про вигляд тіла обертання (з порожниною чи без порожнини). Якщо тіло обертання має порожнину, то його об'єм розглядають як різницю об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні зовнішньої кривої (користуються рисунком), а V_2 – об'єм порожнини.

Приклад 1.1. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX фігури, що обмежена лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури, яка обмежена заданими лініями (рис.22).

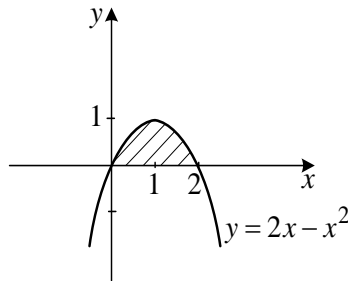


Рисунок 22

Використовуючи відповідну формулу, можна записати:

$$V_{Ox} = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi \left(4 \cdot \frac{8}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) = 4\pi \left(\frac{8}{3} - 4 + \frac{8}{5} \right) = 4\pi \frac{40 - 60 + 24}{15} = 4\pi \cdot \frac{4}{15} = \frac{16}{15} \pi.$$

Відповідь: $\frac{16}{15} \pi$.

Приклад 1.2. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури, яка обмежена заданими лініями (рис.22).

Об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі Ox фігури, що обмежена заданими лініями можна розглядати як різницю об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена прямою $y = -x + \frac{3}{2}$, а V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена параболою $y = \frac{1}{2}x^2$.

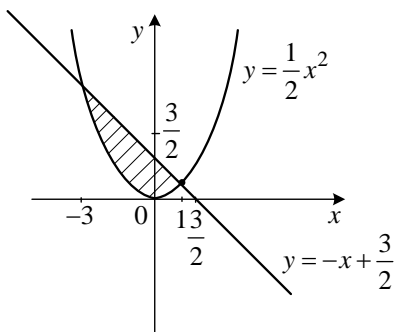


Рисунок 23

Знайдемо границі інтегрування – абсциси точок перетину прямої і параболі. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ y = -x + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Маємо: $\frac{1}{2}x^2 = -x + \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -3$.

Використовуючи відповідну формулу, можна записати:

$$\begin{aligned} V_{OX} &= V_1 - V_2 = \pi \int_{-3}^1 \left(-x + \frac{3}{2}\right)^2 dx - \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx = -\pi \left. \left(\frac{(-x + \frac{3}{2})^3}{3} \right) \right|_{-3}^1 - \pi \left. \frac{x^5}{4 \cdot 5} \right|_{-3}^1 = \\ &= -\frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{8} - \frac{729}{8} \right) - \frac{\pi}{20} (1 + 243) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{728}{8} - \frac{244\pi}{20} = \pi \left(\frac{91}{3} - \frac{61}{5} \right) = \frac{272}{15} \pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{272}{15} \pi$.

Приклад 1.3. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX фігури, що обмежена лініями $x = \sqrt{1 - y^2}$, $y = \sqrt{\frac{3}{2}x}$, $y = 0$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури (рис.24), яка обмежена половиною кола з центром у початку координат та радіусом, що дорівнює одиниці, параболою $y = \sqrt{\frac{3}{2}x}$ та віссю OX .

Знайдемо абсциси точок перетину кола і параболі. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - y^2}, \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = \frac{3}{2}x. \end{cases}$$

Маємо: $x^2 + \frac{3}{2}x = 1; 2x^2 + 3x - 2; x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$.

Об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі OX фігури, що обмежена заданими лініями можна розглядати як суму

об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX криволінійної трапеції, що обмежена параболою $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, а V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX криволінійної трапеції, що обмежена частиною кола $x^2 + y^2 = 1$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

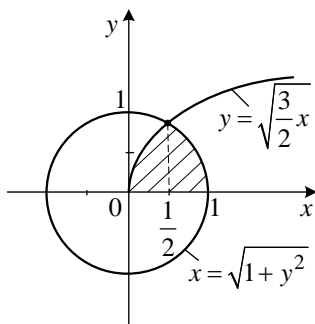


Рисунок 24

Використовуючи відповідну формулу, можна записати:

$$V_{Ox} = V_1 + V_2 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} x dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx = \frac{3}{2} \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} + \pi \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) = \frac{19\pi}{48}.$$

Відповідь: $\frac{19\pi}{48}$.

2. Обчислення об'єму тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY криволінійної трапеції, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ здійснюється за формулою:

$$V_{OY} = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy.$$

При розв'язанні таких задач міркування аналогічні тим, які наведено в п. 1.

Приклад 2.1. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена лініями $y = \ln x$, $y = 2$, $y = 5$, $x = 0$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури (рис.25).

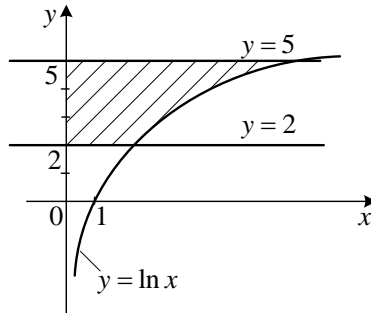


Рисунок 25

Перш ніж скористатися наведеною вище формулою для обчислення даного об'єму тіла, необхідно рівняння кривої $y = \ln x$ записати у вигляді $x = e^y$.

Тоді

$$V_{OY} = \pi \int_2^5 (e^y)^2 dy = \frac{\pi}{2} e^{2y} \Big|_2^5 = \frac{\pi}{2} (e^{10} - e^4).$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} (e^{10} - e^4)$.

Приклад 2.2. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена лініями $x = 1 - y^2$, $x = 9 - 9y^2$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури, яка обмежена заданими параболою (рис.26).

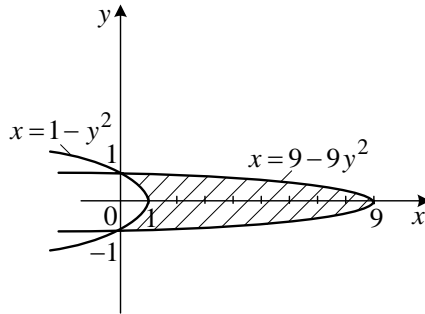


Рисунок 26

Об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена заданими лініями, можна розглядати як різницю об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY криволінійної трапеції, що обмежена параболою $x = 9 - 9y^2$, а V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY криволінійної трапеції, що обмежена параболою $x = 1 - y^2$.

Використовуючи відповідну формулу, можна записати:

$$\begin{aligned} V_{Or} = V_1 - V_2 &= \pi \int_{-1}^1 9^2 (1 - y^2)^2 dy - \pi \int_{-1}^1 (1 - y^2)^2 dy = 80\pi \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4) dy = \\ &= 160\pi \left(y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 160\pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = 160\pi \frac{15 - 10 + 3}{15} = \frac{256}{3} \pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{256}{3} \pi$.

Приклад 2.3. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена лініями $y = (x + 2)^2$, $y = 9x$, $x = 0$.

Розв'язання. Зробимо креслення фігури, яка обмежена заданими лініями (рис.27).

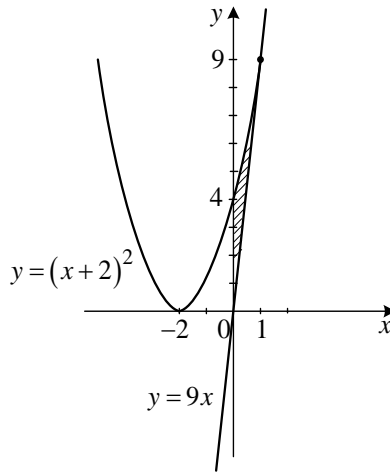


Рисунок 27

Об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена заданими лініями можна розглядати як різницю об'ємів V_1 і V_2 , де V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY криволінійної трапеції, що обмежена прямою $y = 9x$, а V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY криволінійної трапеції, що обмежена параболою $y = (2+x)^2$. Знайдемо абсциси точок перетину заданих ліній. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = (x+2)^2, \\ y = 9x. \end{cases} \quad (x+2)^2 = 9x; x^2 - 5x + 4 = 0; x_1 = 1, x_2 = 4.$$

При $x = 1$ ордината $y = 9$. Також необхідно рівняння ліній $y = (x+2)^2$, $y = 9x$ записати у вигляді $x = \frac{y}{9}$, $x = -2 \pm \sqrt{y}$. Оскільки фігура розглядається за умови $x > 0$, обираємо $x = -2 + \sqrt{y}$.

Використовуючи відповідну формулу, отримуємо:

$$\begin{aligned}
 V_{or} &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^9 \left(\frac{y}{9}\right)^2 dy - \pi \int_4^9 (\sqrt{y} - 2)^2 dy = \frac{\pi}{81} \frac{y^3}{3} \Big|_0^9 - \pi \int_4^9 (y - 4\sqrt{y} + 4) dy = \\
 &= 3\pi - \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{4 \cdot 2y^{3/2}}{3} + 4y \right) \Big|_4^9 = 3\pi - \pi \left(\frac{81}{2} - 72 + 36 - 8 + \frac{64}{3} - 16 \right) = \\
 &= 3\pi - \pi \frac{11}{6} = \frac{7}{6} \pi.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{7}{6} \pi$.

Задачі для аудиторної роботи

Обчислити об'єми тіл, отриманих при обертанні навколо осі OX фігур, що обмежені лініями:

1. $y = \sin x$, $y = 0$, $(0 \leq x \leq \pi)$.
2. $y = x - x^2$, $y = 0$.
3. $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$.
4. $y = 2 - x^2$, $y = x^2$.
5. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.
6. $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$.
7. $x = \sqrt{1 - y^2}$, $y = \sqrt{\frac{3}{2}} x$.

Відповіді: 1. $\frac{\pi^2}{2}$. 2. $\frac{\pi}{30}$. 3. $\frac{4\pi}{3}$. 4. $\frac{16\pi}{3}$. 5. $\frac{16\pi}{15}$. 6. $\frac{272\pi}{15}$. 7. $\frac{19\pi}{48}$.

Задачі для самостійної роботи

Обчислити об'єми тіл, отриманих при обертанні навколо осі OY фігур, що обмежені лініями:

1. $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$.
2. $y = 2 - \frac{x^2}{2}$, $x + y = 2$.
3. $x^2 - y^2 = 4$, $y = -2$, $y = 2$.
4. $y = x^3$, $y = 2 - x$, $x = 0$.
5. $y = x^2$, $y = x$.
6. $y^2 = 3x$, $x = 1$.

Відповіді: 1. $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$. 2. $\frac{4\pi}{3}$. 3. $\frac{64\pi}{3}$. 4. $\frac{14\pi}{15}$. 5. $\frac{\pi}{6}$. 6. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{5}$.

Література:

[3], гл. 7, с. 383–387.

[4], р. 6, с. 147–148.

Практичне заняття 5

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО РОДУ. ДОСЛІДЖЕННЯ НА ЗБІЖНІСТЬ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО РОДУ

Контрольні питання

1. Означення невластного інтеграла першого роду.
2. Геометричний зміст невластного інтеграла першого роду.
3. Означення невластного інтеграла другого роду.
4. Геометричний зміст невластного інтеграла другого роду.
5. Ознаки збіжності невластних інтегралів першого роду.

6. Дослідження збіжності $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

7. Ознаки збіжності невластних інтегралів другого роду.

8. Дослідження збіжності $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Методичні рекомендації до практичного заняття

Приклад 1. Обчислити невластний інтеграл або встановити його

розбіжність $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$.

Розв'язання. Користуючись означенням, можна записати

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{(x+2)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} \Big|_1^A = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{A+2}{3} - \operatorname{arctg} 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{\pi}{12}$.

Приклад 2. Обчислити невластий інтеграл або встановити його розбіжність $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$.

Розв'язання. Користуючись означенням можна записати

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 xe^x dx &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 xe^x dx = \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^x dx, \\ du = dx, \quad v = e^x. \end{array} \right\| = \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[xe^x \Big|_B^0 - \int_B^0 e^x dx \right] = \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[xe^x \Big|_B^0 - e^x \Big|_B^0 \right] = \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[-Be^B - 1 + e^B \right] = -1. \end{aligned}$$

Відповідь: -1 .

Приклад 3. Обчислити невластий інтеграл або встановити його розбіжність $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$.

Розв'язання. Користуючись означенням можна записати

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} &= \int_{-\infty}^0 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} + \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow -\infty} \ln|x^3 + 1| \Big|_A^0 + \\ &+ \frac{1}{3} \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln|x^3 + 1| \Big|_0^B = \infty. \end{aligned}$$

Відповідь: інтеграл розбігається.

У випадках, коли не вдається проінтегрувати функцію, що розміщена під знаком інтегралу, дослідити на збіжність невластий інтеграл першого роду, користуючись означенням не можна. Тоді

дослідження невласних інтегралів на збіжність проводять за допомогою ознак збіжності.

Приклад 4. Дослідити на збіжність $\int_1^{\infty} \frac{dx}{7+8x+8x^5}$.

Розв'язання. Скористаємось граничною ознакою порівняння:

якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = const \neq 0$, де $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні знакосталі

функції, тоді інтеграли $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ поведуть себе однаково,

тобто одночасно збігаються або розбігаються. В даному разі

$$f(x) = \frac{1}{7+8x+8x^5}, \text{ а через } \varphi(x) \text{ доцільно вибрати } \varphi(x) = \frac{1}{x^5}.$$

$$\text{Обчислимо } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{7+8x+8x^5} = \frac{1}{8} = const \neq 0.$$

Отже, невласні інтеграли поведуть себе однаково. Як відомо,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5} \quad (p = 5 > 1) \text{ збігається, таким чином } \int_1^{\infty} \frac{dx}{7+8x+8x^5} \text{ також збігається.}$$

Відповідь: інтеграл збігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність $\int_1^{\infty} \ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right) dx$.

Розв'язання. Зобразимо підінтегральну функцію у вигляді

$$\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right): \frac{1}{x^2+1}, (x \rightarrow \infty).$$

Скористаємось граничною ознакою порівняння. В даному разі

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right), \text{ а через } \varphi(x) \text{ доцільно вибрати } \varphi(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Переконаємось, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 = \text{const} \neq 0.$$

Таким чином, невласні інтеграли поведуть себе однаково. Як відомо, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ ($p = 2 > 1$) збігається, отже $\int_1^{\infty} \ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right) dx$ також збігається.

Відповідь: інтеграл збігається.

Приклад 6. Дослідити на збіжність $\int_2^{\infty} \frac{\ln(x^2+1) dx}{x}$.

Розв'язання. Скористаємось ознакою порівняння: якщо $f(x) \leq \varphi(x)$, де $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні та невід'ємні функції, то

$$1) \text{ якщо } \int_a^{\infty} \varphi(x) dx \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (\rightarrow \leftarrow),$$

$$2) \text{ якщо } \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (\leftarrow \rightarrow) \Rightarrow \int_a^{\infty} \varphi(x) dx \quad (\leftarrow \rightarrow).$$

$$\text{В даному разі } \forall x > 2 \quad \ln(x^2+1) > 1 \Rightarrow \frac{\ln(x^2+1)}{x} > \frac{1}{x}.$$

Як відомо, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ розбігається, отже $\int_2^{\infty} \frac{\ln(x^2+1) dx}{x}$ також розбігається.

Відповідь: інтеграл розбігається.

Далі розглянемо невласні інтеграли II роду. Невласним інтегралом II роду є інтеграл по заданому скінченному інтервалу $[a, b]$ від функції $f(x)$, яка має на цьому інтервалі нескінченний розрив. Можливі наступні випадки:

а) функція $f(x)$ неперервна на $(a, b]$, а в точці $x = a$ має

нескінченний розрив, тоді $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$;

б) функція $f(x)$ неперервна на $[a, b)$, а в точці $x = b$ має нескінченний розрив, тоді $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$;

в) функція $f(x)$ має нескінченний розрив в точці $x = c \in (a, b)$, тоді $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx$.

Приклад 7. Дослідити на збіжність $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}$ в точці $x = 0$ має нескінченний розрив. За означенням невласного інтегралу II роду:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{3}} e^{3+\frac{1}{x}} d\left(3 + \frac{1}{x}\right) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{3+\frac{1}{x}} \Big|_{\varepsilon}^{\frac{1}{3}} = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[e^6 - e^{3+\frac{1}{\varepsilon}} \right] = \infty. \end{aligned}$$

Відповідь: інтеграл розбігається.

Приклад 8. Дослідити на збіжність $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2-4x}}$ має нескінченний розрив в точці $x = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, тоді за означенням невласного інтегралу II роду:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}} =$$

$$= -\frac{3}{8} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (2-4x)^{2/3} \Big|_0^{1/2-\varepsilon_1} - \frac{3}{8} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} (2-4x)^{2/3} \Big|_{1/2+\varepsilon_2}^1 = 0.$$

Відповідь: інтеграл збігається.

Приклад 9. Дослідити на збіжність $\int_{1/2}^1 \frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)} dx$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)}$ в точках

$x=0 \notin \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $x=1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ має нескінченний розрив. За означенням невластного інтегралу II роду:

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)} dx = \ln 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1-x)} \Big|_{1/2}^{1-\varepsilon} = \\ &= \ln 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1-1+\varepsilon)} - \frac{1}{\ln 1/2} \right] = \ln 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1-1+\varepsilon)} - \frac{1}{\ln 1/2} \right] = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: інтеграл збігається.

При дослідженні на збіжність невластних інтегралів II роду по скінченному інтервалу $[a, b]$ від функції $f(x)$, яка має на цьому інтервалі нескінченний розрив, також користуються ознаками збіжності у випадках, коли безпосереднє користування означенням не є доцільним через складність підінтегральної функції.

Приклад 10. Дослідити на збіжність $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Розв'язання. Напишемо підінтегральну функцію таким чином:

$$\frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x^4}{\sqrt{(1+x)^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}.$$

Ця функція є нескінченно великою за умови, що $x \rightarrow 1$, причому її порядок, порівнюючи з $\frac{1}{1-x}$ дорівнює $\frac{3}{2}$.

В даному разі скористаємось ознакою: якщо функція $f(x) \geq 0$ визначена та неперервна на проміжку $[a, b)$ і є нескінченно великою порядку λ у порівнянні з $\frac{1}{b-x}$ при $x \rightarrow b - \varepsilon$, то $\int_a^b f(x) dx$ ($\rightarrow \leftarrow$) при

$\lambda < 1$, $\int_a^b f(x) dx$ ($\leftarrow \rightarrow$) при $\lambda \geq 1$. Таким чином, $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

розбігається.

Відповідь: інтеграл розбігається.

Приклад 11. Дослідити на збіжність $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}$.

Розв'язання. Користуючись наслідками першої та другої важливих границь, за умови $x \rightarrow 0$ маємо: $\sin x : x$, $e^x - 1 : x$.

Таким чином можна розглядати інтеграл $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{x} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ ($\rightarrow \leftarrow$)

так як відомо, що $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \rightarrow \leftarrow, p < 1, \\ \leftarrow \rightarrow, p \geq 1. \end{cases}$

Відповідь: інтеграл збігається.

Приклад 12. Дослідити на збіжність $\int_1^2 \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Розв'язання. Функція $y = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}$ має нескінченний розрив в точці

$x = 1$, але для $x > 1$ $\left| \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Далі слід скористатися наступною інформацією: якщо функція $f(x)$ має нескінченний розрив в одному з кінців інтервалу інтегрування (a, b) , наприклад в точці $x = a$, тоді невласний інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ ($\rightarrow \leftarrow$), якщо $|f(x)| \leq \frac{M}{(x-a)^m}$, $m < 1$; та $\int_a^b f(x) dx$ ($\leftarrow \rightarrow$), якщо $|f(x)| \geq \frac{M}{(x-a)^m}$, $m \geq 1$. В даному випадку $m = \frac{1}{3}$, тобто інтеграл збігається, а враховуючи ознаку абсолютної збіжності, можна зробити висновок, що інтеграл $\int_1^2 \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ збігається абсолютно.

Відповідь: інтеграл збігається абсолютно.

Задачі для аудиторної роботи

Обчислити або дослідити на збіжність невласні інтеграли:

$$1. \int_1^{\infty} \frac{(1+x^2)}{x^3} dx \quad 2. \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} \quad 3. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx \quad 4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x+3x^3+6x^6} \quad 6. \int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1+x\sqrt[3]{x}} dx \quad 7. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}} \quad 8. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \quad 9. \int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$$

$$10. \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1} \quad 11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x dx}{\sqrt{x}}$$

Відповіді: 1. Розбігається. 2. $-\frac{1}{2}$. 3. Розбігається. 4. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

5. Збігається. 6. Збігається. 7. Розбігається. 8. Розбігається.

9. Розбігається. 10. Збігається. 11. Збігається.

Задачі для самостійної роботи

Обчислити або дослідити на збіжність невласні інтеграли:

$$1. \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2) \arctg^2 3x} \cdot 2. \int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x) \ln 5} \cdot 3. \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

$$4. \int_2^{\infty} \frac{2 + \sin x + \ln x}{\sqrt{x}} dx \cdot 5. \int_4^6 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} \cdot 6. \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx.$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} \cdot 8. \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx \cdot 9. \int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}.$$

Відповіді: 1. $\frac{2}{3}$. 2. $\frac{7}{4}$. 3. $\frac{1}{2}$. 4. Розбігається. 5. Розбігається.

6. Розбігається. 7. 2. 8. Розбігається. 9. Розбігається.

Література:

[3], гл. 7, с. 395–408.

[4], р. 6, с. 148–149.

ТЕМАТИЧНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Варіант 1

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin x dx$.

2. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ на відрізку $[3,8]$.

3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:

$$y = \frac{4}{x}, y = x, y = 0, x = 1, x = 4.$$

4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX фігури, що обмежена лініями:

$$y = 4\sin x, y = 2\sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

5. Обчислити невластний інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-4x} dx$.

Варіант 2

1. Обчислити інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$.

2. Знайти середнє значення функції $f(x) = xe^{-2x}$ на відрізку $[0,1]$.

3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y = e^{-x}$, $y = x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 3$.

4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена лініями $y = x^2$, $2y = 1 + x^2$.

5. Обчислити невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$.

Варіант 3

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/6} x \cos 3x dx$.

2. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x}}$ на відрізку $[0,5]$.

3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:

$$x = y^2 - 4y + 4, \quad x + 2y - 4 = 0.$$

4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX фігури, що обмежена лініями:

$$2x - x^2 - y = 0, \quad 2x^2 - 4x + y = 0.$$

5. Обчислити невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{-1} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 16}}$.

Варіант 4

1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{3^x}{3+9^x} dx$.

2. Знайти середнє значення функції $f(x) = (x+1)e^{2x}$ на відрізку $[-1,0]$.

3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:

$$y^2 + 2y + x^2 = 0, \quad y = x.$$

4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена лініями:

$$y = x^2 + 1, \quad y = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

5. Обчислити невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

Варіант 5

1. Обчислити інтеграл $\int_1^2 (x-1) \ln x dx$.
2. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$ на відрізьку $[1, e^3]$.
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $x = 4 - (y-1)^2$, $x = (y-2)^2 - 1$.
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX фігури, що обмежена лініями: $x = \sqrt{y-2}$, $x = \sqrt{2-y}$, $x = 2$.
5. Обчислити невластний інтеграл $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{(4-x) \cdot x}}$.

Варіант 6

1. Обчислити інтеграл $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.
2. Знайти середнє значення функції $f(x) = x^2 e^{3x}$ на відрізьку $[0, 1]$.
3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями: $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 4$.
4. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY фігури, що обмежена лініями: $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $x = 0$.
5. Обчислити невластний інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1. Формула Ньютона – Лейбніця:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

2. Заміна змінної:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\| \begin{array}{l} x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt, \\ \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b \end{array} \right\| = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

3. Інтегрування частинами: $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$

4. Теорема про оцінку визначеного інтеграла.

Якщо $m \leq f(x) \leq M$ на $[a, b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

5. Теорема про середнє значення. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то існує така точка $c \in (a, b)$, що $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Значення $f(c)$ – середнє значення функції $f(x)$ на відрізьку $[a, b]$.

6. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $(f(x) \geq 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$: $S = \int_a^b f(x)dx$.

7. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $(\varphi(y) \geq 0)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$: $S = \int_c^d \varphi(y)dy$

8. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$, $(f(x) \leq 0)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

9. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $(\varphi(y) \leq 0)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$: $S = -\int_c^d \varphi(y)dy$.

10. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $(f_2(x) \geq f_1(x))$, $x = a$, $x = b$:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

11. Площа плоскої фігури, що обмежена лініями $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$, $(\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y))$, $y = c$, $y = d$: $S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy$.

12. Площа плоскої фігури, якщо крива $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta: \end{cases} S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt$.

13. Площа криволінійного сектору, обмеженого кривою, що задана у полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $(\alpha < \beta)$: $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$.

14. Довжина дуги лінії, що задана рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

15. Довжина дуги лінії, що задана рівнянням $x = \varphi(y)$, $c \leq y \leq d$: $l = \int_c^d \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy$.

16. Довжина дуги лінії, що задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta: \end{cases} l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.

17. Довжина дуги лінії, що задана у полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$: $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$.

18. Об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OX криволінійної трапеції, що обмежена лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$,

$$y = 0: V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

19. Об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY криволінійної трапеції, що обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$,

$$x = 0: V_{oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

20. Об'єм тіла, отриманого при обертання навколо осі OX фігури, що обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $(0 \leq f_1(x) \leq f_2(x))$,

$$x = a, x = b. V_{ox} = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx.$$

21. Об'єм тіла, отриманого при обертання навколо осі OY фігури, що обмежена лініями $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$, $(0 \leq \varphi_1(y) \leq \varphi_2(y))$,

$$y = c, y = d. V_{oy} = \pi \int_c^d (\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)) dy.$$

22. Невласні інтеграл першого роду:

$$a) \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx; \quad б) \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx;$$

$$в) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx.$$

23. Ознаки збіжності невластних інтегралів першого роду:

а) Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на $[a, \infty)$. Тоді для будь-якого $x_0 > a$ невластні інтеграли $\int_a^{\infty} f(x) dx$ та $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

б) Ознака порівняння. Нехай при $a \leq x < \infty$ виконується умова: $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тоді: якщо $\int_a^{\infty} g(x)dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$; якщо $\int_a^{\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається і інтеграл $\int_a^{\infty} g(x)dx$.

в) Гранична ознака порівняння. Нехай $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, де $f(x)$ та $g(x)$ неперервні знакосталі функції, тоді невласні інтеграли $\int_a^{\infty} f(x)dx$ та $\int_a^{\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

г) Достатня ознака збіжності невласного інтеграла від знакозмінної функції. Якщо збігається інтеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ збігається і називається абсолютно збіжним.

24. Невласний інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ збігається, якщо $p > 1$ та розбігається, якщо $p \leq 1$.

25. Невласні інтеграли другого роду: а) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, де $x = b$ – точка нескінченного розриву функції $f(x)$;

б) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, де $x = a$ – точка нескінченного розриву

функції $f(x)$; в) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$, де

$x = c$ – точка нескінченного розриву функції $f(x)$.

26. Ознаки збіжності невластних інтегралів другого роду:

а) Ознака порівняння. Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні на $[a, b)$, $x = b$ – точка нескінченного розриву функцій

$f(x)$ та $g(x)$ і $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тоді: якщо $\int_a^b g(x)dx$ збігається, то

збігається і інтеграл $\int_a^b f(x)dx$; якщо $\int_a^b f(x)dx$ розбігається, то

розбігається і інтеграл $\int_a^b g(x)dx$.

б) Гранична ознака порівняння. Нехай $f(x)$ та $g(x)$ неперервні та знакосталі на $[a, b)$, $x = b$ – точка нескінченного розриву функцій $f(x)$ та $g(x)$ і $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$. Тоді невластні інтеграли

$\int_a^b f(x)dx$ та $\int_a^b g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

в) Достатня ознака збіжності невластного інтеграла від знакозмінної функції. Якщо $x = b$ – точка нескінченного розриву

функцій $f(x)$ і збігається інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$

збігається і називається абсолютно збіжним.

27. Невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ збігається, якщо $p < 1$ та розбігається, якщо $p \geq 1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М.: Наука, 1985. – 446 с.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математики / под ред. А. П. Рябушко: В 3 ч. – М.: Выш. шк, 1991. – Ч. 2 – 352 с.
3. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие – В двух томах / сост. Ю. Л. Геворкян, Л. А. Балака и др. – Х.: НТУ «ХПИ», 2005. – т. 1 – 448 с.
4. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики: у 2 ч. – Ч. 1 / Н. О. Чікіна, І. В. Антонова, Л. О. Балака та ін.; за ред. Н. О. Чікіної. – Х.: Підручник НТУ «ХПИ», 2012. – 224 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Практичне заняття 1. Обчислення визначеного інтеграла за допомогою формули Ньютона – Лейбніця. Метод інтегрування заміною змінної інтегрування. Метод інтегрування частинами.....	4
Практичне заняття 2. Застосування визначеного інтегралу для обчислення площі плоских фігур в декартовій системі координат.....	13
Практичне заняття 3. Обчислення площі плоских фігур в полярній системі координат. Обчислення довжини дуги лінії.....	29
Практичне заняття 4. Обчислення об'ємів тіл обертання.....	42
Практичне заняття 5. Невласні інтеграли першого та другого роду. Дослідження на збіжність невластних інтегралів першого і другого роду.....	51
Тематична контрольна робота.....	60
Довідковий матеріал.....	63
Список літератури	69

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять з вищої математики за темою
«Визначений інтеграл та його застосування»
для студентів усіх спеціальностей

Укладачі: ЦЕХМІСТРО Ірина Іванівна, ЧЕРЕМСЬКА Надія
Валентинівна, ЧЕРНОГОР Тетяна Тимофіївна

Відповідальний за випуск Ю. Л. Геворкян

Роботу до видання рекомендувала проф. Л. В. Курпа
В авторській редакції

План 2018 р., поз. 19

Підп. до друку 10.01.2018. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 3,0.
Наклад 50 прим. Зам. № _____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
